50 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Taux de variation et sécante

À retenir : Taux de f entre a et b : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, même ordre en haut et en bas. C'est le coefficient directeur de la sécante. Calcule $f(a)$ et $f(b)$ à part : $(2+h)^2 = 4+4h+h^2$. Un taux nul dit seulement que $f(a)=f(b)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : taux de variation entre deux réels** — Calcule le taux de variation de f entre les deux réels donnés. Donne la valeur exacte.

(a) $f(x) = 3x^2 - 1$ entre 1 et 3.

(b) $f(x) = x^3$ entre -2 et 1.

(c) $f(x) = \dfrac{6}{x}$ entre 2 et 3.

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ entre 16 et 25.

(e) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 7$ entre -4 et 2.

(f) $f(x) = x^2 + 2x$ entre -3 et 1.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : taux entre a et a + h** — Pour tout réel h non nul, écris sous forme simplifiée le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(a) $f(x) = x^2 + 5$ et $a = 3$.

(b) $f(x) = 4x - 1$ et $a = 2$.

(c) $f(x) = 2x^2 - x$ et $a = -1$.

(d) $f(x) = -x^2 + 3x$ et $a = 2$.

(e) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $a = 1$ (avec $1 + h > 0$).

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — Inès étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$. Pour chaque calcul d'Inès, repère l'erreur puis corrige-la.

(a) « Entre 1 et 4 : $\frac{f(4)-f(1)}{1-4} = \frac{15}{-3} = -5$. » Explique l'erreur et donne le bon taux.

(b) « $f(-2+h) = 4 + h^2 - 3 = 1 + h^2$, donc le taux entre -2 et $-2+h$ vaut h. » Corrige ce calcul.

(c) « $f(-3) = -3^2 - 3 = -12$, donc le taux entre -3 et 0 vaut 3 : la sécante monte. » Corrige, puis conclus.

(d) « Pour tout réel h, $f(1+h) = f(1) + h$. » Montre avec $h = 1$ que c'est faux.

Ex. 4 ★★☆ **Une sécante et son équation** — Soit $f(x) = x^3 - 2x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On note A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses -1 et 2.

(a) Calcule les coordonnées de A et de B.

(b) Calcule le coefficient directeur de la sécante (AB).

(c) Donne une équation de la droite (AB).

(d) D est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0. La sécante (AD) monte-t-elle ou descend-elle ? Justifie.

Ex. 5 ★★☆ **La vitesse moyenne de Malik** — À vélo, Malik a parcouru $d(t) = 0{,}5t^2 + 4t$ mètres au bout de t secondes, pour $0 \leqslant t \leqslant 20$.

(a) Calcule sa vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 10$.

(b) Calcule sa vitesse moyenne entre $t = 10$ et $t = 20$.

(c) Pour tout réel h non nul (avec $0 \leqslant 4 + h \leqslant 20$), exprime sa vitesse moyenne entre 4 et $4 + h$.

(d) Déduis-en sa vitesse moyenne entre 4 s et 4,1 s.

Ex. 6 ★★☆ **Vrai ou faux sur les sécantes** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie.

(a) Si $f(x) = x^2 - 6x$, le taux de variation de f entre 1 et 5 est nul, donc f est constante sur $[1\,;5]$.

(b) Pour $g(x) = -3x + 2$, le taux de variation de g entre deux réels distincts a et b vaut toujours -3.

(c) Pour $k(x) = \frac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, la sécante passant par les points d'abscisses 1 et 2 a pour coefficient directeur 2.

(d) Pour une fonction p, si $p(0) = -1$ et si le taux de variation de p entre 0 et 2 vaut 3, alors $p(2) = 5$.

Ex. 7 ★★☆ **Les pentes des sécantes en Python** — Soit $f(x) = x^3 + x$ et $A(1\,;2)$ sur $\mathcal{C}_f$. Ben écrit ce programme :

```
def f(x):
    return x**3 + x

a = 1
pentes = []
for h in [1, 0.1, 0.01, 0.001]:
    pentes.append(round((f(a + h) - f(a)) / h, 4))
print(pentes)
```

(a) Que représente chaque nombre de la liste `pentes` pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

(b) Montre que, pour tout réel h non nul, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ vaut $4 + 3h + h^2$.

(c) Déduis-en la liste affichée par le programme.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Vers quelle valeur ces pentes semblent-elles se rapprocher quand h devient proche de 0 ?

Ex. 8 ★★★ **Les sécantes d'une parabole** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Montre que, pour tous réels distincts a et b, le taux de variation de f entre a et b vaut $a + b - 4$.

(b) Déduis-en le taux de f entre -3 et 5. Vérifie-le en calculant $f(-3)$ et $f(5)$ séparément. La sécante monte-t-elle ?

(c) Détermine le réel b tel que la sécante entre 1 et b soit parallèle à la droite $d : y = 3x - 7$.

(d) Montre que la sécante entre a et b est horizontale si et seulement si $a + b = 4$. Vérifie-le avec $a = -1$, puis donne une équation de cette sécante.

(e) Montre que les sécantes entre 0 et 2 et entre -3 et 5 sont parallèles. Sont-elles confondues ? Justifie.

Ex. 9 ★★★ **La balle de Yanis** — Yanis lance une balle vers le haut. Au bout de t secondes, elle est à la hauteur $z(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$ mètres, pour $0 \leqslant t \leqslant 4$.

(a) Calcule la vitesse moyenne de la balle entre $t = 0$ et $t = 1$, avec son unité.

(b) Noé affirme : « Entre $t = 1$ et $t = 3$, la vitesse moyenne est nulle, donc la balle n'a pas bougé. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Calcule la vitesse moyenne entre $t = 3$ et $t = 4$. Que traduit son signe ?

(d) Montre que, pour tout réel h non nul tel que $-2 \leqslant h \leqslant 2$, la vitesse moyenne entre 2 et $2 + h$ vaut $-5h$.

(e) Déduis-en le signe de cette vitesse moyenne selon que $h > 0$ ou $h < 0$, puis interprète-le pour le mouvement de la balle.

Ex. 10 ★★★ **Les sécantes de la racine carrée** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

(a) Calcule le taux de variation de f entre 9 et 1 (dans cet ordre).

(b) Montre que, pour tous réels positifs et distincts a et b, le taux de variation de f entre a et b vaut $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

(c) Déduis-en que toutes les sécantes de $\mathcal{C}_f$ montent. Avec ce résultat, compare les pentes des sécantes entre 1 et 4 et entre 36 et 49.

(d) Zoé écrit : « $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1+\sqrt{h}-1}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h}$ ». Repère son erreur, puis donne le bon taux simplifié pour $h > 0$.

2. *Nombre dérivé : limite du taux de variation*

À retenir : $f'(a)$ est la limite du taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$: on factorise par h, on simplifie ($h \neq 0$), puis h tend vers 0. Ex. : taux $8 - h$, donc $f'(a) = 8$, un nombre sans h. Pas de limite finie : f n'est pas dérivable en a.

Ex. 11 ★☆☆ **Automatismes : simplifier le taux** — Pour tout réel h non nul (et $h \neq -6$ au dernier item), calcule et simplifie le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(a) $f(x) = 5x + 2$ et $a = -1$.

(b) $f(x) = x^2 + 3x$ et $a = 1$.

(c) $f(x) = -x^2$ et $a = -2$.

(d) $f(x) = x^3$ et $a = 3$ (développe $(3 + h)^3$).

(e) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $a = 6$ (réduis au même dénominateur).

Ex. 12 ★☆☆ **Automatismes : du taux au nombre dérivé** — Dans chaque item, h désigne un réel non nul. Réponds sans calculatrice.

(a) Le taux de f entre 3 et $3 + h$ vaut $7 - 2h$. Donne $f'(3)$.

(b) On sait que $k(2 + h) - k(2) = 3h - h^2$. Donne $k'(2)$.

(c) Pour $h \neq -1$, le taux de g entre -1 et $-1 + h$ vaut $\dfrac{-3}{1+h}$. Donne $g'(-1)$.

(d) Le taux de u entre 5 et $5 + h$ vaut $10 + h$. Lina écrit $u'(5) = 10 + h$. Corrige-la.

(e) $m(4) = 9$ et le taux de m entre 4 et $4 + h$ vaut $2 + 3h$. Ilyes affirme : « $m'(4) = 9$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(f) $p(x) = -5$ pour tout réel x. Calcule le taux de p entre a et $a + h$, puis $p'(a)$.

Ex. 13 ★★☆ **Nombre dérivé d'un polynôme par la définition** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$, et $a = -1$.

(a) Calcule $f(-1)$.

(b) Développe et réduis $f(-1 + h)$.

(c) Tom remplace directement h par 0 dans $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$. Qu'obtient-il ? Explique pourquoi c'est une impasse.

(d) Pour tout réel h non nul, factorise $f(-1 + h) - f(-1)$ par h, puis simplifie le taux.

(e) Conclus : f est-elle dérivable en -1 ? Donne $f'(-1)$.

Ex. 14 ★★☆ **Conjecturer avec un tableau, puis prouver** — On considère $f(x) = x^3 + x$. Le tableau donne le taux $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pour quelques valeurs de h ; une case manque.

h	0,1	0,01	0,001	−0,1	−0,01	−0,001
taux	4,31	4,0301	4,003001	?	3,9701	3,997001

(a) Calcule $f(1)$ et $f(0{,}9)$, puis la valeur manquante du tableau ($h = -0{,}1$).

(b) Vers quel nombre le taux semble-t-il tendre quand h tend vers 0, avec h positif ou négatif ?

(c) Sacha affirme : « Le tableau prouve la valeur de $f'(1)$. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Développe $(1+h)^3$, simplifie le taux pour tout réel h non nul, puis conclus sur $f'(1)$.

Ex. 15 ★★☆ **Pentes des sécantes en Python** — On étudie $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 9$ (quantité conjuguée : approfondissement). Ben écrit ce programme, qui affiche 0.1623, 0.1662, 0.1666 puis 0.1667.

```
from math import sqrt

def f(x):
    return sqrt(x)

a = 9
for h in [1, 0.1, 0.01, 0.001]:
    print(round((f(a + h) - f(a)) / h, 4))
```

(a) Que représente, pour la courbe $\mathcal{C}_f$, chacun des nombres affichés ?

(b) Modifie une ligne du programme pour tester $h = -0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$.

(c) Pour $h \neq 0$ et $h \geqslant -9$, multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{9+h}+3$ pour montrer que le taux vaut $\frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$.

(d) Conclus : f est-elle dérivable en 9 ? Donne $f'(9)$ et compare-le aux affichages.

Ex. 16 ★★☆ **Racine carrée et valeur absolue en 0** — On pose $f(x) = 3\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$, et $g(x) = |x|$ pour tout réel x, avec $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

(a) Pour $h > 0$, simplifie le taux de variation de f entre 0 et h.

(b) Calcule ce taux pour $h = 0{,}01$ puis pour $h = 0{,}000\,1$. Conclus sur la dérivabilité de f en 0.

(c) Calcule le taux de variation de g entre 0 et h, pour $h > 0$ puis pour $h < 0$.

(d) Nadia affirme : « g est définie en 0, donc elle est dérivable en 0. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 17 ★★☆ **Corriger une erreur sur un quotient** — On considère $f(x) = \frac{6}{x}$ et $a = 3$, avec $h \neq 0$ et $h \neq -3$. Hugo écrit : $f(3+h) - f(3) = \frac{6}{3+h} - 2 = \frac{4}{3+h}$.

(a) Explique l'erreur de Hugo, puis calcule correctement $f(3+h) - f(3)$ en réduisant au même dénominateur.

(b) Simplifie le taux de variation de f entre 3 et $3+h$.

(c) Conclus : f est-elle dérivable en 3 ? Donne $f'(3)$.

(d) À l'aide de $f(3+h) \approx f(3) + h \times f'(3)$ avec $h = -0{,}03$, donne une valeur approchée de $\frac{6}{2{,}97}$.

Ex. 18 ★★★ **Vitesse instantanée d'un chariot** — Un chariot roule sur un rail. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $d(t) = t^3 + 2t$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Calcule la vitesse moyenne du chariot entre $t = 2$ et $t = 3$.

(b) Développe $(2+h)^3$. Montre ensuite que, pour tout réel h non nul avec $h \geqslant -2$, le taux de variation de d entre 2 et $2+h$ vaut $14 + 6h + h^2$.

(c) Noah écrit : « $d(2) = 12$, donc la vitesse à $t = 2$ est 12 m/s ». Inès écrit : « la vitesse à $t = 2$ est $14 + 6h + h^2$ m/s ». Corrige-les tous les deux, puis conclus.

(d) Avec l'approximation $d(2+h) \approx d(2) + h \times d'(2)$, donne une valeur approchée de $d(1{,}9)$. Calcule ensuite $d(1{,}9)$ et l'erreur commise.

Ex. 19 ★★★ **Tangentes parallèles à une droite** — On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{2}{x}$, sa courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = -0{,}5x + 4$. Dans les deux premières questions, a est un réel non nul.

(a) Pour tout réel h non nul avec $h \neq -a$, montre en réduisant au même dénominateur que $f(a+h) - f(a) = \frac{-2h}{a(a+h)}$.

(b) Déduis-en que f est dérivable en a et exprime $f'(a)$ en fonction de a.

(c) Détermine les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à d. Donne une équation de chacune de ces tangentes.

(d) Vrai ou faux : « $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en au moins un point ». Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Une rampe : dérivable ou pas en 1 ?** — Le profil d'une rampe est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ si $x > 1$. Pour $h > 0$, Zoé calcule le taux entre 1 et $1+h$ (valeurs arrondies) :

h	0,1	0,01	0,001
taux	0,9762	0,9975	0,9998

Elle conjecture que f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 1$.

(a) Pour $h > 0$, montre à l'aide de la quantité conjuguée (approfondissement) que le taux de f entre 1 et $1+h$ vaut $\frac{2}{\sqrt{1+h}+1}$.

Ex. 20 (suite)

(b) Déduis-en la limite de ce taux quand h tend vers 0 avec $h > 0$.

(c) Pour $-1 \leqslant h < 0$, calcule le taux de f entre 1 et $1+h$, puis sa limite quand h tend vers 0.

(d) Zoé a-t-elle raison d'affirmer que f est dérivable en 1 ? Justifie, et explique pourquoi son tableau ne suffisait pas.

3. *Lire un nombre dérivé : pente de la tangente*

À retenir : $f(a)$: ordonnée du point de contact ; $f'(a)$: pente $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ de la tangente, avec deux points de la tangente.
Tangente en $A(1\,;4)$ passant par $B(3\,;0)$: $f'(1) = -2$.
Tangente horizontale : $f'(a) = 0$; tangente verticale : pas de nombre dérivé.

Ex. 21 ★☆☆ **Lire f(a) et f′(a) avec deux points de la tangente** — Automatismes. Donne les résultats sous forme de valeurs exactes.

(a) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(2\,;1)$ passe par $B(4\,;7)$. Donne $f(2)$ et $f'(2)$.

(b) La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $A(-1\,;4)$ passe par $B(1\,;-2)$. Calcule $g'(-1)$.

(c) La tangente à $\mathcal{C}_u$ au point $A(3\,;-5)$ passe par $B(0\,;-5)$. Donne $u(3)$ et $u'(3)$.

(d) La tangente à $\mathcal{C}_k$ au point $A(1\,;2)$ passe par $B(-3\,;0)$. Calcule $k'(1)$.

(e) Au point $A(0\,;-3)$ de $\mathcal{C}_m$, la tangente monte de 2 quand on avance de 5. Donne $m(0)$ et $m'(0)$.

(f) La tangente à $\mathcal{C}_p$ en $A(-2\,;0)$ passe par $B(-1\,;-4)$. Zoé dit : « $p(-2) = 0$, donc $p'(-2) = 0$ ». Corrige-la.

Ex. 22 ★☆☆ **Pente d'une tangente donnée par une droite** — Automatismes. Dans chaque question, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe.

(a) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 7$. Donne $f'(2)$.

(b) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(-1\,;6)$ est parallèle à l'axe des abscisses. Donne $f(-1)$ et $f'(-1)$.

(c) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(0\,;3)$ a pour équation $y = 3 - 2x$. Donne $f'(0)$.

(d) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5 est parallèle à la droite d'équation $x + 4y = 2$. Donne $f'(5)$.

(e) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(3\,;2)$ passe par l'origine O. Calcule $f'(3)$.

(f) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(4\,;-2)$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}x$. Donne $f(4)$ et $f'(4)$.

Ex. 23 ★★☆ **Les erreurs de Lina et Tom** — Lina étudie une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $A(1\,;2)$ et $C(3\,;12)$. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A et en C se coupent au point $B(2\,;5)$.

(a) Lina écrit : $f'(1) = \frac{12-2}{3-1} = 5$. Que représente en réalité ce nombre 5 ?

(b) Calcule correctement $f'(1)$.

(c) Tom affirme : « la tangente en A passe par $B(2\,;5)$, donc $f'(2) = 5$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(d) Tom ajoute : « B est sur la tangente en A et sur la tangente en C, donc ces deux tangentes sont parallèles ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur des tangentes** — La courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ passe par $A(-2\,;1)$ et $F(0\,;3)$. La tangente à $\mathcal{C}_g$ en A passe par $B(-4\,;5)$, et la tangente en F passe par $G(1\,;1)$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « $g'(-2) = \dfrac{5-1}{-2-(-4)} = 2$ ».

(b) « La tangente en A descend, donc $g(-2) < 0$ ».

(c) « Les tangentes à $\mathcal{C}_g$ en A et en F sont parallèles ».

(d) « La tangente à $\mathcal{C}_g$ en A passe par le point $H(1\,;-5)$ ».

Ex. 25 ★★☆ **Exploiter un tableau de valeurs de f et de f′** — Une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne quelques valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	16	11	0	-11	-16	-9
$f'(x)$	0	-9	-12	-9	0	15

(a) En quels points de $\mathcal{C}_f$ du tableau la tangente est-elle horizontale ? Donne leurs coordonnées.

(b) Inès affirme : « $f(0) = 0$, donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O est horizontale ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Quelles tangentes du tableau sont parallèles entre elles ? Laquelle est parallèle à la droite d'équation $y = 5 - 12x$?

(d) Donne les coordonnées du point d'abscisse 4 de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Ex. 26 ★★☆ **La balle de Nadia : vitesse moyenne ou instantanée** — Nadia lance une balle vers le haut. Son altitude, en mètres, au bout de t secondes est $z(t)$. La courbe de z passe par $A(1\,;20)$ et $C(3\,;30)$. La tangente en A passe par $B(2\,;35)$ et la tangente au point $S(2{,}5\,;31{,}25)$ est horizontale.

(a) Calcule la vitesse moyenne de la balle entre $t = 1$ et $t = 3$.

(b) Calcule la vitesse instantanée $z'(1)$ de la balle à $t = 1$.

(c) Que vaut la vitesse instantanée à $t = 2{,}5$? Que vaut l'altitude à cet instant ?

Ex. 26 (suite)

(d) La tangente au point $T(4\,;20)$ passe par $U(5\,;5)$. Calcule $z'(4)$ et interprète son signe.

Ex. 27 ★★☆ Coût marginal et graduations — Produire q objets coûte $C(q)$ euros. Sur le graphique de Léo, un carreau vaut 10 objets en abscisse et 100 € en ordonnée. La courbe de C passe par $A(20\,;900)$ et la tangente en A passe par $B(50\,;1\,500)$.

(a) Léo écrit : « de A à B, on avance de 3 carreaux et on monte de 6, donc $C'(20)=2$ ». Explique son erreur et donne $C'(20)$.

(b) Interprète $C'(20)$ en termes de coût marginal.

(c) Sans calculatrice, donne une valeur approchée de $C(21)$.

(d) La tangente au point d'abscisse 60 est parallèle à la droite d'équation $y=12x+300$. Compare les coûts marginaux pour 20 et 60 objets.

Ex. 28 ★★★ Retrouver une parabole avec ses tangentes — La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois réels inconnus. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $A(0\,;3)$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A passe par $B(2\,;-1)$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

(a) Donne c. Puis lis $f'(0)$ à l'aide des points A et B.

(b) Montre que, pour tout réel h non nul, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=ah+b$. Déduis-en la valeur de b.

(c) Exprime le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ en fonction de a, b et h. Utilise la tangente au point d'abscisse 1 pour trouver a.

(d) Kenza affirme : « la tangente au point d'abscisse 1 est horizontale, donc c'est l'axe des abscisses ». A-t-elle raison ? Justifie et donne l'équation de cette tangente.

(e) Le point $E(3\,;6)$ est-il sur $\mathcal{C}_f$? La tangente en E est-elle parallèle à la droite d'équation $y=4x$? Justifie.

Ex. 29 ★★★ Une tangente qui se redresse jusqu'à la verticale — La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=3\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(4\,;6)$ passe aussi par $B(8\,;9)$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $O(0\,;0)$ est l'axe des ordonnées.

(a) Lis $f'(4)$ à l'aide de A et B. Donne ensuite l'équation de la tangente en A.

(b) Montre que, pour tout réel h non nul avec $h>-4$, $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{3}{\sqrt{4+h}+2}$. Retrouve ainsi $f'(4)$.

(c) Sans calculatrice, donne une valeur approchée de $3\sqrt{4{,}08}$ grâce à l'approximation affine en 4.

(d) Montre que, pour tout $h>0$, le taux de variation de f entre 0 et h vaut $\dfrac{3}{\sqrt{h}}$. Calcule-le pour $h=0{,}01$, $h=0{,}0001$ et $h=0{,}000001$.

(e) Malo dit : « en O, la tangente est l'axe des ordonnées, donc $f'(0)=0$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 30 ★★★ Cinq tangentes à identifier — La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ passe par A, B, C, D et $E(1\,;-1)$. Le tableau donne chaque point de contact et un autre point de la tangente en ce point :

Point	A	B	C	D
Contact	$(-2\,;-1)$	$(-1\,;3)$	$(0\,;1)$	$(2\,;3)$
Autre point	$(-1\,;8)$	$(3\,;3)$	$(-2\,;7)$	$(1\,;-6)$

(a) À l'aide du tableau, calcule $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

(b) Ema écrit : « la tangente en B est la droite d'équation $y=3$, donc $f'(-1)=3$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Donne une équation de la tangente en C. Est-ce la droite d'équation $y=-3x+5$? Justifie.

(d) On admet que $f(x)=x^3-3x+1$. Montre que, pour $h\neq 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+3h$. Déduis-en $f'(1)$ et la tangente en E.

(e) Nora décrit trois tangentes : (1) horizontale et sous l'axe des abscisses ; (2) qui descend ; (3) qui monte de 9 quand on avance de 1. Associe à chacune les points concernés.

4. *Équation de la tangente*

À retenir : Tangente en a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. La pente est $f'(a)$, le point est $(a\,;f(a))$. Réduis, puis contrôle avec $x=a$. Si $a=-1$, $x-a=x+1$: $f(-1)=2$ et $f'(-1)=4$ donnent $y=4x+6$. Si $f'(a)=0$: $y=f(a)$.

Ex. 31 ★☆☆ Automatismes : écrire la tangente — Dans chaque cas, f est dérivable en a. Donne l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, puis contrôle avec $x=a$.

(a) $a=3$, $f(3)=5$ et $f'(3)=2$.

(b) $a=-2$, $f(-2)=1$ et $f'(-2)=3$.

(c) $a=0$, $f(0)=-4$ et $f'(0)=5$.

(d) $a=1$, $f(1)=7$ et $f'(1)=0$.

(e) $a=-3$, $f(-3)=-2$ et $f'(-3)=-\dfrac{1}{2}$.

(f) $a=4$, $f'(4)=-3$ et $f(4)=6$.

Ex. 32 ★☆☆ Automatismes : lecture inverse — La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a l'équation réduite donnée. Donne $f'(a)$ et $f(a)$.

(a) $a=2$ et $y=3x-1$.

(b) $a=-1$ et $y=-2x+4$.

(c) $a=0$ et $y=7x-3$.

(d) $a=5$ et $y=-4$.

(e) $a=-3$ et $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

Ex. 33 ★★☆ **Deux copies à corriger** — Soit $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$. On cherche la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

(a) Calcule $f(-1)$, puis montre que pour tout réel h non nul, $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -9 + 2h$.

(b) Déduis-en que f est dérivable en -1 et donne $f'(-1)$.

(c) Lina écrit $T : y = 8(x+1) - 9$. Repère son erreur, puis donne l'équation réduite correcte de T.

(d) Tom écrit $T : y = -9(x-1) + 8$. Montre avec le contrôle en $x = -1$ que c'est faux, puis nomme son erreur.

Ex. 34 ★★☆ **Une tangente qui dépend d'un paramètre** — Soit k un réel et $f(x) = x^2 + kx$. On note T_k la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(a) Montre que pour tout réel h non nul, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 + k + h$. Déduis-en $f'(1)$.

(b) Détermine l'équation réduite de T_k.

(c) Pour quelle valeur de k la tangente T_k passe-t-elle par $K(3\,;11)$?

(d) Ben affirme : « on peut choisir k pour que T_k passe par l'origine ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 35 ★★☆ **Tangente à la courbe de la racine carrée** — Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

(a) Montre que pour tout réel h non nul avec $h \geqslant -4$, $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$.

(b) Déduis-en que f est dérivable en 4 et donne $f'(4)$.

(c) Donne l'équation réduite de T, puis contrôle-la.

(d) Détermine les coordonnées du point où T coupe l'axe des abscisses.

Ex. 36 ★★☆ **Tangente horizontale, tangente de pente imposée** — Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On admet que pour tout réel a et tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 4 - 2a - h$.

(a) Déduis-en $f'(a)$ pour tout réel a.

(b) Détermine le point A de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale, puis l'équation de cette tangente.

(c) Détermine le point B de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à $d : y = 6x - 1$, puis l'équation réduite de cette tangente.

Ex. 37 ★★☆ **Deux tangentes parallèles** — Soit $f(x) = x^3 - 4x$. On admet que $(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$.

(a) Montre que pour tout réel a et tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2 - 4 + 3ah + h^2$. Déduis-en $f'(a)$.

(b) Calcule $f'(2)$ et $f'(-2)$. Que dire des tangentes T_1 et T_2 aux points d'abscisses 2 et -2 ?

Ex. 37 (suite)

(c) Donne les équations réduites de T_1 et T_2. Sont-elles confondues ?

(d) Vrai ou faux : la tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à T_1. Justifie.

Ex. 38 ★★★ **Tangentes issues d'un point** — Soit $f(x) = x^2 + x - 1$ pour tout réel x, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Pour tout réel a, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

(a) Montre que pour tout réel a et tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + 1 + h$. Déduis-en $f'(a)$.

(b) Montre que T_a a pour équation réduite $y = (2a+1)x - a^2 - 1$, puis contrôle avec $x = a$.

(c) Détermine les réels a pour lesquels T_a passe par $K(0\,;-5)$, puis donne l'équation réduite de chacune de ces tangentes.

(d) Détermine les points où ces deux tangentes coupent l'axe des abscisses.

(e) Léa affirme que par tout point de l'axe des ordonnées passent exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$. A-t-elle raison ? Justifie avec $E(0\,;-1)$ puis $F(0\,;1)$.

Ex. 39 ★★★ **Tangentes à une hyperbole** — Soit $f(x) = \frac{3}{x}$ pour tout réel $x \neq 0$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. Pour tout réel $a \neq 0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

(a) Montre que pour tout réel h non nul tel que $a + h \neq 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-3}{a(a+h)}$. Déduis-en $f'(a)$.

(b) Donne l'équation réduite de T_{-1}, puis contrôle-la avec $x = -1$.

(c) Montre que pour tout réel $a \neq 0$, T_a a pour équation réduite $y = -\frac{3}{a^2}x + \frac{6}{a}$.

(d) Pour $a > 0$, T_a coupe l'axe des abscisses en P et l'axe des ordonnées en Q. Montre que l'aire du triangle OPQ ne dépend pas de a.

(e) Détermine les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite $D : y = -12x + 1$, puis donne l'équation de ces tangentes.

Ex. 40 ★★★ **Retrouver une parabole à partir d'une tangente** — Soit $f(x) = px^2 + qx + r$, où p, q et r sont des réels. On sait que $\mathcal{C}_f$ passe par $B(0\,;2)$ et que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 2$.

(a) Nour lit sur l'équation de la tangente que $f(1) = -2$ et $f'(1) = 3$. A-t-elle raison ? Justifie et donne $f(1)$ et $f'(1)$.

(b) Montre que pour tout réel h non nul, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2p + q + ph$. Déduis-en $f'(1)$ en fonction de p et q.

(c) Déduis-en les valeurs de p, q et r.

(d) Calcule $f'(-1)$ par la définition et donne l'équation réduite de la tangente en -1. Montre qu'elle coupe la tangente en 1 sur l'axe des ordonnées.

Ex. 40 (suite)

(e) Détermine, par la définition, le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale, puis l'équation de cette tangente.

5. *Problèmes : vitesse, pente et approximation affine*

À retenir : Vitesse instantanée $= p'(a)$ (en m/s) ; coût marginal $C'(q) \approx$ coût de la $(q+1)$-ième unité ; pente $0{,}08 = 8\,\%$. $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$: a simple, h petit, signe gardé, $\sqrt{15{,}9} = r(16-0{,}1)$.

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : approximation affine sans calculatrice** — Sans calculatrice, utilise l'approximation affine $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$.

(a) On sait que $f(2) = 7$ et $f'(2) = 3$. Estime $f(2{,}1)$.

(b) On sait que $g(5) = -1$ et $g'(5) = 4$. Estime $g(4{,}98)$.

(c) Avec $r(x) = \sqrt{x}$, $r(4) = 2$ et $r'(4) = \frac{1}{4}$, estime $\sqrt{4{,}02}$.

(d) Avec $k(x) = \frac{1}{x}$, $k(1) = 1$ et $k'(1) = -1$, estime $\frac{1}{0{,}98}$.

(e) Avec $c(x) = x^3$ et $c'(2) = 12$, choisis a et h, puis estime $1{,}99^3$.

(f) Par approximation affine en $a = 3$, avec $u(3) = 5$, on a obtenu $u(3{,}1) \approx 5{,}4$. Quelle valeur de $u'(3)$ a été utilisée ?

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : vitesses, pentes et unités** — Réponds en donnant l'unité.

(a) Un mobile a pour position $p(t) = 2t^2 - t$ (en m, t en s). Calcule sa vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 3$.

(b) Écris la pente 0,035 en pourcentage.

(c) Une route monte de 6 m pour 150 m parcourus à l'horizontale. Donne sa pente en pourcentage.

(d) Une rampe a une pente de 12 %. De combien monte-t-elle pour 250 m parcourus à l'horizontale ?

(e) Convertis en km/h une vitesse instantanée de 15 m/s.

(f) La position d'un car est $x(t)$ (en km, t en h) et $x'(2) = 80$. Interprète ce nombre dans le contexte.

Ex. 43 ★★☆ **Une bille lâchée d'un pont** — Lucas lâche une bille du haut d'un pont, sans vitesse initiale. Après t secondes, la bille a parcouru $d(t) = 4{,}9t^2$ mètres. Elle touche l'eau 44,1 m plus bas.

(a) Montre que la bille touche l'eau à l'instant $t = 3$ s.

(b) Calcule la vitesse moyenne de la bille pendant sa chute.

(c) Montre que pour tout réel h non nul, $\frac{d(3+h)-d(3)}{h} = 29{,}4 + 4{,}9h$.

(d) Déduis-en la vitesse de la bille au moment où elle touche l'eau, en m/s puis en km/h.

Ex. 44 ★★☆ **Vrai ou faux : pièges de contexte** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) On sait que $f(5) = 2$ et $f'(5) = -3$. « On a $f(5{,}1) \approx -1$. »

(b) Avec $r(x) = \sqrt{x}$ et $r'(9) = \frac{1}{6}$: « Pour estimer $\sqrt{8{,}9}$, on écrit $8{,}9 = 8 + 0{,}9$. »

(c) « Une route de pente 5 % monte de 5 m tous les 10 m parcourus à l'horizontale. »

(d) Un mobile a pour position $p(t) = t^3$ (en m, t en s). « En 2 s, il a parcouru 8 m, donc sa vitesse à $t = 2$ s est de 4 m/s. »

(e) $C(q)$ est le coût (en €) de q objets et $C'(50) = 12$. « Fabriquer le 51e objet coûte environ 12 €. »

Ex. 45 ★★☆ **Coût marginal d'un atelier de bougies** — L'atelier de Chloé fabrique des bougies. Le coût de production de q bougies est $C(q) = 0{,}01q^2 + 5q + 200$ euros, pour $0 \leqslant q \leqslant 500$.

(a) Calcule $C(100)$.

(b) Montre que pour tout réel h non nul, $\frac{C(100+h)-C(100)}{h} = 7 + 0{,}01h$.

(c) Déduis-en le coût marginal $C'(100)$. Rédige une phrase avec l'unité.

(d) Calcule le coût exact de la 101e bougie, puis compare-le à $C'(100)$.

(e) Manon affirme : « Le coût marginal pour 100 bougies est $\frac{C(100)}{100} = 8$ €. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **La pente d'une rampe de skate** — Le profil d'une rampe de skate est donné par $f(x) = 0{,}05x^2$, pour $0 \leqslant x \leqslant 4$: x est la distance horizontale et $f(x)$ la hauteur, en mètres. Inès écrit ce programme :

```
def f(x):
    return 0.05 * x**2

for h in [1, 0.1, 0.01]:
    pente = (f(2 + h) - f(2)) / h
    print(round(pente, 4))
```

(a) Que représente la valeur `pente` calculée dans la boucle ?

(b) Qu'affiche ce programme ? Quelle valeur de $f'(2)$ peux-tu conjecturer ?

(c) Montre que pour tout réel h non nul, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0{,}2 + 0{,}05h$, puis déduis-en $f'(2)$.

(d) Lina affirme : « Au point d'abscisse 2, la pente de la rampe est de 0,2 %. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 47 ★★☆ **Racine carrée près de 25 et erreur commise** — On note $r(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

(a) Montre que pour tout réel h non nul tel que $h \geqslant -25$, $\frac{\sqrt{25+h}-5}{h} = \frac{1}{\sqrt{25+h}+5}$.

(b) Déduis-en que r est dérivable en 25 et donne $r'(25)$.

Ex. 47 **(suite)**

(c) Sans calculatrice, donne une valeur approchée de $\sqrt{25{,}4}$.

(d) À l'aide de la calculatrice, donne l'erreur commise à la question précédente, arrondie à 0,000 01.

(e) Montre que $(5+0{,}1h)^2 = 25 + h + 0{,}01h^2$. Déduis-en que pour tout réel $h > 0$, $\sqrt{25+h} < 5 + 0{,}1h$.

Ex. 48 ★★★ **Un cube de métal qui se dilate** — Maëlle étudie un cube de métal d'arête 1 dm. Le volume d'un cube d'arête x dm est $V(x) = x^3$ dm³. Chauffée ou refroidie, l'arête devient $1 + h$ dm, avec h petit. On rappelle que 1 dm³ $= 1\,000$ cm³.

(a) Montre que pour tout réel h non nul, $\dfrac{V(1+h)-V(1)}{h} = 3 + 3h + h^2$. Déduis-en que V est dérivable en 1 et donne $V'(1)$.

(b) Sans calculatrice, estime par approximation affine le volume du cube chauffé, d'arête 1,003 dm, puis celui du cube refroidi, d'arête 0,997 dm.

(c) Montre que pour tout réel h, $V(1+h) - (1+3h) = 3h^2 + h^3$. Déduis-en l'erreur exacte commise pour $1{,}003^3$ et vérifie à la calculatrice.

(d) Justifie que pour $0 < h \leqslant 0{,}005$, l'erreur commise en remplaçant $V(1+h)$ par $1 + 3h$ est inférieure à 0,1 cm³.

Ex. 49 ★★★ **Une voiture de course sur piste d'essai** — Sur une piste d'essai, une voiture de course démarre à l'instant $t = 0$. Pendant les 10 premières secondes, elle a parcouru $d(t) = 6t^2 - 0{,}2t^3$ mètres à l'instant t (en s). On rappelle que 1 m/s = 3,6 km/h.

(a) Calcule la vitesse moyenne de la voiture entre $t = 0$ et $t = 10$, en m/s puis en km/h.

(b) Ben écrit ce programme :

```
def d(t):
    return 6*t**2 - 0.2*t**3

for h in [-0.1, -0.01, 0.01, 0.1]:
    v = ...
    print(round(v, 4))
```

Complète la ligne `v = ...` pour que `v` soit la vitesse moyenne entre $t = 5$ et $t = 5 + h$. Qu'affiche alors le programme ? Quelle conjecture fais-tu ?

(c) Montre que pour tout réel h non nul, $\dfrac{d(5+h)-d(5)}{h} = 45 + 3h - 0{,}2h^2$. Déduis-en la vitesse instantanée à $t = 5$, en m/s puis en km/h.

(d) Noah affirme : « La vitesse moyenne sur les 10 s est de 144 km/h, donc à $t = 5$ s la voiture roulait à moins de 150 km/h. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 50 ★★★ **Le profil d'une route de col** — Yanis monte un col à vélo. Le profil de la route est donné par $f(x) = 0{,}12x - 0{,}02x^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$: x est la distance horizontale depuis le départ et $f(x)$ le dénivelé, tous deux en km. La pente au point d'abscisse a, en pourcentage, vaut $100 \times f'(a)$.

(a) Soit a un réel de $[0\,;4]$. Montre que pour tout réel h non nul (avec $a + h$ dans $[0\,;4]$), $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0{,}12 - 0{,}04a - 0{,}02h$. Déduis-en $f'(a)$.

(b) Calcule la pente moyenne de la route entre $x = 0$ et $x = 3$, puis la pente au départ. Exprime-les en pourcentage.

(c) Détermine le point de la route où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 0{,}08x$, puis l'équation de cette tangente.

(d) Détermine le point où la tangente est horizontale. Quel dénivelé, en mètres, Yanis a-t-il gagné en l'atteignant ?