48 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Forme algébrique : calculer, partie réelle et imaginaire

À retenir : Je développe, je remplace i^2 par -1, je regroupe. i^n ne dépend que du reste de la division de n par 4. $\mathrm{Im}(2-9\mathrm{i}) = -9$, sans le i. On ne compare pas deux complexes : « $z^2 \geqslant 0$ » n'a pas de sens.

Ex. 1 ★☆☆ **Développer et lire les parties** — Écris chaque nombre sous forme algébrique, puis donne sa partie réelle et sa partie imaginaire.

(a) $(2-5\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$

(b) $(5-3\mathrm{i})^2$

(c) $\mathrm{i}(4-7\mathrm{i})$

(d) $(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$

(e) $(2+\mathrm{i})^3$

Ex. 2 ★☆☆ **Puissances de i** — Écris chaque nombre sous forme algébrique en utilisant le reste de la division de l'exposant par 4.

(a) i^{2026}

(b) i^{47}

(c) i^{4n+3}, où n est un entier naturel

(d) $\mathrm{i}^{13} + \mathrm{i}^{14}$

(e) $(-\mathrm{i})^7$

(f) $S = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \cdots + \mathrm{i}^{11}$

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Léa** — Léa écrit : « $(3-2\mathrm{i})^2 = 9 - 12\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 = 13 - 12\mathrm{i}$, donc $\mathrm{Im}\left((3-2\mathrm{i})^2\right) = -12\mathrm{i}$. Et l'équation $z^2 = -36$ n'a aucune solution dans $\mathbb{C}$, car $z^2 \geqslant 0$. »

(a) Repère les deux erreurs de la première phrase, puis donne la bonne forme algébrique de $(3-2\mathrm{i})^2$ et sa partie imaginaire.

(b) Explique pourquoi l'argument « $z^2 \geqslant 0$ » n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$. Appuie-toi sur un exemple.

(c) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. Écris z^2 sous forme algébrique, puis résous $z^2 = -36$ par identification.

Ex. 4 ★★☆ **Binôme de Newton dans $\mathbb{C}$** — On s'intéresse aux puissances du nombre complexe $1-\mathrm{i}$.

(a) Développe $(1-\mathrm{i})^5$ avec la formule du binôme de Newton et écris le résultat sous forme algébrique.

(b) Calcule $(1-\mathrm{i})^2$, puis $(1-\mathrm{i})^4$, sous forme algébrique. Retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

Ex. 4 (suite)

(c) Déduis-en la forme algébrique de $(1-\mathrm{i})^{20}$, puis celle de $(1-\mathrm{i})^{22}$.

Ex. 5 ★★☆ **Réel ou imaginaire pur selon m** — Pour tout réel m, on pose $z = (m+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$.

(a) Écris z sous forme algébrique en fonction de m.

(b) Détermine le réel m pour lequel z est un réel, puis donne la valeur de z.

(c) Détermine le réel m pour lequel z est un imaginaire pur, puis donne la valeur de z.

(d) Existe-t-il un réel m tel que $z = 0$? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Quand z^2 est-il réel ?** — Soit z un nombre complexe. On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

(a) Exprime $\mathrm{Re}(z^2)$ et $\mathrm{Im}(z^2)$ en fonction de x et y.

(b) Déduis-en tous les nombres complexes z tels que z^2 soit réel. Justifie.

(c) Déduis-en tous les nombres complexes z tels que z^2 soit un réel strictement négatif.

(d) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \overline{z}$ en identifiant les parties réelles et imaginaires.

Ex. 7 ★★★ **Une somme de coefficients binomiaux** — On pose $S = \binom{2030}{0} - \binom{2030}{2} + \binom{2030}{4} - \cdots + (-1)^p\binom{2030}{2p} + \cdots - \binom{2030}{2030}$ et $T = \binom{2030}{1} - \binom{2030}{3} + \cdots + (-1)^p\binom{2030}{2p+1} + \cdots + \binom{2030}{2029}$.

(a) Écris $(1+\mathrm{i})^2$ puis $(1+\mathrm{i})^4$ sous forme algébrique.

(b) Déduis-en la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{2030}$, puis sa partie réelle et sa partie imaginaire.

(c) Déduis-en la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{2031}$.

(d) En développant $(1+\mathrm{i})^{2030}$ par le binôme, justifie que $\mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^{2030}\right) = S$ et $\mathrm{Im}\left((1+\mathrm{i})^{2030}\right) = T$.

(e) Déduis-en les valeurs de S et de T.

Ex. 8 ★★★ **Une suite de nombres complexes** — On définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \mathrm{i}z_n + 1$. On note $u_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

(a) Calcule z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique.

(b) Déduis-en z_{2031}, puis donne $\mathrm{Re}(z_{2031})$ et $\mathrm{Im}(z_{2031})$.

(c) Exprime u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

(d) Détermine, en posant $\ell = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels, le complexe ℓ tel que $\ell = \mathrm{i}\ell + 1$.

Ex. 8 **(suite)**

(e) Nadia affirme : « La somme $z_1 + z_2 + \cdots + z_{2032}$ est un nombre réel. » Vrai ou faux ? Justifie.

2. *Conjugué : propriétés, réel ou imaginaire pur*

À retenir : Je conjugue chaque nombre, i compris : $\overline{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\overline{z}$ et $\overline{3\mathrm{i} - 2} = -2 - 3\mathrm{i}$. z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$. $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geqslant 0$. Équation en z et $\overline{z}$: je pose $z = x + \mathrm{i}y$.

Ex. 9 ★☆☆ **Calculer des conjugués** — Donne la forme algébrique de chaque nombre.

(a) $\overline{4\mathrm{i} - 7}$

(b) $\overline{(1 + 2\mathrm{i})(3 - \mathrm{i})}$

(c) $\overline{\mathrm{i}(5 - 2\mathrm{i})}$

(d) $z\overline{z}$ pour $z = 6 - \mathrm{i}$

(e) $\overline{z} + 2z$ pour $z = 1 + 4\mathrm{i}$

(f) $\overline{\left(\dfrac{2 + \mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}}\right)}$

Ex. 10 ★☆☆ **Réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre** — Donne la forme algébrique de chaque nombre, puis précise s'il est réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

(a) i^7

(b) $(3 + \mathrm{i})^2 - (3 - \mathrm{i})^2$

(c) $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

(d) $\mathrm{i}(4 + \mathrm{i}) - \mathrm{i}(4 - \mathrm{i})$

(e) $(1 + 2\mathrm{i})^2$

Ex. 11 ★★☆ **Conclure sans développer** — Dans cet exercice, pour conclure, tu calcules le conjugué de chaque nombre, sans chercher d'abord sa forme algébrique.

(a) Démontre que $A = (4 + \mathrm{i})^7 - (4 - \mathrm{i})^7$ est imaginaire pur.

(b) Démontre que $B = \frac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} + \frac{2-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$ est réel, puis calcule B.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontre que $C = z\overline{z} + \mathrm{i}(z - \overline{z})$ est réel.

(d) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $D = z^2 - \overline{z}^2$. D est-il réel ou imaginaire pur ? Justifie.

Ex. 12 ★★☆ **Équations en z et en son conjugué** — Résous dans $\mathbb{C}$ chaque équation. Pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, puis identifie les parties réelles et imaginaires.

(a) $2z - \overline{z} = 4 - 9\mathrm{i}$

(b) $z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 5 + 4\mathrm{i}$

(c) $z\overline{z} + 2\overline{z} = 12 - 6\mathrm{i}$

Ex. 13 ★★☆ **Vrai ou faux sur le conjugué** — Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie par une démonstration ou un contre-exemple.

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(2 + \mathrm{i})z} = (2 + \mathrm{i})\,\overline{z}$.

(b) Si $z\overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

Ex. 13 **(suite)**

(c) Si $z + \overline{z} = 0$ et $z \neq 0$, alors z^2 est un réel strictement négatif.

(d) Pour tout $z \neq 0$, $\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$ est réel.

(e) Si z^2 est réel, alors z est réel.

Ex. 14 ★★★ **Un quotient imaginaire pur** — Soit z un nombre complexe tel que $z\overline{z} = 1$ et $z \neq -1$. On pose $Z = \frac{z-1}{z+1}$.

(a) Justifie que $z \neq 0$, puis exprime $\overline{z}$ en fonction de z.

(b) Exprime $\overline{Z}$ à l'aide de $\overline{z}$, puis démontre que $\overline{Z} = -Z$. Déduis-en la nature de Z.

(c) Application : on prend $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$. Vérifie que $z\overline{z} = 1$, puis donne la forme algébrique de Z.

(d) Réciproque : soit $z \neq -1$ tel que Z est imaginaire pur. Démontre que $z\overline{z} = 1$.

Ex. 15 ★★★ **L'erreur d'Inès, puis un système** — Inès résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} + 2z = 9 - 2\mathrm{i}$. Elle écrit : « $\overline{z} + 2z = 3z$, donc $3z = 9 - 2\mathrm{i}$ et $z = 3 - \frac{2}{3}\mathrm{i}$ ».

(a) Calcule $\overline{z} + 2z$ pour la valeur trouvée par Inès. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Résous correctement l'équation. Pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

(c) Ben affirme que l'équation $z + \overline{z} = 4\mathrm{i}$ n'a aucune solution dans $\mathbb{C}$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Détermine tous les complexes z tels que $z\overline{z} = 25$ et $z - \overline{z} = 8\mathrm{i}$.

Ex. 16 ★★★ **Racines conjuguées d'un polynôme réel** — Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 + 13z - 34$.

(a) Démontre que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. Cite les propriétés du conjugué utilisées.

(b) Vérifie que $4\mathrm{i} - 1$ est une racine de P.

(c) Déduis-en, sans calcul de P, une autre racine non réelle de P. Donne-la sous forme algébrique.

(d) Calcule la somme et le produit de ces deux racines. Déduis-en un trinôme Q à coefficients réels qui s'annule en ces deux racines.

(e) Détermine le réel r tel que $P(z) = (z - r)Q(z)$ pour tout z, puis résous $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

3. *Inverse, quotient et équations du premier degré*

À retenir : Quotient : je multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur : $\frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, et $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$. Avec $\overline{z}$: je pose $z = x + \mathrm{i}y$ et j'identifie, sans isoler z.

Ex. 17 ★☆☆ **Inverses sous forme algébrique** — Écris chaque inverse sous forme algébrique $a+b\mathrm{i}$.

(a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}^3}$ (b) $\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{1}{(2-\mathrm{i})^2}$

(d) $\dfrac{1}{-1+2\mathrm{i}}$ (e) $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}$

Ex. 18 ★☆☆ **Quotients sous forme algébrique** — Écris chaque quotient sous forme algébrique $a+b\mathrm{i}$, sans i au dénominateur.

(a) $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{4-\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

(d) $\dfrac{6+7\mathrm{i}}{\overline{2+\mathrm{i}}}$

Ex. 19 ★☆☆ **Équations du premier degré en z** — Résous chaque équation dans $\mathbb{C}$. Donne la solution sous forme algébrique.

(a) $(3-\mathrm{i})z = 5+5\mathrm{i}$

(b) $\mathrm{i}z = 4+5\mathrm{i}$

(c) $(3+2\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 2+3\mathrm{i}$

(d) $3z - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 4$

Ex. 20 ★★☆ **L'erreur de Malo** — Pour écrire $\frac{6+8\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}$ sous forme algébrique, Malo divise la partie réelle par la partie réelle et la partie imaginaire par la partie imaginaire. Il trouve $3+2\mathrm{i}$.

(a) Calcule $(2+4\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$. Malo a-t-il raison ? Justifie.

(b) Écris $\frac{6+8\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}$ sous forme algébrique correcte.

(c) Détermine le réel a tel que $\frac{a+8\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}$ soit un nombre réel. Donne ce réel.

(d) Pour cette valeur de a, quel résultat la méthode de Malo donne-t-elle ? Conclus.

Ex. 21 ★★☆ **Une équation avec z et son conjugué** — On cherche les complexes z tels que $2z + \mathrm{i}\,\overline{z} = 3+3\mathrm{i}$. On pose $z = x+\mathrm{i}y$, avec x et y réels.

(a) Écris $2z+\mathrm{i}\,\overline{z}$ sous forme algébrique, en fonction de x et y.

(b) Déduis-en un système de deux équations réelles, puis résous l'équation.

(c) Sacha remplace $\overline{z}$ par z et écrit $(2+\mathrm{i})z = 3+3\mathrm{i}$. Calcule la valeur de z qu'il obtient.

(d) Cette valeur est-elle solution de l'équation de départ ? Justifie.

Ex. 22 ★★★ **Une équation avec un paramètre réel** — Soit m un nombre réel. On étudie l'équation (E_m) : $z + m\overline{z} = 2+4\mathrm{i}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(a) On pose $z = x+\mathrm{i}y$, avec x et y réels. Écris $z+m\overline{z}$ sous forme algébrique, en fonction de x, y et m.

(b) Vrai ou faux : pour une certaine valeur de m, (E_m) a une solution réelle. Justifie.

Ex. 22 (suite)

(c) Démontre que (E_1) et (E_{-1}) n'ont aucune solution dans $\mathbb{C}$.

(d) On suppose $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Résous (E_m) et donne la solution sous forme algébrique, en fonction de m.

(e) Déduis-en la valeur de m pour laquelle la solution de (E_m) a une partie réelle égale à sa partie imaginaire. Donne cette solution.

Ex. 23 ★★★ **Un quotient, sa valeur interdite et ses équations** — On considère le quotient $Q = \frac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$, où z est un nombre complexe.

(a) Pour quelle valeur de z le quotient Q n'est-il pas défini ? Justifie.

(b) Calcule Q pour $z = \mathrm{i}$. Donne le résultat sous forme algébrique.

(c) Démontre que l'équation $Q = 1+\mathrm{i}$ se ramène à une équation de la forme $az = b$, puis résous-la dans $\mathbb{C}$.

(d) Vrai ou faux : pour tout complexe w, l'équation $Q = w$ a au moins une solution. Justifie.

Ex. 24 ★★★ **Un système de deux équations dans $\mathbb{C}$** — Hugo doit trouver deux nombres complexes z et w tels que $z+w = 4+2\mathrm{i}$ et $z - \mathrm{i}w = 1$.

(a) Élimine z entre les deux équations. Déduis-en que w est solution d'une équation de la forme $aw = b$, en précisant les complexes a et b.

(b) Résous cette équation et donne w sous forme algébrique.

(c) Déduis-en z sous forme algébrique, puis vérifie que le couple trouvé satisfait la seconde équation.

(d) Ben remplace la seconde équation par $z - \mathrm{i}\,\overline{w} = 1$, la première restant la même. En posant $w = x+\mathrm{i}y$, démontre que ce nouveau système n'a aucune solution.

4. *Module*

À retenir : $|a+b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $|z|^2 = z\overline{z}$. Pour un produit, un quotient ou une puissance, on calcule le module de chaque morceau : $|(1+\mathrm{i})^4| = (\sqrt{2})^4 = 4$. Jamais sur une somme : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Ex. 25 ★☆☆ **Modules à la chaîne** — Calcule le module de chaque nombre complexe.

(a) $z_1 = 5-12\mathrm{i}$ (b) $z_2 = -7$

(c) $z_3 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (d) $z_4 = -8\mathrm{i}$

(e) $z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (f) $z_6 = \overline{-15+8\mathrm{i}}$

Ex. 26 ★☆☆ **Découper avant de calculer** — Sans développer, calcule le module de chaque nombre complexe.

(a) $A = (1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$

(b) $B = \dfrac{6+8\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}}$

(c) $C = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5$

(d) $D = (2+\mathrm{i})^4$

(e) $E = (-3+\mathrm{i})^2(1-2\mathrm{i})$

(f) $F = \dfrac{(5+5\mathrm{i})^3}{1+7\mathrm{i}}$

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur de Léo** — On pose $z = 24-7\mathrm{i}$ et $z' = 4\mathrm{i}$. Léo écrit : « $|z| = 24-7 = 17$, donc $|z+z'| = |z| + |z'| = 17+4 = 21$. »

(a) Explique l'erreur de Léo dans le calcul de $|z|$, puis calcule $|z|$ correctement.

(b) Écris $z+z'$ sous forme algébrique, puis calcule $|z+z'|$.

(c) Compare $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$. Quelle autre erreur Léo a-t-il commise ? Justifie.

Ex. 28 ★★☆ **Vrai ou faux sur le module** — Vrai ou faux ? Justifie par une démonstration ou par un contre-exemple.

(a) Pour tout complexe z, $|z|^2 = z^2$.

(b) Pour tout complexe z, $|z^2| = |z|^2$.

(c) Pour tout complexe z, $|-\overline{z}| = |z|$.

(d) Pour tous complexes z et z', $|z-z'| = |z| - |z'|$.

Ex. 29 ★★☆ **Un quotient de module 1** — On pose $z = \dfrac{2+5\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$.

(a) Sans calculer la forme algébrique de z, démontre que $|z| = 1$.

(b) Déduis de la question 1 la valeur de $z\overline{z}$, sans calculer la forme algébrique de z.

(c) Écris z sous forme algébrique.

(d) Déduis-en, sans nouvelle division, la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$, puis donne $|z^{2027}|$.

Ex. 30 ★★★ **Module 1 et quotient imaginaire pur** — Soit z un nombre complexe différent de 1. On pose $w = \dfrac{1+z}{1-z}$.

(a) On suppose $|z| = 1$. Démontre que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

(b) On suppose toujours $|z| = 1$. Exprime $\overline{w}$ à l'aide de $\overline{z}$, puis démontre que $\overline{w} = -w$. Déduis-en que w est imaginaire pur.

(c) Application : $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$. Vérifie que $|z| = 1$, puis calcule w sous forme algébrique.

(d) Réciproque : on suppose seulement que $w = t\mathrm{i}$ avec t réel. Exprime z en fonction de w, puis démontre que $|z| = 1$.

Ex. 31 ★★★ **Démontrer l'inégalité triangulaire** — Dans cet exercice, z et z' sont deux nombres complexes quelconques. On rappelle que $|w|^2 = w\overline{w}$ pour tout complexe w.

(a) Démontre que $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

(b) Soit $w = a+b\mathrm{i}$ avec a et b réels. Justifie que $\mathrm{Re}(w) \leqslant |w|$.

(c) Déduis des questions précédentes que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

(d) Démontre que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

(e) Application : $z = -4$ et $z' = 3-2\mathrm{i}$. Compare $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$, puis déduis $|z-z'|$ de la question 4.

Ex. 32 ★★★ **Une suite de puissances** — On pose $q = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = q^n$.

(a) Calcule la forme algébrique de q. Calcule ensuite $|q|$ de deux façons : avec cette forme algébrique, puis avec le module d'un quotient.

(b) Exprime $|u_n|$ en fonction de n. Justifie la propriété utilisée.

(c) Détermine le plus petit entier n tel que $|u_n| > 1000$.

(d) Sans calculer u_3, détermine la valeur de $u_3 \times \overline{u_3}$.

(e) Détermine tous les réels x tels que $|(x-2\mathrm{i}) \times u_4| = 12$.

5. *Second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$*

À retenir : Coefficients réels, $\Delta < 0$: $\Delta = (\mathrm{i}\sqrt{-\Delta})^2$ et $z = \dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (conjuguées, $2a$ divise tout). Contrôle : somme $-\dfrac{b}{a}$, produit $\dfrac{c}{a}$. Ex. : $z^2+2z+2=0$ donne $z = -1 \pm \mathrm{i}$.

Ex. 33 ★☆☆ **Résoudre selon le signe de Δ** — Résous dans $\mathbb{C}$ chaque équation. Donne les solutions sous forme algébrique.

(a) Calcule le discriminant de $z^2-2z+26$, puis résous $z^2-2z+26=0$.

(b) Résous $4z^2+4z+5=0$. Attention au dénominateur $2a$.

(c) Résous $z^2-8z+16=0$ et précise si la solution est réelle.

(d) Résous $z^2+z-6=0$ et précise la nature des solutions.

(e) Résous $3z^2+2z+1=0$, puis contrôle avec le produit $\dfrac{c}{a}$.

(f) Détermine tous les complexes z tels que $z^2 = -49$.

Ex. 34 ★☆☆ **Retrouver l'équation à partir des solutions** — Dans chaque cas, calcule la somme S et le produit P des deux nombres. Écris ensuite une équation $z^2 - Sz + P = 0$ dont ils sont les solutions.

(a) $1 + 4\mathrm{i}$ et $1 - 4\mathrm{i}$.

(b) $-3 + \mathrm{i}$ et son conjugué.

(c) $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

(d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et son conjugué. Donne une équation à coefficients entiers.

(e) $\sqrt{2} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{2} - \mathrm{i}$.

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Noé** — Noé résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^2 + 6z + 5 = 0$. Il écrit : « $\Delta = -144$, donc $\sqrt{\Delta} = 12$ et $z = \frac{-6 \pm 12}{18}$ », puis conclut que les solutions sont -1 et $\frac{1}{3}$.

(a) Montre en remplaçant que -1 n'est pas solution. Explique ensuite l'erreur de Noé.

(b) Résous correctement l'équation dans $\mathbb{C}$.

(c) Inès, elle, propose $z_1 = -\frac{1}{3} + 12\mathrm{i}$. Explique pourquoi c'est faux.

(d) Contrôle tes solutions avec le produit $\frac{c}{a}$. Écris ensuite $9z^2 + 6z + 5$ sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$.

Ex. 36 ★★☆ **Vrai ou faux sur le second degré** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse par un calcul, une propriété ou un contre-exemple.

(a) « L'équation $z^2 + 4z + 5 = 0$ a pour solutions $-2 + \mathrm{i}$ et $2 - \mathrm{i}$. »

(b) « Si $5 - 2\mathrm{i}$ est solution de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, alors $5 + 2\mathrm{i}$ l'est aussi. »

(c) « L'équation $z^2 - 6z + 7 = 0$ a deux solutions non réelles dans $\mathbb{C}$. »

(d) « Si une équation du second degré a une solution non réelle, son conjugué est aussi solution. » Teste avec $z^2 - 3\mathrm{i}z - 2 = 0$ et i.

(e) « Les deux solutions de $2z^2 + 3z + 4 = 0$ ont pour somme $\frac{3}{2}$ et pour produit 2. »

Ex. 37 ★★☆ **Une équation bicarrée** — Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^4 - 2z^2 - 8$ et $Z = z^2$.

(a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z - 8 = 0$.

(b) Déduis-en toutes les solutions de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

(c) Écris $P(z)$ comme un produit de quatre facteurs du premier degré.

(d) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$ par la même méthode. Vérifie l'une des solutions en remplaçant.

Ex. 38 ★★★ **Une famille d'équations à paramètre** — Pour tout réel m, on note (E_m) l'équation $z^2 - 4z + m = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(a) Calcule le discriminant de (E_m) en fonction de m. Discute, selon m, le nombre et la nature (réelles ou non) des solutions.

(b) Résous (E_3) puis (E_{20}) dans $\mathbb{C}$. Donne les solutions sous forme algébrique.

(c) Pour $m > 4$, exprime en fonction de m les solutions de (E_m). On note z_1 celle dont la partie imaginaire est positive.

(d) Démontre que, pour $m > 4$, $|z_1|^2 = m$. Déduis-en la valeur de m pour laquelle $|z_1| = 5$, puis donne z_1.

(e) Détermine le réel $m > 4$ pour lequel z_1^2 est un imaginaire pur. Vérifie ta réponse en remplaçant dans (E_m).

Ex. 39 ★★★ **Forme canonique et démonstration du cours** — On considère $P(z) = 2z^2 - 6z + 9$ pour $z \in \mathbb{C}$.

(a) Écris $P(z)$ sous forme canonique $a(z - \alpha)^2 + \beta$, avec α et β réels.

(b) Écris $\frac{9}{4}$ sous la forme $-w^2$ avec w imaginaire pur. Déduis-en une factorisation de $P(z)$, puis les solutions de $P(z) = 0$.

(c) Retrouve ces solutions à l'aide du discriminant, puis contrôle-les par la somme et le produit des racines.

(d) Soit a, b, c réels, $a \neq 0$, avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Par la même méthode, démontre que $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions conjuguées $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

(e) Déduis de la factorisation obtenue à la question précédente que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Ex. 40 ★★★ **Un polynôme de degré 4 à coefficients réels** — Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^4 + 324$. On cherche toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

(a) On pose $Z = z^2$. Résous $Z^2 + 324 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Explique pourquoi la méthode de l'équation bicarrée ne permet pas de conclure ici.

(b) Calcule $(3 + 3\mathrm{i})^2$ puis $(3 + 3\mathrm{i})^4$. Déduis-en que $3 + 3\mathrm{i}$ est une racine de P.

(c) Démontre que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ et $P(-z) = P(z)$. Déduis-en trois autres racines de P.

(d) Détermine le polynôme $z^2 + pz + q$, avec p et q réels, dont les racines sont $3 + 3\mathrm{i}$ et $3 - 3\mathrm{i}$. Fais de même avec $-3 + 3\mathrm{i}$ et $-3 - 3\mathrm{i}$.

(e) Déduis-en une factorisation de $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels. Justifie que P n'a pas d'autre racine.

6. *Factoriser par $z-a$, polynômes de degré 3 et 4*

À retenir : α racine de $P \Leftrightarrow P(\alpha)=0$. Alors $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$, avec Q de degré $n-1$. Garde α parmi les solutions. $z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$. Coefficients réels : $\overline{\alpha}$ est racine aussi, facteur $z^2-2\operatorname{Re}(\alpha)z+|\alpha|^2$ (ex. $\alpha=\mathrm{i}$: z^2+1).

Ex. 41 ★☆☆ **Racine ou pas ?** — Pour chaque polynôme P et chaque complexe α, calcule $P(\alpha)$. Déduis-en si α est racine de P.

(a) $P(z)=z^3+z^2+z+1$ et $\alpha=-1$.

(b) $P(z)=z^3-3z^2+4$ et $\alpha=2$.

(c) $P(z)=z^2+49$ et $\alpha=7\mathrm{i}$.

(d) $P(z)=z^3+2z^2+5$ et $\alpha=1$.

(e) $P(z)=z^3-z^2+2z-2$ et $\alpha=\mathrm{i}$.

(f) $P(z)=z^4+16$ et $\alpha=-2\mathrm{i}$.

Ex. 42 ★☆☆ **Le facteur conjugué** — Pour chaque complexe α, écris $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})$ sous la forme z^2+bz+c, avec b et c réels.

(a) $\alpha=2+3\mathrm{i}$ (b) $\alpha=-1+4\mathrm{i}$ (c) $\alpha=5\mathrm{i}$

(d) $\alpha=3-\mathrm{i}$ (e) $\alpha=-2-5\mathrm{i}$ (f) $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Ex. 43 ★★☆ **Une puissance moins une puissance** — On considère le polynôme $P(z)=z^4-81$.

(a) À l'aide de l'identité $z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$, factorise $P(z)$ par $z-3$.

(b) On note Q le quotient obtenu. Cherche une racine de Q parmi ±1, ±2, ±3, puis factorise Q par identification.

(c) Résous l'équation $z^4=81$ dans $\mathbb{C}$.

(d) Justifie que l'équation $z^4=81$ n'a pas d'autre solution que celles que tu as trouvées.

Ex. 44 ★★☆ **L'identification de Léna** — Léna sait que 1 est racine de $P(z)=z^3-5z^2+12z-8$. Elle écrit : $(z-1)(z^2+bz+c)=z^3+(b+1)z^2+(c+b)z+c$. Elle en déduit $b=-6$ et $c=18$. Elle résout $z^2-6z+18=0$ et conclut : $\mathcal{S}=\{3+3\mathrm{i}\,;3-3\mathrm{i}\}$.

(a) Vérifie que 1 est bien racine de P.

(b) Développe correctement $(z-1)(z^2+bz+c)$ et repère l'erreur de Léna.

(c) Quelle équation de l'identification aurait dû alerter Léna ? Justifie.

(d) Détermine la bonne factorisation de P, puis résous $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$. Quel autre oubli Léna a-t-elle fait ?

Ex. 45 ★★☆ **À la recherche de racines imaginaires pures** — On considère $P(z)=z^4+2z^3+9z^2+8z+20$.

(a) Soit y un réel. Écris $P(y\mathrm{i})$ sous forme algébrique.

(b) Déduis-en les racines imaginaires pures de P.

(c) Justifie que $P(z)=T(z)(z^2+bz+c)$, où T est un trinôme à coefficients réels que tu préciseras. Détermine les réels b et c.

(d) Résous $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

Ex. 46 ★★★ **Un paramètre à régler** — Soit m un réel. Pour tout complexe z, on pose $P(z)=z^3+mz^2+10z-12$.

(a) Détermine la valeur de m pour laquelle 2 est racine de P.

(b) Dans la suite, m prend la valeur trouvée à la question précédente. Détermine les réels b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z)=(z-2)(z^2+bz+c)$.

(c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

(d) Calcule le produit des trois solutions. Compare-le au terme constant de P, puis explique ce lien à l'aide de la factorisation.

Ex. 47 ★★★ **Une racine à dénicher** — Pour tout complexe z, on pose $P(z)=z^4-4z^3+6z^2-4z+5$.

(a) Calcule $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ et $P(\mathrm{i})$. Lesquels de ces nombres sont des racines de P ?

(b) Sans calculer $P(-\mathrm{i})$, démontre que $-\mathrm{i}$ est aussi une racine de P.

(c) Déduis-en que $P(z)$ se factorise par z^2+1. Détermine ensuite les réels b et c tels que, pour tout z, $P(z)=(z^2+1)(z^2+bz+c)$.

(d) Résous $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$. Justifie que tu as obtenu toutes les solutions.

Ex. 48 ★★★ **La somme de cubes d'Inès** — Pour tout complexe z, on pose $P(z)=z^3+64$. On rappelle que $z^3-a^3=(z-a)(z^2+az+a^2)$ pour tous complexes z et a. Inès écrit : « $z^3+64=z^3-4^3=(z-4)(z^2+4z+16)$ ».

(a) Explique l'erreur d'Inès. Factorise ensuite correctement $P(z)$ à l'aide du rappel.

(b) Résous l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

(c) Calcule le module de chacune des solutions. Que remarques-tu ?

(d) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z-1)^3+64=0$.

(e) Lucas affirme : « un polynôme de degré 3 à coefficients réels peut avoir trois racines distinctes, toutes non réelles. » A-t-il raison ? Justifie.