Terminale maths expertes / Nombres complexes — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Forme algébrique : calculer, partie réelle et imaginaire*

Ex. 1 ★☆☆ **Développer et lire les parties**

(a) $(2-5\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 6+2\mathrm{i}-15\mathrm{i}-5\mathrm{i}^2 = 6-13\mathrm{i}+5 = 11-13\mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}=11$ et $\mathrm{Im}=-13$ (un réel, sans i).

(b) $(5-3\mathrm{i})^2 = 25-30\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2 = 25-30\mathrm{i}-9 = 16-30\mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}=16$ et $\mathrm{Im}=-30$. Attention : $9\mathrm{i}^2=-9$, pas $+9$.

(c) $\mathrm{i}(4-7\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}-7\mathrm{i}^2 = 4\mathrm{i}+7 = 7+4\mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}=7$ et $\mathrm{Im}=4$.

(d) $(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 1-4\mathrm{i}^2 = 5$ et $3\mathrm{i}(2+\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2 = -3+6\mathrm{i}$. Le nombre vaut $5-(-3+6\mathrm{i}) = 8-6\mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}=8$ et $\mathrm{Im}=-6$.

(e) $(2+\mathrm{i})^2 = 4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 3+4\mathrm{i}$, puis $(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 6+3\mathrm{i}+8\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 = 2+11\mathrm{i}$.
Donc $\mathrm{Re}=2$ et $\mathrm{Im}=11$.

Ex. 2 ★☆☆ **Puissances de i**

(a) $2026 = 4\times 506+2$, donc $\mathrm{i}^{2026} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{506}\times \mathrm{i}^2 = 1\times(-1) = -1$.

(b) $47 = 4\times 11+3$, donc $\mathrm{i}^{47} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{11}\times \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$.

(c) Le reste de la division de $4n+3$ par 4 est 3, donc $\mathrm{i}^{4n+3} = \left(\mathrm{i}^4\right)^n \times \mathrm{i}^3 = 1\times(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

(d) $13 = 4\times 3+1$ et $14 = 4\times 3+2$, donc $\mathrm{i}^{13} = \mathrm{i}$ et $\mathrm{i}^{14} = -1$: la somme vaut $-1+\mathrm{i}$.

(e) $(-\mathrm{i})^7 = (-1)^7\times \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}^7$. Comme $7 = 4+3$, $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$, donc $(-\mathrm{i})^7 = \mathrm{i}$.

(f) $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3 = 1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i} = 0$. Les 12 termes forment trois blocs de quatre puissances consécutives, chacun égal à $\mathrm{i}^{4k}\times 0 = 0$, donc $S=0$.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs de Léa**

(a) Première erreur : $\mathrm{i}^2=-1$, donc $4\mathrm{i}^2=-4$ et non $+4$. Ainsi $(3-2\mathrm{i})^2 = 9-12\mathrm{i}-4 = 5-12\mathrm{i}$. Seconde erreur : la partie imaginaire est un réel.
Donc $\mathrm{Im}\left((3-2\mathrm{i})^2\right) = -12$, et non $-12\mathrm{i}$.

Ex. 3 (suite)

(b) L'inégalité $\geqslant$ n'est définie qu'entre deux réels, et un carré n'est pas toujours réel : $(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$ ne se compare pas à 0. De plus, $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$. La règle « un carré est positif » ne vaut donc que dans $\mathbb{R}$, et l'argument de Léa ne prouve rien.

(c) $z^2 = x^2+2\mathrm{i}xy+\mathrm{i}^2y^2 = (x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{i}$. Comme x^2-y^2 et $2xy$ sont réels, on identifie avec $-36+0\mathrm{i}$: $x^2-y^2=-36$ et $2xy=0$. Si $y=0$, alors $x^2=-36$, ce qui est impossible pour x réel.
Donc $x=0$, puis $y^2=36$, soit $y=6$ ou $y=-6$.
Conclusion : l'équation a deux solutions, $z=6\mathrm{i}$ et $z=-6\mathrm{i}$.

Ex. 4 ★★☆ **Binôme de Newton dans $\mathbb{C}$**

(a) Les coefficients binomiaux sont $1,5,10,10,5,1$. On a $(-\mathrm{i})^2=-1$, $(-\mathrm{i})^3=\mathrm{i}$, $(-\mathrm{i})^4=1$ et $(-\mathrm{i})^5=-\mathrm{i}$.
Donc $(1-\mathrm{i})^5 = 1-5\mathrm{i}-10+10\mathrm{i}+5-\mathrm{i}$. On regroupe : partie réelle $1-10+5=-4$, partie imaginaire $-5+10-1=4$. Ainsi $(1-\mathrm{i})^5 = -4+4\mathrm{i}$.

(b) $(1-\mathrm{i})^2 = 1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i}$, puis $(1-\mathrm{i})^4 = (-2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$.
Donc $(1-\mathrm{i})^5 = (1-\mathrm{i})^4\times(1-\mathrm{i}) = -4(1-\mathrm{i}) = -4+4\mathrm{i}$. On retrouve bien le résultat.

(c) $(1-\mathrm{i})^{20} = \left((1-\mathrm{i})^4\right)^5 = (-4)^5 = -1024$. Puis $(1-\mathrm{i})^{22} = (1-\mathrm{i})^{20}\times(1-\mathrm{i})^2 = -1024\times(-2\mathrm{i}) = 2048\mathrm{i}$.
Donc $(1-\mathrm{i})^{20} = -1024$ et $(1-\mathrm{i})^{22} = 2048\mathrm{i}$.

Ex. 5 ★★☆ **Réel ou imaginaire pur selon m**

(a) $z = 3m-m\mathrm{i}+6\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 = (3m+2)+(6-m)\mathrm{i}$. Comme m est réel, $\mathrm{Re}(z)=3m+2$ et $\mathrm{Im}(z)=6-m$.

(b) z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=0$, soit $6-m=0$, donc $m=6$. Alors $z=3\times 6+2=20$.

(c) z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$, soit $3m+2=0$, donc $m=-\frac{2}{3}$. Alors $z=\left(6+\frac{2}{3}\right)\mathrm{i} = \frac{20}{3}\mathrm{i}$.

(d) $z=0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$, soit $m=-\frac{2}{3}$ et $m=6$ en même temps. C'est impossible : aucun réel m ne donne $z=0$.

Ex. 6 ★★★ **Quand z^2 est-il réel ?**

(a) $z^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} + \mathrm{i}^2y^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, car $\mathrm{i}^2 = -1$. Comme $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont réels : $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$
(un réel, sans le i).

(b) z^2 est réel $\iff \mathrm{Im}(z^2) = 0 \iff 2xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.
Donc z^2 est réel si et seulement si z est réel ou imaginaire pur.

(c) D'après la question 2, z^2 est réel si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. Si $y = 0$, $z = x$ est réel et $z^2 = x^2 \geqslant 0$: on compare ici deux réels, c'est permis. Si $x = 0$, $z = \mathrm{i}y$ et $z^2 = \mathrm{i}^2y^2 = -y^2$, qui est strictement négatif dès que $y \neq 0$.
Donc z^2 est un réel strictement négatif si et seulement si z est un imaginaire pur non nul. Par exemple, $(3\mathrm{i})^2 = -9$.

(d) $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$. Par identification (les parties sont réelles) : $x^2 - y^2 = x$ et $2xy = -y$. La seconde s'écrit $y(2x+1) = 0$. Si $y = 0$: $x^2 = x$, d'où $x = 0$ ou $x = 1$. Si $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, d'où $y^2 = \frac{3}{4}$, soit $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions sont 0, 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Ex. 7 ★★★ **Une somme de coefficients binomiaux**

(a) $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$. Puis $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = 4\mathrm{i}^2 = -4$.

(b) $(1+\mathrm{i})^{2030} = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^{1015} = (2\mathrm{i})^{1015} = 2^{1015}\,\mathrm{i}^{1015}$. Or $1015 = 4 \times 253 + 3$, donc $\mathrm{i}^{1015} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$. Ainsi $(1+\mathrm{i})^{2030} = 0 - 2^{1015}\mathrm{i}$: la partie réelle vaut 0 et la partie imaginaire vaut -2^{1015}
(un réel).

(c) $(1+\mathrm{i})^{2031} = (1+\mathrm{i})^{2030} \times (1+\mathrm{i}) = -2^{1015}\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2^{1015}\mathrm{i} - 2^{1015}\mathrm{i}^2 = 2^{1015} - 2^{1015}\mathrm{i}$.

(d) $(1+\mathrm{i})^{2030} = \sum_{k=0}^{2030} \binom{2030}{k}\mathrm{i}^k$. Pour $k = 2p$ pair : $\mathrm{i}^{2p} = (\mathrm{i}^2)^p = (-1)^p$, un réel. Pour $k = 2p+1$ impair : $\mathrm{i}^{2p+1} = (-1)^p\mathrm{i}$. En regroupant, $(1+\mathrm{i})^{2030} = S + T\mathrm{i}$ avec S et T réels. Par unicité de la forme algébrique, $\mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^{2030}\right) = S$ et $\mathrm{Im}\left((1+\mathrm{i})^{2030}\right) = T$.

(e) D'après la question 2, $(1+\mathrm{i})^{2030} = 0 - 2^{1015}\mathrm{i}$. Par identification des parties réelles et imaginaires (toutes réelles), $S = 0$ et $T = -2^{1015}$.

Ex. 8 ★★★ **Une suite de nombres complexes**

(a) $z_1 = \mathrm{i} \times 0 + 1 = 1$; $z_2 = \mathrm{i} + 1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_3 = \mathrm{i}(1+\mathrm{i}) + 1 = \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + 1 = \mathrm{i}$; $z_4 = \mathrm{i}^2 + 1 = 0$.

(b) $z_4 = z_0$, et chaque terme ne dépend que du précédent : la suite est périodique de période 4, donc z_n ne dépend que du reste de n dans la division par 4. Or $2031 = 4 \times 507 + 3$, donc $z_{2031} = z_3 = \mathrm{i}$. Ainsi $\mathrm{Re}(z_{2031}) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_{2031}) = 1$
(et non i).

(c) $z_{n+1} = \mathrm{i}(u_n + \mathrm{i}v_n) + 1 = \mathrm{i}u_n + \mathrm{i}^2v_n + 1 = (1 - v_n) + \mathrm{i}u_n$. Comme $1 - v_n$ et u_n sont réels, par identification : $u_{n+1} = 1 - v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.

(d) $\mathrm{i}\ell + 1 = (1-y) + \mathrm{i}x$. Par identification (parties réelles) : $x = 1 - y$ et $y = x$.
Donc $x = 1 - x$, soit $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Ainsi $\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(e) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + (1+\mathrm{i}) + \mathrm{i} + 0 = 2 + 2\mathrm{i}$. Par périodicité, chaque bloc de 4 termes consécutifs a la même somme. Comme $2032 = 4 \times 508$, la somme vaut $508(2 + 2\mathrm{i}) = 1016 + 1016\mathrm{i}$. Sa partie imaginaire 1016 n'est pas nulle : la somme n'est pas réelle. C'est faux.

2. *Conjugué : propriétés, réel ou imaginaire pur*

Ex. 9 ★☆☆ **Calculer des conjugués**

(a) $4\mathrm{i} - 7 = -7 + 4\mathrm{i}$: on change seulement le signe de la partie imaginaire, donc $\overline{4\mathrm{i} - 7} = -7 - 4\mathrm{i}$.

(b) $(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 5 + 5\mathrm{i}$, donc le conjugué est $5 - 5\mathrm{i}$.

(c) $\mathrm{i}(5 - 2\mathrm{i}) = 5\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 5\mathrm{i}$, donc le conjugué est $2 - 5\mathrm{i}$.

(d) $z\overline{z} = 6^2 + (-1)^2 = 37$: c'est un réel positif.

(e) $\overline{z} = 1 - 4\mathrm{i}$ et $2z = 2 + 8\mathrm{i}$, donc $\overline{z} + 2z = 3 + 4\mathrm{i}$
(et non $3z = 3 + 12\mathrm{i}$).

(f) Conjugué d'un quotient = quotient des conjugués : $\frac{2-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{1^2+3^2} = \frac{2-6\mathrm{i}-\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}\mathrm{i}$.

Ex. 10 ★☆☆ **Réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre**

(a) $\mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^4 \times \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$: imaginaire pur.

(b) $(9 + 6\mathrm{i} - 1) - (9 - 6\mathrm{i} - 1) = 12\mathrm{i}$: imaginaire pur.

(c) $\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+1^2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$: imaginaire pur.

(d) $(4\mathrm{i} - 1) - (4\mathrm{i} + 1) = -2$: réel.

(e) $1 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 = -3 + 4\mathrm{i}$: ni réel ni imaginaire pur.

Ex. 11 ★★☆ Conclure sans développer

(a) $\overline{4+\mathrm{i}} = 4-\mathrm{i}$ et le conjugué d'une puissance est la puissance du conjugué : $\overline{A} = (4-\mathrm{i})^7 - (4+\mathrm{i})^7 = -A$. Donc A est imaginaire pur.

(b) Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{B} = \frac{2-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}} + \frac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = B$, donc B est réel. Avec $w = \frac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(5+\mathrm{i})}{26} = \frac{7+17\mathrm{i}}{26}$, on a $B = w + \overline{w} = 2\,\mathrm{Re}(w) = \frac{7}{13}$.

(c) $\overline{C} = \overline{z}z + \mathrm{i}(\overline{z} - z) = z\overline{z} - \mathrm{i}(\overline{z} - z) = z\overline{z} + \mathrm{i}(z - \overline{z}) = C$. Donc C est réel.

(d) $\overline{D} = \overline{z}^2 - z^2 = -D$.
Donc D est imaginaire pur
(il vaut 0 quand z est réel ou imaginaire pur).

Ex. 12 ★★☆ Équations en z et en son conjugué

(a) $2(x+\mathrm{i}y) - (x-\mathrm{i}y) = x + 3\mathrm{i}y$ (et non z). Par identification, $x = 4$ et $3y = -9$, donc $y = -3$. L'unique solution est $z = 4 - 3\mathrm{i}$.

(b) $2\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y) = 2y + 2\mathrm{i}x$, donc l'équation s'écrit $(x + 2y) + \mathrm{i}(2x + y) = 5 + 4\mathrm{i}$. On obtient le système $x + 2y = 5$ et $2x + y = 4$, d'où $x = 1$ et $y = 2$. L'unique solution est $z = 1 + 2\mathrm{i}$.

(c) $z\overline{z} = x^2 + y^2$ et $2\overline{z} = 2x - 2\mathrm{i}y$, donc $(x^2 + y^2 + 2x) - 2\mathrm{i}y = 12 - 6\mathrm{i}$. Par identification, $-2y = -6$, donc $y = 3$. Puis $x^2 + 2x + 9 = 12$, soit $x^2 + 2x - 3 = 0$: $\Delta = 16$, d'où $x = 1$ ou $x = -3$. Les solutions sont $1 + 3\mathrm{i}$ et $-3 + 3\mathrm{i}$.

Ex. 13 ★★☆ Vrai ou faux sur le conjugué

(a) Faux. Pour $z = 1$: $\overline{(2+\mathrm{i}) \times 1} = 2 - \mathrm{i}$, alors que $(2+\mathrm{i}) \times \overline{1} = 2 + \mathrm{i}$. Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{(2+\mathrm{i})z} = (2-\mathrm{i})\overline{z}$.

(b) Vrai. Avec $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) : $z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2$. Une somme de carrés de réels n'est nulle que si chacun est nul : $a = b = 0$, donc $z = 0$.

(c) Vrai. $z + \overline{z} = 0$ donne $\overline{z} = -z$, donc z est imaginaire pur : $z = \mathrm{i}b$ avec b réel, et $b \neq 0$ car $z \neq 0$. Alors $z^2 = \mathrm{i}^2 b^2 = -b^2 < 0$.

(d) Vrai. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : le conjugué vaut $\frac{\overline{z}}{z} + \frac{\overline{z}}{z}$, c'est-à-dire le même nombre. Exemple : pour $z = 1 + 2\mathrm{i}$, on trouve $-\frac{6}{5}$.

(e) Faux. Pour $z = \mathrm{i}$, $z^2 = -1$ est réel, mais i n'est pas réel.

Ex. 14 ★★★ Un quotient imaginaire pur

(a) Si on avait $z = 0$, on aurait $z\overline{z} = 0 \neq 1$.
Donc $z \neq 0$. De $z\overline{z} = 1$, on déduit $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

(b) Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués. Comme $z \neq -1$, on a $\overline{z} \neq -1$ et $\overline{Z} = \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$. On remplace $\overline{z}$ par $\frac{1}{z}$ et on multiplie le numérateur et le dénominateur par $z \neq 0$: $\overline{Z} = \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1-z}{1+z} = -\frac{z-1}{z+1} = -Z$. Comme $\overline{Z} = -Z$, Z est imaginaire pur.

(c) On a $\overline{z} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$, donc $z\overline{z} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$. Ensuite, $Z = \frac{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}}{\frac{8}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}} = \frac{(-1+2\mathrm{i})(4-2\mathrm{i})}{16+4} = \frac{-4+2\mathrm{i}+8\mathrm{i}+4}{20} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$. On retrouve bien un imaginaire pur.

(d) Z est imaginaire pur, donc $\overline{Z} = -Z$, c'est-à-dire $\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = -\frac{z-1}{z+1}$. On fait le produit en croix : $(\overline{z}-1)(z+1) = -(z-1)(\overline{z}+1)$. On développe : $z\overline{z} + \overline{z} - z - 1 = -z\overline{z} - z + \overline{z} + 1$. Il reste $2z\overline{z} = 2$, donc $z\overline{z} = 1$.

Ex. 15 ★★★ L'erreur d'Inès, puis un système

(a) Pour $z = 3 - \frac{2}{3}\mathrm{i}$: $\overline{z} + 2z = 3 + \frac{2}{3}\mathrm{i} + 6 - \frac{4}{3}\mathrm{i} = 9 - \frac{2}{3}\mathrm{i} \neq 9 - 2\mathrm{i}$. Inès a tort. Son erreur : $\overline{z}$ et z ne sont pas égaux en général, donc $\overline{z} + 2z \neq 3z$. On ne peut pas regrouper ces deux termes.

(b) Avec $z = x + \mathrm{i}y$: $\overline{z} + 2z = x - \mathrm{i}y + 2x + 2\mathrm{i}y = 3x + \mathrm{i}y$. Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $3x = 9$ et $y = -2$, donc $x = 3$ et $y = -2$. L'unique solution est $z = 3 - 2\mathrm{i}$.

(c) Avec $z = x + \mathrm{i}y$: $z + \overline{z} = 2x$, qui est réel. Par identification, il faudrait $2x = 0$ et $0 = 4$, ce qui est impossible. Ben a raison : l'équation n'a aucune solution.

(d) On pose $z = x + \mathrm{i}y$. D'une part $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y = 8\mathrm{i}$, donc $y = 4$. D'autre part $z\overline{z} = x^2 + y^2 = 25$, donc $x^2 = 9$ et $x = 3$ ou $x = -3$. Les solutions sont $z = 3 + 4\mathrm{i}$ et $z = -3 + 4\mathrm{i}$.

Ex. 16 ★★★ Racines conjuguées d'un polynôme réel

(a) On utilise trois propriétés : le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, celui d'un produit est le produit des conjugués, et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Un réel est son propre conjugué.
Donc $\overline{P(z)} = \overline{z}^3 + 13\overline{z} - 34 = P(\overline{z})$.

(b) Soit $\alpha = -1 + 4\mathrm{i}$. On a $\alpha^2 = 1 - 8\mathrm{i} - 16 = -15 - 8\mathrm{i}$ et $\alpha^3 = (-15 - 8\mathrm{i})(-1 + 4\mathrm{i}) = 15 - 60\mathrm{i} + 8\mathrm{i} + 32 = 47 - 52\mathrm{i}$.
Donc $P(\alpha) = 47 - 52\mathrm{i} - 13 + 52\mathrm{i} - 34 = 0$. Ainsi $4\mathrm{i} - 1$ est racine de P.

Ex. 16 (suite)

(c) D'après la première question, $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$. Donc $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P. Attention, on change seulement le signe de la partie imaginaire : $\overline{4\mathrm{i} - 1} = -1 - 4\mathrm{i}$ (et non $1 - 4\mathrm{i}$). Comme $-4 \neq 0$, cette racine n'est pas réelle.

(d) Somme : $\alpha + \overline{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = -2$. Produit : $\alpha\overline{\alpha} = (-1)^2 + 4^2 = 17$, qui est bien un réel positif. On pose $Q(z) = (z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \overline{\alpha})z + \alpha\overline{\alpha}$, donc $Q(z) = z^2 + 2z + 17$. Ses coefficients sont réels.

(e) On développe : $(z - r)(z^2 + 2z + 17) = z^3 + (2 - r)z^2 + (17 - 2r)z - 17r$. Par identification avec P : $2 - r = 0$, $17 - 2r = 13$ et $-17r = -34$, donc $r = 2$. Ainsi $P(z) = (z - 2)(z^2 + 2z + 17)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Les solutions de $P(z) = 0$ sont donc 2, $-1 + 4\mathrm{i}$ et $-1 - 4\mathrm{i}$.

3. *Inverse, quotient et équations du premier degré*

Ex. 17 ★☆☆ **Inverses sous forme algébrique**

(a) $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$, donc $\frac{1}{\mathrm{i}^3} = \frac{1}{-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})\times\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{1} = \mathrm{i}$.

(b) $\frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2-\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2-\mathrm{i}}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$.

(c) $(2-\mathrm{i})^2 = 4 - 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 3 - 4\mathrm{i}$, donc $\frac{1}{(2-\mathrm{i})^2} = \frac{3+4\mathrm{i}}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{3+4\mathrm{i}}{9+16} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathrm{i}$.

(d) $\frac{1}{-1+2\mathrm{i}} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})} = \frac{-1-2\mathrm{i}}{1+4} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$.

(e) $\frac{1}{2\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\times(-2\mathrm{i})} = \frac{-2\mathrm{i}}{4} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Ex. 18 ★☆☆ **Quotients sous forme algébrique**

(a) $\frac{(1+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{1+1} = \frac{-2+4\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$.

(b) $\frac{(4-\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \frac{8-12\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{4+9} = \frac{5-14\mathrm{i}}{13} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}\mathrm{i}$.

(c) $\frac{(5+2\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})} = \frac{-5\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1} = 2 - 5\mathrm{i}$.

(d) $\overline{2+\mathrm{i}} = 2 - \mathrm{i}$, donc $\frac{6+7\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(6+7\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{12+6\mathrm{i}+14\mathrm{i}+7\mathrm{i}^2}{4+1} = \frac{5+20\mathrm{i}}{5} = 1 + 4\mathrm{i}$.

Ex. 19 ★☆☆ **Équations du premier degré en z**

(a) $3 - \mathrm{i} \neq 0$, donc $z = \frac{5+5\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{(5+5\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{9+1} = \frac{15+5\mathrm{i}+15\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{10} = \frac{10+20\mathrm{i}}{10} = 1 + 2\mathrm{i}$.

(b) $z = \frac{4+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{(4+5\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{1} = -4\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2 = 5 - 4\mathrm{i}$.

(c) L'équation s'écrit $(3 + 2\mathrm{i})z = 2 + 4\mathrm{i}$, donc $z = \frac{(2+4\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{9+4} = \frac{6-4\mathrm{i}+12\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2}{13} = \frac{14}{13} + \frac{8}{13}\mathrm{i}$.

(d) On regroupe les termes en z : $(3 - 1 - \mathrm{i})z = 4 + 2\mathrm{i}$, soit $(2 - \mathrm{i})z = 4 + 2\mathrm{i}$.
Donc $z = \frac{(4+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{4+1} = \frac{8+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}\mathrm{i}$.

Ex. 20 ★★☆ **L'erreur de Malo**

(a) $(2 + 4\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i}) = 6 + 4\mathrm{i} + 12\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2 = -2 + 16\mathrm{i}$. Si le quotient valait $3 + 2\mathrm{i}$, ce produit vaudrait $6 + 8\mathrm{i}$. Ce n'est pas le cas, donc Malo a tort : on ne divise pas séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

(b) On multiplie par le conjugué du dénominateur : $\frac{(6+8\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{4+16} = \frac{12-24\mathrm{i}+16\mathrm{i}-32\mathrm{i}^2}{20} = \frac{44-8\mathrm{i}}{20}$.
Donc $\frac{6+8\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$.

(c) $\frac{a+8\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \frac{(a+8\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{4+16} = \frac{2a-4a\mathrm{i}+16\mathrm{i}-32\mathrm{i}^2}{20} = \frac{2a+32}{20} + \frac{16-4a}{20}\mathrm{i}$.
Comme a est réel, ces deux fractions sont réelles. Le quotient est donc réel si et seulement si $16 - 4a = 0$, soit $a = 4$. Il vaut alors $\frac{8+32}{20} = 2$.

(d) La méthode de Malo donne $\frac{4}{2} + \frac{8}{4}\mathrm{i} = 2 + 2\mathrm{i}$. Ce nombre n'est pas réel, alors que le quotient vaut 2 (en effet, $(2 + 4\mathrm{i}) \times 2 = 4 + 8\mathrm{i}$). Sa méthode est encore fausse : pour un quotient, on multiplie toujours par le conjugué du dénominateur.

Ex. 21 ★★☆ **Une équation avec z et son conjugué**

(a) $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, donc $2z + \mathrm{i}\,\overline{z} = 2x + 2\mathrm{i}y + \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2 y = (2x + y) + \mathrm{i}(x + 2y)$.

(b) Comme $2x + y$ et $x + 2y$ sont réels, on identifie : $2x + y = 3$ et $x + 2y = 3$. En soustrayant, $x - y = 0$, donc $x = y$, puis $3x = 3$. Ainsi $x = y = 1$: l'unique solution est $z = 1 + \mathrm{i}$.

(c) $z = \frac{3+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(3+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{4+1} = \frac{6-3\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{5} = \frac{9}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$.

(d) Pour $z = \frac{9}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$: $2z = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\,\overline{z} = \mathrm{i}\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}$. La somme vaut $\frac{21}{5} + 3\mathrm{i} \neq 3 + 3\mathrm{i}$. Ce n'est donc pas une solution : on ne peut pas isoler z quand $\overline{z}$ figure dans l'équation.

Ex. 22 ★★★ **Une équation avec un paramètre réel**

(a) $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, donc $z + m\overline{z} = x + \mathrm{i}y + mx - m\mathrm{i}y = (1 + m)x + (1 - m)y\,\mathrm{i}$. Comme m, x et y sont réels, $(1 + m)x$ et $(1 - m)y$ sont réels : c'est la forme algébrique.

(b) Faux. Si z est réel, alors $\overline{z} = z$, donc $z + m\overline{z} = (1 + m)z$ est réel, car m et z sont réels. Or $2 + 4\mathrm{i}$ n'est pas réel. Quel que soit m, aucune solution de (E_m) n'est réelle.

(c) Pour $m = 1$: $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ est réel. Or $2 + 4\mathrm{i}$ n'est pas réel (sa partie imaginaire vaut 4), donc (E_1) n'a aucune solution. Pour $m = -1$: $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ est imaginaire pur. Or $2 + 4\mathrm{i}$ n'est pas imaginaire pur (sa partie réelle vaut 2), donc (E_{-1}) n'a aucune solution.

Ex. 22 (suite)

(d) D'après la première question, $z+m\overline{z}=(1+m)x+(1-m)y\,\mathrm{i}$, où $(1+m)x$ et $(1-m)y$ sont réels. On identifie avec $2+4\mathrm{i}$: $(1+m)x=2$ et $(1-m)y=4$. Puisque $1+m\neq 0$ et $1-m\neq 0$, on obtient $x=\frac{2}{1+m}$ et $y=\frac{4}{1-m}$. L'unique solution est $z=\frac{2}{1+m}+\frac{4}{1-m}\mathrm{i}$.

(e) On cherche $m\neq\pm1$ tel que $\frac{2}{1+m}=\frac{4}{1-m}$, c'est-à-dire $2(1-m)=4(1+m)$, soit $2-2m=4+4m$, donc $m=-\frac{1}{3}$ (qui est bien différent de 1 et de -1). Alors $x=\frac{2}{2/3}=3$ et $y=\frac{4}{4/3}=3$. La solution est $z=3+3\mathrm{i}$. Vérification : $3+3\mathrm{i}-\frac{1}{3}(3-3\mathrm{i})=3+3\mathrm{i}-1+\mathrm{i}=2+4\mathrm{i}$.

Ex. 23 ★★★ Un quotient, sa valeur interdite et ses équations

(a) Q est défini si et seulement si son dénominateur est non nul : $z-2\mathrm{i}\neq 0$, soit $z\neq 2\mathrm{i}$. La valeur interdite est $z=2\mathrm{i}$.

(b) Pour $z=\mathrm{i}$: $Q=\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$. On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur, i : $Q=\frac{(1+\mathrm{i})\times\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})\times\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1}=-1+\mathrm{i}$.

(c) Pour $z\neq 2\mathrm{i}$: $Q=1+\mathrm{i}\Leftrightarrow z+1=(1+\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})\Leftrightarrow z+1=(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=(1+\mathrm{i})z+2-2\mathrm{i}$.
Donc $z-(1+\mathrm{i})z=2-2\mathrm{i}-1$, soit $-\mathrm{i}z=1-2\mathrm{i}$: c'est la forme $az=b$ avec $a=-\mathrm{i}$ et $b=1-2\mathrm{i}$. Comme $a\neq 0$: $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})\times\mathrm{i}}{(-\mathrm{i})\times\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1}=2+\mathrm{i}$. Or $2+\mathrm{i}\neq 2\mathrm{i}$: la solution est acceptable. L'ensemble des solutions est $\{2+\mathrm{i}\}$.

(d) Faux. Contre-exemple : $w=1$. Pour $z\neq 2\mathrm{i}$, $Q=1\Leftrightarrow z+1=z-2\mathrm{i}\Leftrightarrow 1=-2\mathrm{i}$, ce qui est impossible (les parties réelles 1 et 0 diffèrent). L'équation $Q=1$ n'a donc aucune solution dans $\mathbb{C}$.

Ex. 24 ★★★ Un système de deux équations dans $\mathbb{C}$

(a) On soustrait la seconde équation à la première : $(z+w)-(z-\mathrm{i}w)=(4+2\mathrm{i})-1$, soit $w+\mathrm{i}w=3+2\mathrm{i}$, c'est-à-dire $(1+\mathrm{i})w=3+2\mathrm{i}$. C'est la forme $aw=b$ avec $a=1+\mathrm{i}$ et $b=3+2\mathrm{i}$.

(b) Comme $1+\mathrm{i}\neq 0$: $w=\frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{3-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1+1}=\frac{5-\mathrm{i}}{2}$.
Donc $w=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(c) D'après la première équation : $z=4+2\mathrm{i}-w=4+2\mathrm{i}-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$. Vérification : $\mathrm{i}w=\frac{5}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\mathrm{i}^2=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$, donc $z-\mathrm{i}w=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$. Le système a pour unique solution $z=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$ et $w=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Ex. 24 (suite)

(d) La première équation donne $z=4+2\mathrm{i}-w$. La seconde devient $4+2\mathrm{i}-w-\mathrm{i}\,\overline{w}=1$, soit $w+\mathrm{i}\,\overline{w}=3+2\mathrm{i}$. Avec $w=x+\mathrm{i}y$ (x, y réels), $\overline{w}=x-\mathrm{i}y$ et $w+\mathrm{i}\,\overline{w}=x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}x-\mathrm{i}^2y=(x+y)+(x+y)\mathrm{i}$. Comme $x+y$ est réel, on identifie : $x+y=3$ et $x+y=2$, ce qui est contradictoire. Le nouveau système n'a donc aucune solution.

4. Module

Ex. 25 ★☆☆ Modules à la chaîne

(a) $|z_1|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$. On élève bien au carré la partie imaginaire négative, et on n'écrit surtout pas $5-12$.

(b) z_2 est réel, donc son module est sa valeur absolue : $|z_2|=|-7|=7$. Un module est toujours positif, ce n'est pas -7.

(c) $|z_3|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$.

(d) $z_4=0+(-8)\mathrm{i}$, donc $|z_4|=\sqrt{0^2+(-8)^2}=\sqrt{64}=8$.

(e) $|z_5|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$.

(f) Un nombre et son conjugué ont le même module : $|z_6|=|-15+8\mathrm{i}|=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$.

Ex. 26 ★☆☆ Découper avant de calculer

(a) $|A|=|1+2\mathrm{i}|\times|3-\mathrm{i}|=\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

(b) $|B|=\frac{|6+8\mathrm{i}|}{|4-2\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{20}}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

(c) $|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$, donc $|C|=2^5=32$.

(d) $|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$, donc $|D|=\left(\sqrt{5}\right)^4=25$.

(e) $|E|=|-3+\mathrm{i}|^2\times|1-2\mathrm{i}|=\left(\sqrt{10}\right)^2\times\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.

(f) $|5+5\mathrm{i}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ et $|1+7\mathrm{i}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, donc $|F|=\frac{\left(5\sqrt{2}\right)^3}{5\sqrt{2}}=\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$.

Ex. 27 ★★☆ L'erreur de Léo

(a) Le module de $a+b\mathrm{i}$ n'est pas $a+b$: c'est $\sqrt{a^2+b^2}$. Ici $|z|=\sqrt{24^2+(-7)^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$.
Donc $|z|=25$, et non 17.

(b) $z+z'=24-7\mathrm{i}+4\mathrm{i}=24-3\mathrm{i}$, donc $|z+z'|=\sqrt{576+9}=\sqrt{585}=3\sqrt{65}$.

(c) $|z|+|z'|=25+4=29$. Or $585<841=29^2$, donc $\sqrt{585}<29$. Ainsi $|z+z'|\neq|z|+|z'|$: Léo a aussi découpé le module sur une somme, ce qui est faux en général. On a seulement l'inégalité triangulaire $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$.

Ex. 28 ★★☆ Vrai ou faux sur le module

(a) Faux. Contre-exemple : pour $z = \mathrm{i}$, $|z|^2 = 1^2 = 1$ alors que $z^2 = \mathrm{i}^2 = -1$. La bonne relation est $|z|^2 = z\overline{z}$.

(b) Vrai. D'après la propriété du module d'un produit, $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$.

(c) Vrai. On écrit $z = a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels. Alors $-\overline{z} = -a + b\mathrm{i}$, donc $|-\overline{z}| = \sqrt{(-a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

(d) Faux. Contre-exemple : pour $z = 1$ et $z' = -1$, $|z - z'| = |2| = 2$ alors que $|z| - |z'| = 1 - 1 = 0$. Le module ne se découpe pas sur une somme ou une différence.

Ex. 29 ★★☆ Un quotient de module 1

(a) D'après la propriété du module d'un quotient, $|z| = \frac{|2+5\mathrm{i}|}{|5+2\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{4+25}}{\sqrt{25+4}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1$.
Donc $|z| = 1$.

(b) D'après la propriété $|z|^2 = z\overline{z}$, on a $z\overline{z} = 1^2 = 1$.
Donc $z\overline{z} = 1$.

(c) On multiplie par le conjugué du dénominateur : $z = \frac{(2+5\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \frac{10-4\mathrm{i}+25\mathrm{i}+10}{25+4} = \frac{20+21\mathrm{i}}{29}$.
Donc $z = \frac{20}{29} + \frac{21}{29}\mathrm{i}$.

(d) D'après la question 2, $z\overline{z} = 1$, donc $z \neq 0$. En divisant par z, on obtient $\frac{1}{z} = \overline{z} = \frac{20}{29} - \frac{21}{29}\mathrm{i}$. Et $|z^{2027}| = |z|^{2027} = 1^{2027} = 1$.

Ex. 30 ★★★ Module 1 et quotient imaginaire pur

(a) On a $|z|^2 = z\overline{z}$. Comme $|z| = 1$, on obtient $z\overline{z} = 1$. De plus $z \neq 0$, car $|z| \neq 0$. On divise par z : $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

(b) Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{w} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par z : $\overline{w} = \frac{z+1}{z-1} = -\frac{1+z}{1-z} = -w$. On écrit $w = a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels. Alors $a - b\mathrm{i} = -a - b\mathrm{i}$, donc $2a = 0$ et $a = 0$. Conclusion : w est imaginaire pur.

(c) $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$. Ensuite $w = \frac{\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}} = \frac{8-4\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \frac{(8-4\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \frac{16-32\mathrm{i}-8\mathrm{i}-16}{20} = \frac{-40\mathrm{i}}{20}$.
Donc $w = -2\mathrm{i}$. Ce nombre est bien imaginaire pur, comme prévu à la question 2.

(d) On part de $w(1 - z) = 1 + z$. On obtient $w - 1 = z(1 + w)$. Or $w = t\mathrm{i}$ a une partie réelle nulle, donc $w \neq -1$. Ainsi $z = \frac{w-1}{w+1} = \frac{-1+t\mathrm{i}}{1+t\mathrm{i}}$. Par le module d'un quotient : $|z| = \frac{|-1+t\mathrm{i}|}{|1+t\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1$. Conclusion : si w est imaginaire pur, alors $|z| = 1$.

Ex. 31 ★★★ Démontrer l'inégalité triangulaire

(a) On utilise le conjugué d'une somme : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z'$. Or $\overline{z}z' = \overline{z\overline{z'}}$. De plus, $u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}(u)$. On obtient $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

(b) $\mathrm{Re}(w) = a \leqslant |a| = \sqrt{a^2}$. Comme $b^2 \geqslant 0$, on a $\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |w|$.
Donc $\mathrm{Re}(w) \leqslant |w|$.

(c) D'après la question 2, $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z\overline{z'}| = |z||\overline{z'}| = |z||z'|$, car $|\overline{z'}| = |z'|$. Avec la question 1 : $|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$. Les deux nombres sont positifs, donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

(d) On applique la question 1 à z et $-z'$. Comme $|-z'| = |z'|$, on obtient $|z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$. On ajoute cette égalité à celle de la question 1 : les parties réelles s'éliminent. On obtient $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

(e) $|z| = |-4| = 4$: le module d'un réel est sa valeur absolue. $|z'| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Ensuite $z + z' = -1 - 2\mathrm{i}$, donc $|z + z'| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. Or $|z| + |z'| = 4 + \sqrt{13} \approx 7{,}61$: l'inégalité est stricte. D'après la question 4 : $|z - z'|^2 = 2(16 + 13) - 5 = 53$. Donc $|z - z'| = \sqrt{53}$. Contrôle : $z - z' = -7 + 2\mathrm{i}$ et $49 + 4 = 53$.

Ex. 32 ★★★ Une suite de puissances

(a) $q = \frac{(1+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{2+\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}$. Première façon : $|q| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{2}$. Seconde façon : $|q| = \frac{|1+3\mathrm{i}|}{|2-\mathrm{i}|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$. On trouve bien la même valeur.

(b) D'après la propriété $|z^n| = |z|^n$, on a $|u_n| = |q|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Cette propriété se démontre par récurrence à partir de $|zz'| = |z||z'|$.

(c) Comme $\sqrt{2} > 1$, la suite $\left(\sqrt{2}\right)^n$ est croissante. Pour $n = 19$: $\left(\sqrt{2}\right)^{19} = 2^9\sqrt{2} = 512\sqrt{2} \approx 724 < 1000$. Pour $n = 20$: $\left(\sqrt{2}\right)^{20} = 2^{10} = 1024 > 1000$. Le plus petit entier cherché est $n = 20$.

(d) D'après la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$, on a $u_3 \times \overline{u_3} = |u_3|^2 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$.
Donc $u_3 \times \overline{u_3} = 8$.

(e) $|(x - 2\mathrm{i})u_4| = |x - 2\mathrm{i}| \times \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4\sqrt{x^2 + 4}$. L'équation devient $4\sqrt{x^2 + 4} = 12$, soit $\sqrt{x^2 + 4} = 3$. On en déduit $x^2 + 4 = 9$, donc $x^2 = 5$. Les solutions sont $x = -\sqrt{5}$ et $x = \sqrt{5}$.

5. Second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Ex. 33 ★☆☆ **Résoudre selon le signe de Δ**

(a) $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 26 = -100 = (10\mathrm{i})^2 < 0$, donc $z = \frac{2\pm 10\mathrm{i}}{2}$. $\mathcal{S} = \{1+5\mathrm{i}\,;1-5\mathrm{i}\}$: deux solutions conjuguées.

(b) $\Delta = 16 - 80 = -64 = (8\mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{-4\pm 8\mathrm{i}}{8}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,;-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right\}$
($2a = 8$ divise aussi la partie imaginaire : $\frac{8}{8} = 1$).

(c) $\Delta = 64 - 64 = 0$: une solution double $z = \frac{8}{2} = 4$, qui est réelle. $\mathcal{S} = \{4\}$.

(d) $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$: $z = \frac{-1\pm 5}{2}$. $\mathcal{S} = \{-3\,;2\}$: deux solutions réelles, même dans $\mathbb{C}$.

(e) $\Delta = 4 - 12 = -8 = (2\mathrm{i}\sqrt{2})^2$, donc $z = \frac{-2\pm 2\mathrm{i}\sqrt{2}}{6}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}\,;-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}\right\}$. Contrôle : $\frac{1}{9}+\frac{2}{9} = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$.

(f) $z^2 + 49 = 0$ et $-49 = (7\mathrm{i})^2$, donc $z^2 = (7\mathrm{i})^2$, soit $(z-7\mathrm{i})(z+7\mathrm{i}) = 0$. $\mathcal{S} = \{7\mathrm{i}\,;-7\mathrm{i}\}$.

Ex. 34 ★☆☆ **Retrouver l'équation à partir des solutions**

(a) $S = 2$ et $P = 1^2 + 4^2 = 17$. Équation : $z^2 - 2z + 17 = 0$.

(b) Le conjugué est $-3-\mathrm{i}$. $S = -6$ et $P = 9 + 1 = 10$. Équation : $z^2 + 6z + 10 = 0$.

(c) $S = 0$ et $P = -4\mathrm{i}^2 = 4$. Équation : $z^2 + 4 = 0$.

(d) $S = 1$ et $P = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. On obtient $z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$, soit $2z^2 - 2z + 1 = 0$ après multiplication par 2.

(e) $S = 2\sqrt{2}$ et $P = 2 + 1 = 3$. Équation : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 3 = 0$.

Ex. 35 ★★☆ **L'erreur de Noé**

(a) $9\times(-1)^2 + 6\times(-1) + 5 = 8 \neq 0$, donc -1 n'est pas solution. Comme $\Delta < 0$, on n'écrit pas $\sqrt{\Delta}$: on écrit $\Delta = (12\mathrm{i})^2$. Noé a oublié le i, et ses « solutions » réelles sont fausses.

(b) $\Delta = 36 - 180 = -144 = (12\mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{-6\pm 12\mathrm{i}}{18}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\,;-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right\}$.

(c) Inès n'a divisé que -6 par $2a = 18$: le dénominateur divise aussi la partie imaginaire, d'où $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. D'ailleurs $z_1\overline{z_1} = \frac{1}{9} + 144 \neq \frac{5}{9} = \frac{c}{a}$, donc sa valeur ne peut pas convenir.

(d) $z_1 z_2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9} = \frac{5}{9} = \frac{c}{a}$: le contrôle est correct. Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $9z^2 + 6z + 5 = 9\left(z+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)\left(z+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$.

Ex. 36 ★★☆ **Vrai ou faux sur le second degré**

(a) Faux. $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2\mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{-4\pm 2\mathrm{i}}{2} = -2\pm\mathrm{i}$. Les solutions sont conjuguées : $-2+\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$. D'ailleurs $(2-\mathrm{i})^2 + 4(2-\mathrm{i}) + 5 = 16 - 8\mathrm{i} \neq 0$.

(b) Vrai. Avec $z_0 = 5 - 2\mathrm{i}$, on a $az_0^2 + bz_0 + c = 0$. En conjuguant, comme a, b, c sont réels : $a\overline{z_0}^2 + b\overline{z_0} + c = \overline{0} = 0$.
Donc $\overline{z_0} = 5 + 2\mathrm{i}$ est solution
(par exemple de $z^2 - 10z + 29 = 0$).

(c) Faux. $\Delta = 36 - 28 = 8 > 0$: les solutions $3-\sqrt{2}$ et $3+\sqrt{2}$ sont réelles.

(d) Faux. $\mathrm{i}^2 - 3\mathrm{i}\times\mathrm{i} - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$, donc i est solution. Mais $(-\mathrm{i})^2 - 3\mathrm{i}\times(-\mathrm{i}) - 2 = -1 - 3 - 2 = -6 \neq 0$. La propriété exige des coefficients réels, ce qui n'est pas le cas de $-3\mathrm{i}$.

(e) Faux. Les coefficients sont réels et $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$: les solutions sont $\frac{-3\pm\mathrm{i}\sqrt{23}}{4}$. Leur somme vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$, même si le produit vaut bien $\frac{c}{a} = 2$. L'erreur porte sur le signe de la somme.

Ex. 37 ★★☆ **Une équation bicarrée**

(a) $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$, donc $Z = \frac{2\pm 6}{2}$. Les solutions sont $Z = 4$ et $Z = -2$, toutes deux réelles.

(b) $z^2 = 4$ donne $z = 2$ ou $z = -2$. $z^2 = -2 = (\mathrm{i}\sqrt{2})^2$ donne $z = \mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Donc $\mathcal{S} = \{-2\,;2\,;-\mathrm{i}\sqrt{2}\,;\mathrm{i}\sqrt{2}\}$.

(c) $P(z) = (z^2-4)(z^2+2) = (z-2)(z+2)(z-\mathrm{i}\sqrt{2})(z+\mathrm{i}\sqrt{2})$.

(d) Avec $Z = z^2$: $Z^2 + 10Z + 9 = 0$,
$\Delta = 100 - 36 = 64 > 0$, donc $Z = \frac{-10\pm 8}{2}$, soit $Z = -1$ ou $Z = -9$, réels. $z^2 = -1 = \mathrm{i}^2$ donne $z = \pm\mathrm{i}$; $z^2 = -9 = (3\mathrm{i})^2$ donne $z = \pm 3\mathrm{i}$. Vérification : $(3\mathrm{i})^4 + 10(3\mathrm{i})^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$.
Donc $\mathcal{S} = \{-3\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\,;3\mathrm{i}\}$.

Ex. 38 ★★★ **Une famille d'équations à paramètre**

(a) $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times m = 16 - 4m$. Si $m < 4$, $\Delta > 0$: deux solutions réelles $\frac{4\pm\sqrt{16-4m}}{2} = 2\pm\sqrt{4-m}$. Si $m = 4$, $\Delta = 0$: une solution réelle double, 2. Si $m > 4$, $\Delta < 0$: deux solutions complexes conjuguées, non réelles. Même dans $\mathbb{C}$, pour $\Delta \geqslant 0$ les solutions restent réelles.

Ex. 38 **(suite)**

(b) Pour $m=3$: $\Delta = 16-12 = 4 > 0$, donc $z = \frac{4\pm 2}{2}$ et $\mathcal{S} = \{1\,;3\}$ (solutions réelles). Pour $m=20$: $\Delta = 16-80 = -64 = (8\mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{4\pm 8\mathrm{i}}{2}$ et $\mathcal{S} = \{2+4\mathrm{i}\,;2-4\mathrm{i}\}$. Contrôle : $(2+4\mathrm{i})(2-4\mathrm{i}) = 4+16 = 20 = \frac{c}{a}$.

(c) Pour $m>4$: $\Delta = -4(m-4) = \left(2\mathrm{i}\sqrt{m-4}\right)^2$, donc $z = \frac{4\pm 2\mathrm{i}\sqrt{m-4}}{2}$. Les solutions sont $z_1 = 2+\mathrm{i}\sqrt{m-4}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-\mathrm{i}\sqrt{m-4}$. Attention : $2a=2$ divise aussi la partie imaginaire.

(d) Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1} = z_1 z_2 = \frac{c}{a} = m$. Contrôle direct : $2^2 + \left(\sqrt{m-4}\right)^2 = m$.
Donc $|z_1| = 5 \iff m = 25$, et $25>4$ convient. Alors $z_1 = 2+\sqrt{21}\,\mathrm{i}$.

(e) $z_1^2 = 4+4\mathrm{i}\sqrt{m-4} + \mathrm{i}^2(m-4) = (8-m) + 4\sqrt{m-4}\,\mathrm{i}$. Le nombre z_1^2 est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z_1^2) = 0$, c'est-à-dire $m=8$, qui vérifie bien $m>4$. On obtient alors $z_1 = 2+2\mathrm{i}$ et $z_1^2 = 8\mathrm{i}$. Vérification : $(2+2\mathrm{i})^2 - 4(2+2\mathrm{i}) + 8 = 8\mathrm{i} - 8 - 8\mathrm{i} + 8 = 0$.
Conclusion : $m=8$.

Ex. 39 ★★★ **Forme canonique et démonstration du cours**

(a) $P(z) = 2(z^2-3z)+9 = 2\left[\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 9 = 2\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$. On a donc $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{9}{2}$.

(b) $\frac{9}{4} = -\left(\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)^2$.
Donc $P(z) = 2\left[\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)^2\right] = 2\left(z-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\,;\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$.

(c) $\Delta = 36-72 = -36 = (6\mathrm{i})^2$, donc $z = \frac{6\pm 6\mathrm{i}}{4} = \frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\mathrm{i}$: on retrouve les mêmes solutions. Contrôle : la somme vaut $3 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{2}$ et le produit vaut $\frac{9}{4}+\frac{9}{4} = \frac{9}{2} = \frac{c}{a}$.

(d) $az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Comme $\Delta<0$, on a $\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, donc $az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$. Puisque $a\neq 0$, les solutions sont $z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Comme $\frac{-b}{2a}$ et $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont réels, $z_2 = \overline{z_1}$: les solutions sont conjuguées.

(e) $z_1+z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$. Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a $z_1 z_2 = |z_1|^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. On retrouve les formules de contrôle utilisées plus haut.

Ex. 40 ★★★ **Un polynôme de degré 4 à coefficients réels**

(a) $Z^2+324 = 0 \iff Z^2 = (18\mathrm{i})^2 \iff Z = 18\mathrm{i}$ ou $Z = -18\mathrm{i}$. Ces valeurs de Z ne sont pas réelles. On aboutit à $z^2 = 18\mathrm{i}$ ou $z^2 = -18\mathrm{i}$, ce qui demande la racine carrée d'un complexe non réel (hors programme). La méthode ne fonctionne que si Z est réel : il faut procéder autrement.

(b) $(3+3\mathrm{i})^2 = 9+18\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2 = 18\mathrm{i}$, donc $(3+3\mathrm{i})^4 = (18\mathrm{i})^2 = -324$. Ainsi $P(3+3\mathrm{i}) = -324+324 = 0$: le nombre $3+3\mathrm{i}$ est une racine de P.

(c) Le conjugué d'une puissance est la puissance du conjugué, et 324 est réel.
Donc $\overline{P(z)} = \overline{z^4} + \overline{324} = \overline{z}^4 + 324 = P(\overline{z})$. De plus, $(-z)^4 = z^4$, donc $P(-z) = P(z)$. Comme $P(3+3\mathrm{i}) = 0$, on obtient $P(3-3\mathrm{i}) = \overline{0} = 0$, puis $P(-3-3\mathrm{i}) = 0$ et $P(-3+3\mathrm{i}) = 0$. Les nombres $3-3\mathrm{i}$, $-3-3\mathrm{i}$ et $-3+3\mathrm{i}$ sont donc des racines de P.

(d) Pour $3\pm 3\mathrm{i}$: la somme vaut 6 et le produit $9+9 = 18$, d'où $z^2-6z+18$. Pour $-3\pm 3\mathrm{i}$: la somme vaut -6 et le produit 18, d'où $z^2+6z+18$. Dans les deux cas, les coefficients sont bien réels.

(e) $(z^2-6z+18)(z^2+6z+18) = (z^2+18)^2 - (6z)^2 = z^4+36z^2+324-36z^2 = z^4+324$.
Donc $P(z) = (z^2-6z+18)(z^2+6z+18)$. Un polynôme de degré 4 a au plus 4 racines. Les quatre racines trouvées sont distinctes, donc $\mathcal{S} = \{3+3\mathrm{i}\,;3-3\mathrm{i}\,;-3+3\mathrm{i}\,;-3-3\mathrm{i}\}$.

6. *Factoriser par $z-a$, polynômes de degré 3 et 4*

Ex. 41 ★☆☆ **Racine ou pas ?**

(a) $P(-1) = -1+1-1+1 = 0$, donc -1 est racine de P.

(b) $P(2) = 8-12+4 = 0$, donc 2 est racine de P.

(c) $(7\mathrm{i})^2 = -49$, donc $P(7\mathrm{i}) = -49+49 = 0$: $7\mathrm{i}$ est racine de P.

(d) $P(1) = 1+2+5 = 8 \neq 0$, donc 1 n'est pas racine de P.

(e) $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}^2 = -1$, donc $P(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}+1+2\mathrm{i}-2 = -1+\mathrm{i} \neq 0$: i n'est pas racine de P.

(f) $(-2\mathrm{i})^2 = -4$, donc $(-2\mathrm{i})^4 = (-4)^2 = 16$ et $P(-2\mathrm{i}) = 16+16 = 32 \neq 0$: $-2\mathrm{i}$ n'est pas racine de P.

Ex. 42 ★☆☆ **Le facteur conjugué**

(a) $\mathrm{Re}(\alpha) = 2$ et $|\alpha|^2 = 4 + 9 = 13$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 - 4z + 13$.

(b) $\mathrm{Re}(\alpha) = -1$ et $|\alpha|^2 = 1 + 16 = 17$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 + 2z + 17$.

(c) $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ et $|\alpha|^2 = 25$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 + 25$.

(d) $\mathrm{Re}(\alpha) = 3$ et $|\alpha|^2 = 9 + 1 = 10$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 - 6z + 10$.

(e) $\mathrm{Re}(\alpha) = -2$ et $|\alpha|^2 = 4 + 25 = 29$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 + 4z + 29$.

(f) $\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $|\alpha|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, donc $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 - z + \frac{1}{2}$.

Ex. 43 ★★☆ **Une puissance moins une puissance**

(a) $81 = 3^4$, donc $P(z) = z^4 - 3^4 = (z-3)(z^3 + 3z^2 + 9z + 27)$.

(b) $Q(z) = z^3 + 3z^2 + 9z + 27$. $Q(1) = 40$, $Q(-1) = 20$, $Q(2) = 65$, $Q(-2) = 13$, $Q(3) = 108$ et $Q(-3) = -27 + 27 - 27 + 27 = 0$: -3 est racine. On écrit $(z+3)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+3)z^2 + (c+3b)z + 3c$. Par identification, $b + 3 = 3$ donne $b = 0$, puis $c + 3b = 9$ donne $c = 9$. Vérification : $3c = 27$.
Donc $Q(z) = (z+3)(z^2+9)$.

(c) $z^4 = 81 \Leftrightarrow (z-3)(z+3)(z^2+9) = 0$. Or $z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 = (3\mathrm{i})^2 \Leftrightarrow z = 3\mathrm{i}$ ou $z = -3\mathrm{i}$.
Donc $\mathcal{S} = \{3\,;-3\,;3\mathrm{i}\,;-3\mathrm{i}\}$.

(d) $z^4 - 81$ est un polynôme de degré 4, donc il a au plus 4 racines. On en a trouvé 4 distinctes. L'équation n'a donc pas d'autre solution.

Ex. 44 ★★☆ **L'identification de Léna**

(a) $P(1) = 1 - 5 + 12 - 8 = 0$, donc 1 est bien racine de P.

(b) $(z-1)(z^2 + bz + c) = z^3 + bz^2 + cz - z^2 - bz - c = z^3 + (b-1)z^2 + (c-b)z - c$. Léna a fait une erreur de signe : elle a développé comme si le facteur était $z + 1$.

(c) Dans le développement de Léna, le terme constant donne l'équation $c = -8$. Elle contredit $c = 18$, tiré des deux premières équations. Le système n'a donc pas de solution, ce qui signale une erreur. Cette équation de vérification aurait dû alerter Léna.

Ex. 44 **(suite)**

(d) Par identification : $b - 1 = -5$ donne $b = -4$, puis $c - b = 12$ donne $c = 8$. Vérification : $-c = -8$.
Donc $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$. Pour $z^2 - 4z + 8$: $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4\mathrm{i})^2$, d'où $z = \frac{4 \pm 4\mathrm{i}}{2} = 2 \pm 2\mathrm{i}$.
Ainsi $\mathcal{S} = \{1\,;2+2\mathrm{i}\,;2-2\mathrm{i}\}$. Léna avait aussi oublié la racine 1 dans ses solutions.

Ex. 45 ★★☆ **À la recherche de racines imaginaires pures**

(a) $(y\mathrm{i})^2 = -y^2$, $(y\mathrm{i})^3 = -y^3\mathrm{i}$ et $(y\mathrm{i})^4 = y^4$.
Donc $P(y\mathrm{i}) = y^4 - 2y^3\mathrm{i} - 9y^2 + 8y\mathrm{i} + 20$, soit $P(y\mathrm{i}) = (y^4 - 9y^2 + 20) + (-2y^3 + 8y)\mathrm{i}$.

(b) $P(y\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow y^4 - 9y^2 + 20 = 0$ et $-2y^3 + 8y = 0$. Or $-2y^3 + 8y = -2y(y^2 - 4)$ s'annule pour $y \in \{0\,;2\,;-2\}$. Et $y^4 - 9y^2 + 20 = (y^2-4)(y^2-5)$ s'annule pour $y^2 = 4$ ou $y^2 = 5$. Les deux parties sont nulles en même temps seulement pour $y = 2$ ou $y = -2$. Les racines imaginaires pures de P sont donc $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

(c) $P(2\mathrm{i}) = 0$, donc $P(z) = (z - 2\mathrm{i})Q(z)$ avec Q de degré 3. En $-2\mathrm{i}$: $0 = (-4\mathrm{i})Q(-2\mathrm{i})$, donc $Q(-2\mathrm{i}) = 0$ et Q se factorise par $z + 2\mathrm{i}$. Ainsi P se factorise par $T(z) = (z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i}) = z^2 + 4$. Or $(z^2+4)(z^2 + bz + c) = z^4 + bz^3 + (c+4)z^2 + 4bz + 4c$. Par identification : $b = 2$, puis $c + 4 = 9$ donne $c = 5$. Vérifications : $4b = 8$ et $4c = 20$.
Donc $P(z) = (z^2+4)(z^2 + 2z + 5)$.

(d) $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2\mathrm{i}$ ou $z = -2\mathrm{i}$. Pour $z^2 + 2z + 5$: $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4\mathrm{i})^2$, d'où $z = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$.
Donc $\mathcal{S} = \{2\mathrm{i}\,;-2\mathrm{i}\,;-1+2\mathrm{i}\,;-1-2\mathrm{i}\}$.

Ex. 46 ★★★ **Un paramètre à régler**

(a) $P(2) = 2^3 + m \times 2^2 + 10 \times 2 - 12 = 8 + 4m + 20 - 12 = 4m + 16$. Or 2 est racine de P si et seulement si $P(2) = 0$, c'est-à-dire $4m + 16 = 0$.
Donc 2 est racine de P si et seulement si $m = -4$.

(b) Avec $m = -4$, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 10z - 12$ et $P(2) = 0$. Pour tout z, $(z-2)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b-2)z^2 + (c-2b)z - 2c$. Deux polynômes égaux pour tout z ont les mêmes coefficients. On identifie : $b - 2 = -4$, donc $b = -2$; $c - 2b = 10$, donc $c = 10 + 2b = 6$.
Vérification avec le terme constant : $-2c = -12$, c'est bien juste. Ainsi, pour tout z,
$P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 6)$.

Ex. 46 **(suite)**

(c) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $P(z)=0$ si et seulement si $z=2$ ou $z^2-2z+6=0$. Pour le trinôme à coefficients réels, $\Delta=(-2)^2-4\times 6=-20=(2\sqrt{5}\,\mathrm{i})^2$. Comme $\Delta<0$, il a deux racines conjuguées : $z_1=\frac{2-2\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{2}=1-\sqrt{5}\,\mathrm{i}$ et $z_2=1+\sqrt{5}\,\mathrm{i}$. On garde la racine 2 : $\mathcal{S}=\{2\,;1-\sqrt{5}\,\mathrm{i}\,;1+\sqrt{5}\,\mathrm{i}\}$.

(d) $z_1z_2=(1-\sqrt{5}\,\mathrm{i})(1+\sqrt{5}\,\mathrm{i})=1+5=6$. Le produit des trois solutions vaut donc $2\times 6=12$. Le terme constant de P vaut -12, c'est l'opposé du produit. Explication : pour tout z, $P(z)=(z-2)(z-z_1)(z-z_2)$. En $z=0$: $P(0)=(-2)(-z_1)(-z_2)=-2z_1z_2$. Le terme constant $P(0)$ est donc l'opposé du produit des racines.

Ex. 47 ★★★ **Une racine à dénicher**

(a) $P(1)=1-4+6-4+5=4$, $P(-1)=1+4+6+4+5=20$ et $P(2)=16-32+24-8+5=5$. Comme $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}^4=1$: $P(\mathrm{i})=1+4\mathrm{i}-6-4\mathrm{i}+5=0$. Seul i est racine de P, car 1, -1 et 2 ne l'annulent pas.

(b) Les coefficients de P sont réels. Par les propriétés du conjugué (somme, produit, puissance), on a donc $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$ pour tout z. Ainsi $P(-\mathrm{i})=P(\overline{\mathrm{i}})=\overline{P(\mathrm{i})}=\overline{0}=0$: $-\mathrm{i}$ est racine de P.

(c) Comme $P(\mathrm{i})=0$, il existe Q de degré 3 tel que $P(z)=(z-\mathrm{i})Q(z)$. En $-\mathrm{i}$: $0=(-2\mathrm{i})Q(-\mathrm{i})$, donc $Q(-\mathrm{i})=0$ et $Q(z)=(z+\mathrm{i})R(z)$. D'où $P(z)=(z^2+1)R(z)$, avec R de degré 2 et de coefficient dominant 1. Pour tout z, $(z^2+1)(z^2+bz+c)=z^4+bz^3+(c+1)z^2+bz+c$. On identifie : $b=-4$ et $c+1=6$, donc $c=5$. Vérifications : coefficient de z, $b=-4$; terme constant, $c=5$.
Donc $P(z)=(z^2+1)(z^2-4z+5)$.

(d) $P(z)=0$ si et seulement si $z^2+1=0$ ou $z^2-4z+5=0$. D'une part, $z^2+1=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$ s'annule en i et $-\mathrm{i}$. D'autre part, $\Delta=16-20=-4=(2\mathrm{i})^2$, d'où $z=\frac{4\pm 2\mathrm{i}}{2}$, soit $2+\mathrm{i}$ ou $2-\mathrm{i}$.
Donc $\mathcal{S}=\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\,;2+\mathrm{i}\,;2-\mathrm{i}\}$. Ce sont quatre racines distinctes. Or un polynôme de degré 4 a au plus 4 racines : il n'y en a pas d'autre.

Ex. 48 ★★★ **La somme de cubes d'Inès**

(a) $4^3=64$, donc $z^3-4^3=z^3-64$, et non z^3+64 : c'est une erreur de signe. D'ailleurs $P(4)=128\neq 0$, donc 4 n'est pas racine de P et P ne peut pas se factoriser par $z-4$. Correction : $(-4)^3=-64$, donc $z^3+64=z^3-(-4)^3$. Le rappel avec $a=-4$ donne, pour tout z, $P(z)=(z+4)(z^2-4z+16)$.
Vérification : $P(-4)=-64+64=0$.

(b) $P(z)=0$ si et seulement si $z=-4$ ou $z^2-4z+16=0$. Pour ce trinôme à coefficients réels, $\Delta=16-64=-48=(4\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2$. Ses racines sont donc conjuguées : $z=\frac{4\pm 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}=2\pm 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Ainsi $\mathcal{S}=\{-4\,;2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,;2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\}$.

(c) $|-4|=4$ et $|2\pm 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}|=\sqrt{4+12}=4$. Les trois solutions ont le même module, 4. C'était prévisible : si $z^3=-64$, alors $|z|^3=|z^3|=64$, donc $|z|=4$.

(d) On pose $Z=z-1$. L'équation s'écrit $P(Z)=0$, donc $Z\in\{-4\,;2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,;2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\}$. Comme $z=Z+1$, on obtient $\mathcal{S}=\{-3\,;3+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,;3-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\}$.

(e) Non, Lucas a tort. Supposons qu'un tel P ait trois racines distinctes α, β, γ, toutes non réelles. Les coefficients étant réels, $\overline{\alpha}$ est racine, et $\overline{\alpha}\neq\alpha$ car α n'est pas réel. Or un polynôme de degré 3 a au plus 3 racines, donc $\overline{\alpha}\in\{\beta\,;\gamma\}$, par exemple $\overline{\alpha}=\beta$. De même, $\overline{\gamma}$ est une racine différente de γ, donc $\overline{\gamma}\in\{\alpha\,;\overline{\alpha}\}$. En conjuguant, $\gamma\in\{\overline{\alpha}\,;\alpha\}=\{\beta\,;\alpha\}$, ce qui contredit le fait que les racines sont distinctes. Ici, par exemple, z^3+64 a la racine réelle -4.