Problèmes d'optimisation – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Variations, extremums et courbes · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Écris d'abord l'intervalle de la variable : une racine de la dérivée hors de cet intervalle ne compte pas.
- Exprime la grandeur avec une seule variable : remplace y par son expression en x.
- Sur un segment, compare aussi les valeurs aux bornes.
- Réponds à la question posée : la dimension (pour quelle valeur ?) ou la valeur (combien ?), avec l'unité.
- Pour une distance, on étudie son carré ; à la fin, on n'oublie pas la racine.
- Pour dériver $x(10-2x)^2$, développe d'abord : $(10-2x)^2$ ne se dérive pas en $2(10-2x)$.

Exercice 1 – Le bénéfice de l'atelier ★

Un atelier fabrique et vend chaque jour x gâteaux, avec $x \in [0\,;\,60]$. Le bénéfice quotidien, en euros, est $B(x) = -2x^2 + 120x - 1\,000$.

1. Calcule $B'(x)$ et étudie son signe sur $[0\,;\,60]$.
2. Dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;\,60]$.
3. Combien de gâteaux faut-il vendre pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?
4. Pour combien de gâteaux l'atelier ne perd-il pas d'argent ?

Exercice 2 – Le niveau du réservoir ★

Pendant une journée d'orage, le volume d'eau d'un réservoir, en hectolitres, t heures après minuit, est $N(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 20$, pour $t \in [0\,;\,8]$.

1. Calcule $N'(t)$ et montre que $N'(t) = 3(t-2)(t-6)$.
2. Dresse le tableau de variations de N sur $[0\,;\,8]$.
3. Pendant quelle période le volume d'eau baisse-t-il ?
4. Quel est le volume maximal sur la période ? À quel(s) moment(s) est-il atteint ?

Exercice 3 – Le coût moyen ★

Une usine produit q tonnes de peinture par jour, avec $q \in]0\,;\,30]$. Le coût total, en centaines d'euros, est $C(q) = q^2 + 4q + 100$. Le coût moyen d'une tonne est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Montre que $C_M(q) = q + 4 + \dfrac{100}{q}$.
2. Calcule $C_M'(q)$ et montre que $C_M'(q) = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.
3. Dresse le tableau de variations de C_M et donne la production qui rend le coût moyen minimal.
4. Quel est alors le coût total de la production ?

Exercice 4 – L'enclos contre le mur ★★

Avec 40 m de grillage, un éleveur veut fermer un enclos rectangulaire le long d'un mur : le mur forme un côté, le grillage les trois autres. On note x la longueur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprime la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x. Dans quel intervalle x varie-t-il ?
2. Montre que l'aire de l'enclos est $A(x) = 40x - 2x^2$.
3. Étudie les variations de A sur $]0\,;\,20[$.
4. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ? Quelle est cette aire ?

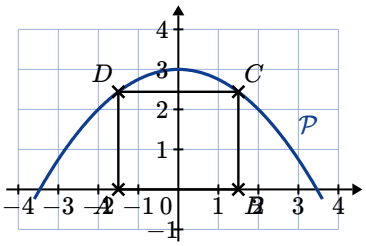
Exercice 5 – La boîte sans couvercle ★★

Dans une feuille de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe un carré de côté x cm à chacun des quatre coins, puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

1. Donne les dimensions de la boîte en fonction de x, et l'intervalle où varie x.
2. Montre que le volume de la boîte est $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
3. Calcule $V'(x)$, factorise-le et étudie son signe sur $]0\,;\,6[$.
4. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Donne ce volume.

Exercice 6 – Le rectangle sous l'arche ★★

Une arche a la forme de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 3 - \dfrac{x^2}{4}$ (unité : le mètre). On y inscrit un rectangle $ABCD$ avec $A(-x\,;\,0)$, $B(x\,;\,0)$, et C, D sur la parabole, pour $x \in \left]0\,;\,2\sqrt{3}\right[$.



1. Exprime AB et BC en fonction de x.
2. Montre que l'aire du rectangle est $A(x) = 6x - \dfrac{1}{2}x^3$.
3. Étudie les variations de A sur $\left]0\,;\,2\sqrt{3}\right[$.
4. Quelle est l'aire maximale ? Donne alors les dimensions du rectangle.

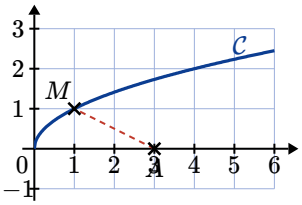
Exercice 7 – Le bénéfice de l'entreprise ★★

Une entreprise fabrique q centaines de lampes, avec $q \in [0\,;\,12]$. Le coût de fabrication, en centaines d'euros, est $C(q) = q^3 - 15q^2 + 80q + 50$. Chaque lampe est vendue 80 €, et toute la production est vendue.

1. Justifie que la recette est $R(q) = 80q$ centaines d'euros, puis que le bénéfice est $B(q) = -q^3 + 15q^2 - 50$.
2. Calcule $B'(q)$ et étudie son signe sur $[0\,;\,12]$.
3. Dresse le tableau de variations de B sur $[0\,;\,12]$.
4. Combien de lampes faut-il fabriquer pour un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, en euros ?

Exercice 8 – La distance minimale ★★★

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe de la fonction racine carrée et A le point de coordonnées $(3\,;\,0)$. Un point M se déplace sur $\mathcal{C}$: $M(x\,;\,\sqrt{x})$, avec $x \geqslant 0$. On cherche la position de M qui rend la distance AM la plus petite possible.



1. Montre que $AM^2 = x^2 - 5x + 9$.
2. Pourquoi suffit-il d'étudier $f(x) = x^2 - 5x + 9$ sur $[0\,;\,+\infty[$?
3. Étudie les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. Conclus : position de M et distance minimale (valeur exacte, puis arrondie au centième).

Exercice 9 – La boîte de conserve ★★★

Une boîte de conserve est un cylindre de rayon r cm et de hauteur h cm. Son volume doit être de 128π cm³ (environ 402 cm³). Pour économiser le métal, on cherche r pour que l'aire totale de métal (deux disques et la paroi) soit minimale.

1. Exprime h en fonction de r.
2. Montre que l'aire totale est $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{256\pi}{r}$, pour $r > 0$.
3. Montre que $S'(r) = \dfrac{4\pi(r-4)(r^2+4r+16)}{r^2}$, puis étudie son signe.
4. Donne les dimensions de la boîte qui utilise le moins de métal, et l'aire de métal correspondante (arrondie au cm²).

Exercice 10 – La clôture du champ ★★★

Un champ rectangulaire de 800 m² longe une route. Le côté qui longe la route reçoit une clôture à 30 € le mètre ; les trois autres côtés, une clôture à 10 € le mètre. On note x la longueur, en mètres, du côté qui longe la route, et y celle des deux côtés perpendiculaires.

1. Exprime y en fonction de x.
2. Montre que le coût de la clôture est $C(x) = 40x + \dfrac{16\,000}{x}$ euros, pour $x > 0$.
3. Étudie les variations de C sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Quelles dimensions rendent le coût minimal ? Quel est ce coût ?

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque conclusion d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) Boîte tirée d'un carré de 18 cm, $V(x) = x(18-2x)^2$: « $V'(x) = 12(x-3)(x-9)$ s'annule en 3 et en 9 : V a deux extremums, $V(3)$ et $V(9)$ ».

b) Enclos contre un mur, 60 m de grillage, $A(x) = x(60-2x)$: « Quelles dimensions donnent l'aire maximale ? Réponse : 450 ».

c) $B(x) = -x^2 + 10x$ sur $[0\,;\,3]$: « $B'(x) = -2x + 10$ s'annule en 5, donc le maximum est $B(5) = 25$ ».

d) Coût moyen en centaines d'euros, $C_M(q) = q + 2 + \dfrac{64}{q}$: « le coût moyen minimal est $C_M(8) = 18$, donc 18 € par tonne ».

e) Distance : « le minimum de AM^2 est $\dfrac{13}{4}$, donc la distance minimale est $\dfrac{13}{4}$ ».

f) $f(x) = x^2 - 10x + 30$ sur $[0\,;\,8]$: « $f'(5) = 0$, donc le maximum de f est $f(5) = 5$ ».

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Un rectangle a pour périmètre 20 cm et pour largeur x cm. Son aire, en cm², est :

   A $x(20-x)$ **B** $x(10-x)$ **C** $x(20-2x)$ **D** $20x$

2. $f(x) = -x^2 + 6x$ sur $[0\,;\,10]$. Le maximum de f est atteint pour :

   A $x = 9$ **B** $x = 6$ **C** $x = 0$ **D** $x = 3$

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = x + \dfrac{9}{x}$ admet un minimum égal à :

   A 6 **B** 3 **C** 9 **D** 0

4. On découpe un carré de côté x à chaque coin d'une feuille carrée de 20 cm de côté, puis on plie. Le volume de la boîte est :

A $x(20-x)^2$ **B** $(20-2x)^2$ **C** $x(20-2x)^2$ **D** $x^2(20-2x)$

5. $AM^2 = x^2 - 4x + 13$. La plus petite distance AM vaut :

A 9 **B** 2 **C** 13 **D** 3

6. Un bénéfice B est défini sur $[0\,;\,5]$, avec $B'(x) = -2(x-7)$. Le bénéfice est maximal pour :

A $x = 5$ **B** $x = 7$ **C** $x = 0$ **D** $x = 2$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).