Corrigé – Problèmes d'optimisation

Mathématiques – Première spécialité

Variations, extremums et courbes · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Le bénéfice de l'atelier ★

1. B est un polynôme : $B'(x) = -2 \times 2x + 120 = -4x + 120$.
   $-4x + 120 = 0$
   $\iff -4x = -120$ *(on retranche* 120*)*
   $\iff x = 30$ *(on divise par* -4*)*
   $S = \{30\}$

   Le coefficient de x est $-4 < 0$: $B'(x)$ est positif avant 30 et négatif après.

x	0		30		60
$-4x + 120$		$+$	0	$-$	

2. $B(30) = -2 \times 30^2 + 120 \times 30 - 1000$
   $= -1800 + 3600 - 1000$
   $= 800$
   $B(0) = -1\,000$ et $B(60) = -7\,200 + 7\,200 - 1\,000 = -1\,000$.

x	0		30		60
B	-1000	↗	800	↘	-1000

3. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, B est croissante sur $[0\,;\,30]$ et décroissante sur $[30\,;\,60]$.
   Le bénéfice est maximal pour 30 gâteaux vendus ; il vaut alors 800 €.

4. On résout $B(x) \geqslant 0$, soit $-2x^2 + 120x - 1\,000 \geqslant 0$.
   On divise par $-2 < 0$ (le sens change) : $x^2 - 60x + 500 \leqslant 0$.
   $\Delta = 60^2 - 4 \times 500 = 3\,600 - 2\,000 = 1\,600 = 40^2$; racines $\dfrac{60 - 40}{2} = 10$ et $\dfrac{60 + 40}{2} = 50$.
   Le trinôme $x^2 - 60x + 500$ est négatif entre ses racines : l'atelier ne perd pas d'argent pour un nombre de gâteaux compris entre 10 et 50.

Exercice 2 – Le niveau du réservoir ★

1. $N'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12)$.
   $t^2 - 8t + 12$ a pour racines 2 et 6 ($2 + 6 = 8$ et $2 \times 6 = 12$) : $N'(t) = 3(t - 2)(t - 6)$.

2.

t	0		2		6		8
3		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$t-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$t-6$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$N'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$N(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 36 \times 2 + 20$
$= 8 - 48 + 72 + 20$
$= 52$
$N(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 36 \times 6 + 20$
$= 216 - 432 + 216 + 20$
$= 20$
$N(8) = 8^3 - 12 \times 8^2 + 36 \times 8 + 20$
$= 512 - 768 + 288 + 20$
$= 52$
$N(0) = 20$.

t	0		2		6		8
N	20	$\nearrow$	52	$\searrow$	20	$\nearrow$	52

3. D'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations, N est décroissante sur $[2\,;\,6]$: le volume baisse de 2 h à 6 h du matin.

4. On compare le maximum local et la valeur à la borne 8 : $N(2) = 52$ et $N(8) = 52$.
Le volume maximal est de 52 hectolitres, atteint à 2 h et à 8 h.
La borne 8 *compte, même si* $N'(8) \neq 0$.

Exercice 3 – Le coût moyen ★

1. On divise chaque terme par q : $C_M(q) = \dfrac{q^2}{q} + \dfrac{4q}{q} + \dfrac{100}{q} = q + 4 + \dfrac{100}{q}$.

2. $C_M'(q) = 1 + 0 - \dfrac{100}{q^2}$ (car $\left(\dfrac{100}{q}\right)' = -\dfrac{100}{q^2}$).
Au même dénominateur : $C_M'(q) = \dfrac{q^2 - 100}{q^2} = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$ (identité $a^2 - b^2$).

3. Sur $]0\,;\,30]$, $q+10>0$ et $q^2>0$: $C'_M(q)$ a le signe de $q-10$.

q	0		10		30
$q-10$		$-$	0	$+$	
$q+10$		$+$	$\vert$	$+$	
q^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$C'_M(q)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned}C_M(10) &= 10+4+\frac{100}{10}\\ &= 10+4+10\\ &= 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_M(30) &= 30+4+\frac{100}{30}\\ &= 34+\frac{10}{3}\\ &= \frac{112}{3}\end{aligned}$$

q	0		10		30
C_M		$\searrow$	24	$\nearrow$	$\frac{112}{3}$

Le coût moyen est minimal pour 10 tonnes : il vaut 24 centaines d'euros, soit 2 400 € par tonne.

4. $C(10) = 10^2+4\times 10+100$
$= 100+40+100$
$= 240$
Le coût total est de 240 centaines d'euros, soit 24 000 €.
Contrôle : $10\times 2\,400 = 24\,000$.

Exercice 4 – L'enclos contre le mur ★★

1. Le grillage fait deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur : celui-ci mesure $40-2x$.
Il faut $x>0$ et $40-2x>0$, soit $x<20$: $x\in\,]0\,;\,20[$.

2. $A(x) = x\,(40-2x)$
$= -2x^2+40x$

3. $A'(x) = 40 - 4x$, qui s'annule en $x = 10$ ($40 = 4x$).
   Le coefficient de x est négatif : A' est positive avant 10, négative après.

x	0		10		20
$40 - 4x$		$+$	0	$-$	
$A'(x)$		$+$	0	$-$	

   $A(10) = 40 \times 10 - 2 \times 10^2$
   $= 400 - 200$
   $= 200$

x	0		10		20
A		$\nearrow$	200	$\searrow$	

4. L'aire est maximale pour $x = 10$: les côtés perpendiculaires au mur mesurent 10 m, le côté parallèle $40 - 20 = 20$ m.
   L'aire maximale est de 200 m².

Exercice 5 – La boîte sans couvercle ★★

1. Le fond est un carré de côté $12 - 2x$ (on enlève x de chaque côté) ; la hauteur est x.
   Il faut $x > 0$ et $12 - 2x > 0$: $x \in \,]0\,;\,6[$.

2. Volume = aire du fond × hauteur = $(12 - 2x)^2 \times x$.
   $V(x) = x\,(12 - 2x)^2$
   $= x\left(144 - 48x + 4x^2\right)$
   $= 4x^3 - 48x^2 + 144x$

3. $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$ (racines 2 et 6).
   Sur $]0\,;\,6[$, $x - 6 < 0$: $V'(x)$ a le signe contraire de $x - 2$.

x	0		2		6
12		$+$	‖	$+$	
$x - 2$		$-$	0	$+$	
$x - 6$		$-$	‖	$-$	0
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0

4. $V(2) = 4 \times 2^3 - 48 \times 2^2 + 144 \times 2$
   $= 32 - 192 + 288$
   $= 128$

x	0		2		6
V		$\nearrow$	128	$\searrow$	

   Le volume est maximal quand on découpe des carrés de 2 cm de côté : la boîte mesure 8 cm × 8 cm × 2 cm, et son volume vaut 128 cm³.

Exercice 6 – Le rectangle sous l'arche ★★

1. A et B ont pour abscisses $-x$ et x : $AB = x - (-x) = 2x$.
   C est le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x : $BC = y_C = 3 - \dfrac{x^2}{4}$.

2. $A(x) = AB \times BC = 2x\left(3 - \dfrac{x^2}{4}\right)$
   $= 2x \times 3 - 2x \times \dfrac{x^2}{4}$
   $= 6x - \dfrac{2x^3}{4}$
   $= 6x - \dfrac{1}{2}x^3$

3. $A'(x) = 6 - \dfrac{3}{2}x^2 = \dfrac{3}{2}(4 - x^2) = \dfrac{3}{2}(2 - x)(2 + x)$.
   Sur l'intervalle, $2 + x > 0$: $A'(x)$ a le signe de $2 - x$.

x	0		2		$2\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}$		$+$	‖	$+$	
$2 - x$		$+$	0	$-$	
$2 + x$		$+$	‖	$+$	
$A'(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		2		$2\sqrt{3}$
A		↗	8	↘	

4. $A(2) = 6 \times 2 - \dfrac{1}{2} \times 2^3$
   $= 12 - 4$
   $= 8$
   L'aire maximale est de 8 m², pour $x = 2$: $AB = 4$ m et $BC = 3 - \dfrac{4}{4} = 2$ m.

Exercice 7 – Le bénéfice de l'entreprise ★★

1. q centaines de lampes à 80 € rapportent $80q$ centaines d'euros : $R(q) = 80q$.
   $B(q) = R(q) - C(q) = 80q - \left(q^3 - 15q^2 + 80q + 50\right)$
   $= 80q - q^3 + 15q^2 - 80q - 50$
   $= -q^3 + 15q^2 - 50$

2. $B'(q) = -3q^2 + 30q = -3q(q - 10)$.

q	0		10		12
$-3q$	0	$-$	‖	$-$	
$q - 10$		$-$	0	$+$	
$B'(q)$	0	$+$	0	$-$	

3. $B(10) = -10^3 + 15 \times 10^2 - 50$
   $= -1000 + 1500 - 50$
   $= 450$
   $B(12) = -12^3 + 15 \times 12^2 - 50$
   $= -1728 + 2160 - 50$
   $= 382$
   $B(0) = -50$.

q	0		10		12
B	-50	↗	450	↘	382

4. Le bénéfice est maximal pour $q = 10$, soit 1 000 lampes.
   Il vaut 450 centaines d'euros, soit 45 000 €.

Exercice 8 – La distance minimale ★★★

1. $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x-3)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2$.
   $AM^2 = (x-3)^2 + x$
   $= x^2 - 6x + 9 + x$
   $= x^2 - 5x + 9$
   On a utilisé $(\sqrt{x})^2 = x$, valable car $x \geqslant 0$.

2. $AM = \sqrt{AM^2} = \sqrt{f(x)}$, et la fonction racine carrée est croissante : AM est la plus petite quand AM^2 est le plus petit.
   On étudie donc f, plus simple à dériver que $\sqrt{f(x)}$.

3. $f'(x) = 2x - 5$, qui s'annule en $\dfrac{5}{2}$; négative avant, positive après.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \dfrac{5}{2} + 9$
   $= \dfrac{25}{4} - \dfrac{50}{4} + \dfrac{36}{4}$
   $= \dfrac{11}{4}$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f	9	↘	$\frac{11}{4}$	↗	

4. Le minimum de AM^2 est $\dfrac{11}{4}$, atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$.
   $M\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$, soit $M\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$.
   Distance minimale : $AM = \sqrt{\dfrac{11}{4}} = \dfrac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$.
   $\dfrac{11}{4}$ *est le carré de la distance : on n'oublie pas la racine.*

Exercice 9 – La boîte de conserve ★★★

1. Volume d'un cylindre : $V = \pi r^2 h$.
   Donc $\pi r^2 h = 128\pi$, d'où $h = \dfrac{128}{r^2}$.

2. Les deux disques : $2 \times \pi r^2$.
   La paroi, déroulée, est un rectangle de côtés $2\pi r$ (le périmètre) et h : $2\pi r h$.
   $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \dfrac{128}{r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{256\pi}{r}$.

3. $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{256\pi}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 256\pi}{r^2} = \dfrac{4\pi(r^3 - 64)}{r^2}$.
   En développant : $(r-4)(r^2+4r+16) = r^3 + 4r^2 + 16r - 4r^2 - 16r - 64 = r^3 - 64$.
   $r^2 + 4r + 16$ a pour discriminant $16 - 64 < 0$: il est toujours positif.
   $4\pi > 0$, $r^2 > 0$: $S'(r)$ a le signe de $r - 4$.

r	0		4		$+\infty$
$r-4$		$-$	0	$+$	
$r^2+4r+16$		$+$	$\vert$	$+$	
r^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$S'(r)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4. S est décroissante sur $]0\,;\,4]$ et croissante sur $[4\,;\,+\infty[$: le minimum est atteint pour $r = 4$.
   $h = \dfrac{128}{4^2} = 8$ cm.
   $S(4) = 2\pi \times 16 + \dfrac{256\pi}{4} = 32\pi + 64\pi = 96\pi \approx 302$ cm².
   La boîte la plus économe a un rayon de 4 cm et une hauteur de 8 cm : sa hauteur est égale à son diamètre.

Exercice 10 – La clôture du champ ★★★

1. L'aire vaut 800 m² : $xy = 800$, donc $y = \dfrac{800}{x}$.

2. Côté de la route : $30x$.
   Côté opposé : $10x$.
   Deux côtés perpendiculaires : $2 \times 10y = 20y$.
   $C = 30x + 10x + 20y = 40x + 20 \times \dfrac{800}{x} = 40x + \dfrac{16\,000}{x}$.

3. $C'(x) = 40 - \dfrac{16\,000}{x^2} = \dfrac{40x^2 - 16\,000}{x^2} = \dfrac{40(x^2 - 400)}{x^2} = \dfrac{40(x-20)(x+20)}{x^2}$.
   Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x + 20 > 0$ et $x^2 > 0$: $C'(x)$ a le signe de $x - 20$.

x	0		20		$+\infty$
40		$+$	$\vert$	$+$	
$x-20$		$-$	0	$+$	
$x+20$		$+$	$\vert$	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$C'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   $C(20) = 40 \times 20 + \dfrac{16\,000}{20}$
   $= 800 + 800$
   $= 1600$

x	0		20		$+\infty$
C		$\searrow$	1600	$\nearrow$	

4. Le coût est minimal pour $x = 20$: le côté le long de la route mesure 20 m et les deux autres $y = \dfrac{800}{20} = 40$ m.
   Le coût minimal est de 1 600 €.

Exercice 11 – Trouve l'erreur ★★

Chaque conclusion d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *x varie dans $]0\,;\,9[$: la valeur 9 n'en fait pas partie.*
Sur $]0\,;\,9[$, $x - 9 < 0$: V' passe de $+$ à $-$ en 3.
Le seul extremum est le maximum $V(3) = 3 \times 12^2 = 432$ cm³. (Pour $x = 9$, il ne reste plus de fond : $V(9) = 0$.)

b) *On demande des dimensions, et 450 est l'aire, sans unité.*
Le maximum est atteint pour $x = 15$: les côtés mesurent 15 m et $60 - 30 = 30$ m ; l'aire maximale est alors de 450 m².

c) *5 n'est pas dans $[0\,;\,3]$.*
Sur $[0\,;\,3]$, $B'(x) = -2x + 10 > 0$: B est croissante.
Le maximum est atteint à la borne : $B(3) = -9 + 30 = 21$.

d) *L'unité de l'énoncé est la centaine d'euros.*
$C_M(8) = 8 + 2 + 8 = 18$ centaines d'euros, soit 1 800 € par tonne.

e) *$\dfrac{13}{4}$ est le carré de la distance.*
$AM = \sqrt{\dfrac{13}{4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80$.

f) *On n'a pas regardé le signe de f' : elle passe de $-$ à $+$ en 5, c'est un minimum.*

Le maximum est à une borne : $f(0) = 30$ et $f(8) = 64 - 80 + 30 = 14$.

Le maximum vaut 30, atteint en $x = 0$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Un rectangle a pour périmètre 20 cm et pour largeur x cm. Son aire, en cm², est :

Réponse B : $x(10 - x)$

Demi-périmètre : 10 cm, donc la longueur vaut $10 - x$, et l'aire $x(10 - x)$.

2. $f(x) = -x^2 + 6x$ sur $[0\,;\,10]$. Le maximum de f est atteint pour :

Réponse D : $x = 3$

$f'(x) = -2x + 6$ s'annule en 3 en passant de $+$ à $-$. ($9 = f(3)$ est la valeur du maximum, pas l'endroit.)

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) = x + \dfrac{9}{x}$ admet un minimum égal à :

Réponse A : 6

$g'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$: minimum en 3, qui vaut $g(3) = 3 + 3 = 6$.

4. On découpe un carré de côté x à chaque coin d'une feuille carrée de 20 cm de côté, puis on plie. Le volume de la boîte est :

Réponse C : $x(20 - 2x)^2$

Fond carré de côté $20 - 2x$, hauteur x.

5. $AM^2 = x^2 - 4x + 13$. La plus petite distance AM vaut :

Réponse D : 3

Minimum de AM^2 en $x = 2$: $4 - 8 + 13 = 9$. Donc $AM = \sqrt{9} = 3$.

6. Un bénéfice B est défini sur $[0\,;\,5]$, avec $B'(x) = -2(x - 7)$. Le bénéfice est maximal pour :

Réponse A : $x = 5$

Sur $[0\,;\,5]$, $x - 7 < 0$, donc $B'(x) > 0$: B est croissante, son maximum est à la borne 5. La valeur 7 est hors de l'intervalle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).