Corrigé – Nombres premiers, décomposition

Mathématiques – Troisième

Arithmétique · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Critères de divisibilité ★

Parmi 2, 3, 4, 5, 9 et 10, par quels nombres ce nombre est-il divisible ? Justifie avec les critères.

a) Chiffre des unités 0 : pair, donc divisible par 2.
Il finit par 0 : divisible par 5 et par 10.
Deux derniers chiffres : 40, et $40 = 4 \times 10$: divisible par 4.
Somme des chiffres : $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, multiple de 9 : divisible par 3 et par 9.
2 340 **est divisible par 2, 3, 4, 5, 9 et 10.**

b) Chiffre des unités 5 : impair, donc pas divisible par 2 (ni par 4, ni par 10).
Il finit par 5 : divisible par 5, pas par 10.
Somme des chiffres : $1 + 0 + 3 + 5 = 9$, multiple de 9 : divisible par 3 et par 9.
1 035 **est divisible par 3, 5 et 9.**

c) Chiffre des unités 8 : pair, donc divisible par 2.
Il ne finit ni par 0 ni par 5 : ni par 5 ni par 10.
Deux derniers chiffres : 28, et $28 = 4 \times 7$: divisible par 4.
Somme des chiffres : $7 + 1 + 2 + 8 = 18$, multiple de 9 : divisible par 3 et par 9.
7 128 **est divisible par 2, 3, 4 et 9.**

d) Chiffre des unités 6 : pair, donc divisible par 2.
Il ne finit ni par 0 ni par 5 : ni par 5 ni par 10.
Deux derniers chiffres : 06, qui n'est pas un multiple de 4 : pas divisible par 4.
Somme des chiffres : $4 + 5 + 0 + 6 = 15$, multiple de 3 mais pas de 9 : divisible par 3, pas par 9.
4 506 **est divisible par 2 et 3.**

e) Chiffre des unités 5 : impair, donc pas divisible par 2 (ni par 4, ni par 10).
Il finit par 5 : divisible par 5, pas par 10.
Somme des chiffres : $8 + 1 + 5 = 14$, pas un multiple de 3 : ni par 3 ni par 9.
815 **est divisible par 5.**

f) Chiffre des unités 8 : pair, donc divisible par 2.
Il ne finit ni par 0 ni par 5 : ni par 5 ni par 10.
Deux derniers chiffres : 58, qui n'est pas un multiple de 4 : pas divisible par 4.
Somme des chiffres : $1 + 2 + 5 + 8 = 16$, pas un multiple de 3 : ni par 3 ni par 9.
1 258 **est divisible par 2.**

g) Chiffre des unités 1 : impair, donc pas divisible par 2 (ni par 4, ni par 10).
Il ne finit ni par 0 ni par 5 : ni par 5 ni par 10.
Somme des chiffres : $6 + 1 + 1 + 1 = 9$, multiple de 9 : divisible par 3 et par 9.
6 111 **est divisible par 3 et 9.**

h) Chiffre des unités 0 : pair, donc divisible par 2.
Il finit par 0 : divisible par 5 et par 10.
Deux derniers chiffres : 60, et $60 = 4 \times 15$: divisible par 4.
Somme des chiffres : $2 + 4 + 0 + 6 + 0 = 12$, multiple de 3 mais pas de 9 : divisible par 3, pas par 9.
24 060 **est divisible par 2, 3, 4, 5 et 10.**

Exercice 2 – Premier ou pas ? ★

Ce nombre est-il premier ? Justifie : essaie les divisions par 2, 3, 5, 7, 11… et arrête-toi quand le carré du diviseur dépasse le nombre.

a) 1 n'a qu'un seul diviseur, lui-même.
Un nombre premier en a exactement deux : 1 **n'est pas premier.**

b) 2 a exactement deux diviseurs : 1 et 2.
2 **est premier** (c'est le seul nombre premier pair).

c) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : non ($4 + 7 = 11$ n'est pas un multiple de 3).
Par 5 : non (il ne finit ni par 0 ni par 5).
$7 \times 7 = 49$ dépasse 47 : on peut s'arrêter.
47 **est premier.**

d) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : oui ($5 + 1 = 6$ est un multiple de 3), $51 = 3 \times 17$.
51 **n'est pas premier.**

e) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : non ($9 + 1 = 10$ n'est pas un multiple de 3).
Par 5 : non (il ne finit ni par 0 ni par 5).
Par 7 : oui, $91 = 7 \times 13$.
91 **n'est pas premier.**

f) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : non ($1 + 1 + 3 = 5$ n'est pas un multiple de 3).
Par 5 : non (il ne finit ni par 0 ni par 5).
Par 7 : non ($113 = 7 \times 16 + 1$).
$11 \times 11 = 121$ dépasse 113 : on peut s'arrêter.
113 **est premier.**

g) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : non ($1 + 1 + 9 = 11$ n'est pas un multiple de 3).
Par 5 : non (il ne finit ni par 0 ni par 5).
Par 7 : oui, $119 = 7 \times 17$.
119 **n'est pas premier.**

h) Par 2 : non (il est impair).
Par 3 : non ($1+6+9=16$ n'est pas un multiple de 3).
Par 5 : non (il ne finit ni par 0 ni par 5).
Par 7 : non ($169 = 7 \times 24 + 1$).
Par 11 : non ($169 = 11 \times 15 + 4$).
Par 13 : oui, $169 = 13 \times 13$.
169 **n'est pas premier.**

Exercice 3 – Décomposer en facteurs premiers ★

Décompose en produit de facteurs premiers : divise par le plus petit nombre premier possible, puis regroupe avec des exposants.

a) 72
$= 2 \times 36$
$= 2^2 \times 18$
$= 2^3 \times 9$
$= 2^3 \times 3 \times 3$
$= 2^3 \times 3^2$

b) 90
$= 2 \times 45$
$= 2 \times 3 \times 15$
$= 2 \times 3^2 \times 5$

c) 126
$= 2 \times 63$
$= 2 \times 3 \times 21$
$= 2 \times 3^2 \times 7$

d) 196
$= 2 \times 98$
$= 2^2 \times 49$
$= 2^2 \times 7 \times 7$
$= 2^2 \times 7^2$

e) 250
$= 2 \times 125$
$= 2 \times 5 \times 25$
$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 2 \times 5^3$

f) 315
$= 3 \times 105$
$= 3^2 \times 35$
$= 3^2 \times 5 \times 7$

g) 616
$= 2 \times 308$
$= 2^2 \times 154$
$= 2^3 \times 77$
$= 2^3 \times 7 \times 11$

h) $1\,001$
$= 7 \times 143$
$= 7 \times 11 \times 13$

Exercice 4 – La liste des diviseurs ★★

Écris la liste de tous les diviseurs de ce nombre. Range-les dans l'ordre croissant.

a) On cherche les produits de deux entiers égaux à 48 :
$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$.
L'entier 5 ne divise pas 48.
On s'arrête à 6 : $7 \times 7 = 49$ dépasse 48.
Diviseurs de 48 **:** 1 **;** 2 **;** 3 **;** 4 **;** 6 **;** 8 **;** 12 **;** 16 **;** 24 **;** 48 (10 diviseurs).

b) On cherche les produits de deux entiers égaux à 63 :
$63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$.
Les entiers 2, 4, 5 et 6 ne divisent pas 63.
On s'arrête à 7 : $8 \times 8 = 64$ dépasse 63.
Diviseurs de 63 **:** 1 **;** 3 **;** 7 **;** 9 **;** 21 **;** 63 (6 diviseurs).

c) On cherche les produits de deux entiers égaux à 81 :
$81 = 1 \times 81 = 3 \times 27 = 9 \times 9$.
Les entiers 2, 4, 5, 6, 7 et 8 ne divisent pas 81.
On s'arrête à 9 : $10 \times 10 = 100$ dépasse 81.
9×9 ne donne qu'un seul diviseur, 9.
Diviseurs de 81 **:** 1 **;** 3 **;** 9 **;** 27 **;** 81 (5 diviseurs).

d) On cherche les produits de deux entiers égaux à 100 :
$100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$.
Les entiers 3, 6, 7, 8 et 9 ne divisent pas 100.
On s'arrête à 10 : $11 \times 11 = 121$ dépasse 100.
10×10 ne donne qu'un seul diviseur, 10.
Diviseurs de 100 **:** 1 **;** 2 **;** 4 **;** 5 **;** 10 **;** 20 **;** 25 **;** 50 **;** 100 (9 diviseurs).

e) On cherche les produits de deux entiers égaux à 120 :
$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15 = 10 \times 12$.
Les entiers 7 et 9 ne divisent pas 120.
On s'arrête à 10 : $11 \times 11 = 121$ dépasse 120.
Diviseurs de 120 **:** 1 **;** 2 **;** 3 **;** 4 **;** 5 **;** 6 **;** 8 **;** 10 **;** 12 **;** 15 **;** 20 **;** 24 **;** 30 **;** 40 **;** 60 **;** 120 (16 diviseurs).

Exercice 5 – Décompositions plus longues ★★

Décompose en produit de facteurs premiers. *Un produit donné n'est pas forcément décomposé : vérifie que chaque*

facteur est premier.

a) $1\,540$
$= 2 \times 770$
$= 2^2 \times 385$
$= 2^2 \times 5 \times 77$
$= 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$

b) $2\,016$
$= 2 \times 1\,008$
$= 2^2 \times 504$
$= 2^3 \times 252$
$= 2^4 \times 126$
$= 2^5 \times 63$
$= 2^5 \times 3 \times 21$
$= 2^5 \times 3^2 \times 7$

c) $3\,375$
$= 3 \times 1\,125$
$= 3^2 \times 375$
$= 3^3 \times 125$
$= 3^3 \times 5 \times 25$
$= 3^3 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 3^3 \times 5^3$

d) 18×35
$= (2 \times 9) \times (5 \times 7)$
$= \left(2 \times 3^2\right) \times (5 \times 7)$
$= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

e) $14^2 \times 5$
$= (2 \times 7)^2 \times 5$
$= 2^2 \times 7^2 \times 5$
$= 2^2 \times 5 \times 7^2$

Exercice 6 – Lire une décomposition ★★

On donne $A = 2^3 \times 3 \times 7$. **Sans calculer** A, dis si A est divisible par le nombre proposé. Justifie.

a) $6 = 2 \times 3$: ces facteurs sont tous dans A.
$A = (2 \times 3) \times 2^2 \times 7$, donc A **est divisible par** 6**.**

b) $9 = 3^2$: il faut deux facteurs 3, et A n'en a qu'un.
A **n'est pas divisible par** 9**.**

c) $14 = 2 \times 7$: ces facteurs sont tous dans A.
$A = (2 \times 7) \times 2^2 \times 3$, donc A **est divisible par** 14**.**

d) $16 = 2^4$: il faut quatre facteurs 2, et A n'en a que trois.
A **n'est pas divisible par** 16**.**

e) $28 = 2^2 \times 7$: ces facteurs sont tous dans A.
$A = (2^2 \times 7) \times 2 \times 3$, donc A **est divisible par** 28**.**

f) $35 = 5 \times 7$: le facteur 5 n'est pas dans la décomposition de A.
A **n'est pas divisible par** 35**.**

Exercice 7 – Le nombre 1 386 ★★★

1. On divise par le plus petit nombre premier possible.
   $1\,386$
   $= 2 \times 693$
   $= 2 \times 3 \times 231$
   $= 2 \times 3^2 \times 77$
   $= 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$

2. $27 = 3^3$: il faut trois facteurs 3, et $1\,386$ n'en a que deux.
   $1\,386$ **n'est pas divisible par** 27**.**
   $22 = 2 \times 11$: ces deux facteurs sont dans la décomposition.
   $1\,386 = (2 \times 11) \times (3^2 \times 7) = 22 \times 63$: $1\,386$ **est divisible par** 22**.**

3. Dans la décomposition d'un carré, chaque facteur premier a un exposant pair.
   $1\,386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$: les exposants de 2, 7 et 11 sont impairs (égaux à 1).
   Il faut un facteur 2, un facteur 7 et un facteur 11 de plus : $k = 2 \times 7 \times 11 = 154$.
   Vérification : $1\,386 \times 154 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2 = (2 \times 3 \times 7 \times 11)^2 = 462^2$.
   Le plus petit entier est $k = 154$**.**

Exercice 8 – Vrai ou faux ? ★★★

1. $2 + 0 + 2 + 3 = 7$: pas divisible par 3 ; il n'est ni pair, ni terminé par 0 ou 5.
   Par 7 : $2\,023 = 7 \times 289$, et $289 = 17 \times 17$.
   $2\,023 = 7 \times 17^2$: **l'affirmation est fausse.**

2. Contre-exemple : 2 et 3 sont premiers et $2 + 3 = 5$ est impair.
   L'affirmation est fausse (elle ne marche qu'avec deux nombres premiers impairs).

3. Contre-exemple : $36 = 4 \times 9$ et $36 = 6 \times 6$, mais $36 = 24 \times 1 + 12$: 36 n'est pas divisible par 24.
   L'affirmation est fausse : $4 = 2^2$ et $6 = 2 \times 3$ ont le facteur 2 en commun, on ne peut pas multiplier 4 par 6.

4. Si n est divisible par 9, on peut écrire $n = 9 \times k$ avec k entier.
   Alors $n = 3 \times 3 \times k = 3 \times (3k)$, et $3k$ est un entier.
   L'affirmation est vraie.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Un nombre premier a exactement deux diviseurs différents.*

1 n'a qu'un seul diviseur : 1 **n'est pas premier.**

b) *Impair ne veut pas dire premier : il faut essayer* 3*,* 7*,* 11*…*
$1+3+3=7$: pas par 3.
Par 7 : $133=7\times19$.
133 **n'est pas premier.**

c) *Divisible par* 3 *ne veut pas dire divisible par* 9*.*
$2+1+1+2=6$: multiple de 3 mais pas de 9.
$2\,112$ **est divisible par** 3**, pas par** 9**.**

d) *Pour* 4*, on regarde les deux derniers chiffres.*
$30=4\times7+2$ n'est pas un multiple de 4.
$1\,330$ **est divisible par** 2**, pas par** 4**.**

e) *Le facteur* 3 *apparaît deux fois :* $2^2\times3\times7=84$*, pas* 252*.*

$$\begin{aligned}&252\\&=2\times126\\&=2^2\times63\\&=2^2\times3\times21\\&=2^2\times3^2\times7\end{aligned}$$

f) *On oublie souvent* 1 *et le nombre lui-même.*
$45=1\times45=3\times15=5\times9$.
Diviseurs de 45 **:** 1 **;** 3 **;** 5 **;** 9 **;** 15 **;** 45**.**

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Lequel de ces nombres est premier ?

Réponse C : 59
59 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, et $11\times11=121$ dépasse 59. ($39=3\times13$, $49=7\times7$, et 1 n'est pas premier.)

2. La décomposition de 600 en produit de facteurs premiers est :

Réponse A : $2^3\times3\times5^2$
$600=2^3\times75=2^3\times3\times5^2$: 75 et 6×10^2 ne sont pas des produits de nombres premiers, et $2^2\times3\times5^2=300$.

3. Lequel de ces nombres est divisible par 9 ?

Réponse D : $4\,743$
$4+7+4+3=18$, multiple de 9. Pour $3\,513$ la somme vaut 12 (multiple de 3 seulement).

4. Combien de diviseurs le nombre 28 a-t-il ?

Réponse B : 6
$28=1\times28=2\times14=4\times7$: 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28.

5. $N=2^2\times3^3\times5$. N est divisible par :

Réponse D : 36
$36=2^2\times3^2$, et ces facteurs sont dans N. Pour $8=2^3$, il manque un facteur 2.

6. Pour savoir si 157 est premier, on essaie les nombres premiers jusqu'à :

Réponse A : 11

$11 \times 11 = 121$ est inférieur à 157, mais $13 \times 13 = 169$ le dépasse : on s'arrête après 11 (et 157 est premier).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).