1. Taux de variation et sécante

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : taux de variation entre deux réels**

(a) $f(1)=2$ et $f(3)=26$. Le taux vaut $\frac{26-2}{3-1}=\frac{24}{2}=12$.

(b) $f(-2)=-8$ et $f(1)=1$. Le taux vaut $\frac{1-(-8)}{1-(-2)}=\frac{9}{3}=3$.

(c) $f(2)=3$ et $f(3)=2$. Le taux vaut $\frac{2-3}{3-2}=-1$: la sécante descend.

(d) $f(16)=4$ et $f(25)=5$. Le taux vaut $\frac{5-4}{25-16}=\frac{1}{9}$.

(e) $f(-4)=2+7=9$ et $f(2)=-1+7=6$. Le taux vaut $\frac{6-9}{2-(-4)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$: c'est le coefficient de x, car f est affine.

(f) $f(-3)=9-6=3$ et $f(1)=3$. Le taux vaut $\frac{3-3}{1-(-3)}=0$. Pourtant, f n'est pas constante : $f(-1)=-1$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : taux entre a et a + h**

(a) $f(3)=14$ et $f(3+h)=9+6h+h^2+5=14+6h+h^2$. Le taux vaut $\frac{6h+h^2}{h}=6+h$.

(b) $f(2)=7$ et $f(2+h)=8+4h-1=7+4h$. Le taux vaut $\frac{4h}{h}=4$. Il ne dépend pas de h : f est affine.

(c) $f(-1)=3$ et $f(-1+h)=2(1-2h+h^2)+1-h=3-5h+2h^2$. Le taux vaut $\frac{-5h+2h^2}{h}=-5+2h$.

(d) $f(2)=2$ et $f(2+h)=-(4+4h+h^2)+6+3h=2-h-h^2$. Le taux vaut $\frac{-h-h^2}{h}=-1-h$.

(e) $f(1)=3$ et $f(1+h)=\frac{3}{1+h}$. On a $\frac{3}{1+h}-3=\frac{3-3-3h}{1+h}=\frac{-3h}{1+h}$, donc le taux vaut $\frac{-3}{1+h}$.

Ex. 3 ★★☆ **Les erreurs d'Inès**

(a) Inès n'a pas pris le même ordre en haut et en bas, ce qui change le signe. $f(1)=-2$ et $f(4)=13$, donc le taux vaut $\frac{13-(-2)}{4-1}=\frac{15}{3}=5$.

(b) $(-2+h)^2=4-4h+h^2$ et non $4+h^2$. Donc $f(-2+h)=1-4h+h^2$ et $f(-2)=1$. Le taux vaut $\frac{-4h+h^2}{h}=-4+h$.

(c) Il faut des parenthèses : $f(-3)=(-3)^2-3=6$. Avec $f(0)=-3$, le taux vaut $\frac{-3-6}{0-(-3)}=\frac{-9}{3}=-3$. Le taux est négatif, donc la sécante descend.

(d) $f(2)=4-3=1$, alors que $f(1)+1=-2+1=-1$. Comme $1\neq -1$, l'égalité est fausse pour $h=1$, donc l'affirmation d'Inès est fausse.

Ex. 4 ★★☆ **Une sécante et son équation**

(a) $f(-1)=-1+2=1$ et $f(2)=8-4=4$, donc $A(-1\,;1)$ et $B(2\,;4)$.

(b) Le coefficient directeur de (AB) est le taux de variation de f entre -1 et 2 : $\frac{4-1}{2-(-1)}=\frac{3}{3}=1$.

(c) (AB) a pour équation $y=1\times(x+1)+1$, soit $y=x+2$. Vérification avec B : $2+2=4$.

(d) $f(0)=0$, donc $D(0\,;0)$. Le taux vaut $\frac{0-1}{0-(-1)}=-1$. Il est négatif, donc la sécante (AD) descend.

Ex. 5 ★★☆ **La vitesse moyenne de Malik**

(a) $d(0)=0$ et $d(10)=50+40=90$. Sa vitesse moyenne vaut $\frac{90-0}{10-0}=9$ m/s.

(b) $d(20)=200+80=280$. Sa vitesse moyenne vaut $\frac{280-90}{20-10}=19$ m/s.

(c) $d(4)=24$ et $d(4+h)=0{,}5(16+8h+h^2)+16+4h=24+8h+0{,}5h^2$. Sa vitesse moyenne vaut $\frac{8h+0{,}5h^2}{h}=8+0{,}5h$ m/s.

(d) On prend $h=0{,}1$: $8+0{,}5\times 0{,}1=8{,}05$. Sa vitesse moyenne vaut 8,05 m/s.

Ex. 6 ★★☆ **Vrai ou faux sur les sécantes**

(a) Faux. $f(1)=-5$ et $f(5)=-5$, donc le taux est bien nul. Mais $f(3)=-9\neq -5$: f n'est pas constante.

(b) Vrai. $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{-3b+2+3a-2}{b-a}=\frac{-3(b-a)}{b-a}=-3$.

(c) Faux. $k(1)=4$ et $k(2)=2$, donc le coefficient directeur vaut $\frac{2-4}{2-1}=-2$: la sécante descend.

(d) Vrai. Le taux vaut $\frac{p(2)-p(0)}{2-0}=\frac{p(2)-(-1)}{2}=3$, donc $p(2)+1=6$, soit $p(2)=5$.

Ex. 7 ★★☆ **Les pentes des sécantes en Python**

(a) Chaque nombre est le coefficient directeur de la sécante qui passe par $A(1\,;2)$ et par le point $M(1+h\,;f(1+h))$, pour le pas h choisi.

(b) $(1+h)^3=(1+2h+h^2)(1+h)=1+3h+3h^2+h^3$, donc $f(1+h)=2+4h+3h^2+h^3$. Le taux vaut $\frac{4h+3h^2+h^3}{h}=4+3h+h^2$.

(c) Pour $h=1$: 8 ; pour $h=0{,}1$: 4,31 ; pour $h=0{,}01$: 4,0301 ; pour $h=0{,}001$: $4{,}003001\approx 4{,}003$. Le programme affiche `[8.0, 4.31, 4.0301, 4.003]`.

(d) Plus h est proche de 0, plus $3h+h^2$ est proche de 0. Les pentes semblent donc se rapprocher de 4.

Ex. 8 ★★★ **Les sécantes d'une parabole**

(a) $f(b)-f(a)=b^2-4b+1-(a^2-4a+1)=(b^2-a^2)-4(b-a)=(b-a)(b+a)-4(b-a)=(b-a)(a+b-4)$. Comme $b-a\neq 0$, on simplifie : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=a+b-4$.

(b) Avec la formule : $-3+5-4=-2$. Vérification : $f(-3)=9+12+1=22$ et $f(5)=25-20+1=6$, donc $\frac{6-22}{5-(-3)}=\frac{-16}{8}=-2$. Le taux est négatif : la sécante descend.

(c) Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, ici 3. Il faut $1+b-4=3$, donc $b=6$. Contrôle : $f(1)=-2$ et $f(6)=13$, donc $\frac{13-(-2)}{6-1}=\frac{15}{5}=3$.

(d) La sécante est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $a+b-4=0$, soit $a+b=4$. Avec $a=-1$, on obtient $b=5$: $f(-1)=1+4+1=6$ et $f(5)=25-20+1=6$, donc le taux vaut $\frac{6-6}{5-(-1)}=0$. Cette sécante a pour équation $y=6$.

(e) Entre 0 et 2, le taux vaut $0+2-4=-2$, comme entre -3 et 5 : même coefficient directeur, donc les sécantes sont parallèles. $f(0)=1$, donc la première a pour équation $y=-2x+1$. $f(-3)=22$, donc la seconde a pour équation $y=-2(x+3)+22=-2x+16$. Comme $1\neq 16$, elles ne sont pas confondues.

Ex. 9 ★★★ **La balle de Yanis**

(a) $z(0)=1{,}5$ et $z(1)=-5+20+1{,}5=16{,}5$. Vitesse moyenne : $\frac{16{,}5-1{,}5}{1-0}=15$ m/s.

(b) $z(3)=-45+60+1{,}5=16{,}5=z(1)$, donc la vitesse moyenne vaut bien $\frac{16{,}5-16{,}5}{3-1}=0$ m/s. Mais $z(2)=-20+40+1{,}5=21{,}5$: la balle est montée, puis redescendue à la même hauteur. Noé a tort : une vitesse moyenne nulle signifie seulement $z(1)=z(3)$.

(c) $z(4)=-80+80+1{,}5=1{,}5$. Vitesse moyenne : $\frac{1{,}5-16{,}5}{4-3}=-15$ m/s. Elle est négative : la hauteur diminue, la balle redescend (la sécante descend).

(d) $z(2)=21{,}5$. On développe : $z(2+h)=-5(4+4h+h^2)+40+20h+1{,}5=21{,}5-5h^2$. Pour $h\neq 0$: $\frac{z(2+h)-z(2)}{h}=\frac{-5h^2}{h}=-5h$.

(e) Si $h>0$, alors $-5h<0$: après $t=2$, la balle descend. Si $h<0$, alors $-5h>0$: avant $t=2$, elle monte. D'ailleurs, $z(2+h)=21{,}5-5h^2\leqslant 21{,}5$: la balle est au plus haut à $t=2$, à 21,5 m.

Ex. 10 ★★★ **Les sécantes de la racine carrée**

(a) $f(9)=3$ et $f(1)=1$. Le taux vaut $\frac{f(1)-f(9)}{1-9}=\frac{1-3}{-8}=\frac{1}{4}$: on garde le même ordre en haut et en bas.

(b) Le taux vaut $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$. Or $b-a=(\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2=(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})$, et $\sqrt{b}-\sqrt{a}\neq 0$ car $a\neq b$. On simplifie : le taux vaut $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

(c) Comme $a\neq b$, on a $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, donc le taux est positif : toute sécante monte. Entre 1 et 4 : $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$; entre 36 et 49 : $\frac{1}{6+7}=\frac{1}{13}$. Comme $\frac{1}{3}>\frac{1}{13}$, la sécante entre 1 et 4 est la plus pentue.

(d) Zoé a écrit $\sqrt{1+h}=1+\sqrt{h}$, ce qui est faux : pour $h=3$, $\sqrt{4}=2$ alors que $1+\sqrt{3}\neq 2$. Avec le résultat général ($a=1$ et $b=1+h$), pour $h>0$: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{1+\sqrt{1+h}}$.

2. *Nombre dérivé : limite du taux de variation*

Ex. 11 ★☆☆ **Automatismes : simplifier le taux**

(a) $f(-1)=-3$ et $f(-1+h)=-5+5h+2=-3+5h$, donc taux $=\frac{5h}{h}=5$.

(b) $f(1)=4$ et $f(1+h)=1+2h+h^2+3+3h=4+5h+h^2$, donc taux $=\frac{h(5+h)}{h}=5+h$.

(c) $f(-2)=-4$ et $f(-2+h)=-(4-4h+h^2)=-4+4h-h^2$, donc taux $=\frac{h(4-h)}{h}=4-h$.

(d) $(3+h)^3=27+27h+9h^2+h^3$ et $f(3)=27$, donc taux $=\frac{h(27+9h+h^2)}{h}=27+9h+h^2$.

(e) $f(6)=\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{6+h}-\frac{1}{2}=\frac{6-(6+h)}{2(6+h)}=\frac{-h}{2(6+h)}$, donc taux $=-\frac{1}{2(6+h)}=-\frac{1}{12+2h}$.

Ex. 12 ★☆☆ **Automatismes : du taux au nombre dérivé**

(a) Quand h tend vers 0, $7-2h$ tend vers 7 : $f'(3)=7$.

(b) Taux $=\frac{h(3-h)}{h}=3-h$, qui tend vers 3 quand h tend vers 0 : $k'(2)=3$.

(c) Quand h tend vers 0, $1+h$ tend vers 1, donc le taux tend vers -3 : $g'(-1)=-3$.

(d) Faux : $u'(5)$ est une limite, il ne contient pas h. Quand h tend vers 0, $10+h$ tend vers 10 : $u'(5)=10$.

(e) Non : 9 est l'image $m(4)$. Le taux tend vers 2 quand h tend vers 0, donc $m'(4)=2\neq m(4)$.

(f) $\frac{p(a+h)-p(a)}{h}=\frac{-5-(-5)}{h}=\frac{0}{h}=0$ pour tout $h\neq 0$, donc $p'(a)=0$ (fonction constante).

Ex. 13 ★★☆ **Nombre dérivé d'un polynôme par la définition**

(a) $f(-1) = 2 \times 1 + 1 + 3 = 6$.

(b) $f(-1+h) = 2(1-2h+h^2) + 1 - h + 3 = 6 - 5h + 2h^2$.

(c) Il obtient $\frac{f(-1)-f(-1)}{0} = \frac{0}{0}$, qui n'a pas de sens : on ne divise pas par 0. Il faut d'abord simplifier par h, pour $h \neq 0$.

(d) $f(-1+h) - f(-1) = -5h + 2h^2 = h(-5+2h)$. Pour tout réel h non nul : taux $= \frac{h(-5+2h)}{h} = -5 + 2h$.

(e) Quand h tend vers 0, $-5+2h$ tend vers -5, donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -5$.

Ex. 14 ★★☆ **Conjecturer avec un tableau, puis prouver**

(a) $f(1) = 2$ et $f(0{,}9) = 0{,}729 + 0{,}9 = 1{,}629$. Pour $h = -0{,}1$: $\frac{1{,}629-2}{-0{,}1} = \frac{-0{,}371}{-0{,}1} = 3{,}71$.

(b) Pour h positif comme négatif, le taux semble tendre vers 4 : on conjecture $f'(1) = 4$.

(c) Non : le tableau ne donne que quelques valeurs de h. Il permet une conjecture, pas une preuve : il faut calculer la limite du taux.

(d) $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$, donc $f(1+h) = 2 + 4h + 3h^2 + h^3$. Pour $h \neq 0$: taux $= \frac{h(4+3h+h^2)}{h} = 4 + 3h + h^2$, qui tend vers 4 quand h tend vers 0.
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

Ex. 15 ★★☆ **Pentes des sécantes en Python**

(a) Chaque nombre est $\frac{f(9+h)-f(9)}{h}$: le coefficient directeur de la sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par $A(9\,;3)$ et $M(9+h\,;\sqrt{9+h})$.

(b) On remplace la ligne de la boucle par `for h in [-0.1, -0.01, -0.001]:`. Le programme affiche alors 0.1671, 0.1667 et 0.1667.

(c) $f(9) = 3$. $\frac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \frac{(\sqrt{9+h}-3)(\sqrt{9+h}+3)}{h(\sqrt{9+h}+3)} = \frac{(9+h)-9}{h(\sqrt{9+h}+3)} = \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$.

(d) Quand h tend vers 0, $\sqrt{9+h}$ tend vers 3, donc le taux tend vers $\frac{1}{6}$. f est dérivable en 9 et $f'(9) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$: c'est la valeur dont s'approchent les affichages.

Ex. 16 ★★☆ **Racine carrée et valeur absolue en 0**

(a) $f(0) = 0$ et $f(h) = 3\sqrt{h}$. Pour $h > 0$: taux $= \frac{3\sqrt{h}}{h} = \frac{3\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{3}{\sqrt{h}}$.

Ex. 16 **(suite)**

(b) Pour $h = 0{,}01$: $\frac{3}{0{,}1} = 30$; pour $h = 0{,}000\,1$: $\frac{3}{0{,}01} = 300$. Quand h tend vers 0, $\frac{3}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand que l'on veut : pas de limite finie, donc f n'est pas dérivable en 0.

(c) $g(0) = 0$. Pour $h > 0$: $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Pour $h < 0$: $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$.

(d) Faux. Le taux vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$: il ne s'approche pas d'un même nombre quand h tend vers 0.
Donc g n'est pas dérivable en 0, bien qu'elle y soit définie.

Ex. 17 ★★☆ **Corriger une erreur sur un quotient**

(a) Hugo a soustrait 2 au numérateur sans l'écrire sur le dénominateur $3+h$. Correct : $\frac{6}{3+h} - \frac{2(3+h)}{3+h} = \frac{6-6-2h}{3+h} = \frac{-2h}{3+h}$.

(b) Pour tout réel h non nul : taux $= \frac{-2h}{h(3+h)} = \frac{-2}{3+h}$.

(c) Quand h tend vers 0, $3+h$ tend vers 3, donc le taux tend vers $-\frac{2}{3}$: f est dérivable en 3 et $f'(3) = -\frac{2}{3}$.

(d) $f(2{,}97) \approx f(3) + (-0{,}03) \times f'(3) = 2 + (-0{,}03) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 2 + 0{,}02 = 2{,}02$.
(Valeur exacte : $\frac{6}{2{,}97} \approx 2{,}0202$.)

Ex. 18 ★★★ **Vitesse instantanée d'un chariot**

(a) $d(2) = 8 + 4 = 12$ et $d(3) = 27 + 6 = 33$. La vitesse moyenne vaut $\frac{33-12}{3-2} = 21$ m/s.

(b) $(2+h)^3 = (4 + 4h + h^2)(2+h) = 8 + 4h + 8h + 4h^2 + 2h^2 + h^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$.
Donc $d(2+h) = 8 + 12h + 6h^2 + h^3 + 4 + 2h = 12 + 14h + 6h^2 + h^3$, et $d(2+h) - d(2) = 14h + 6h^2 + h^3 = h(14 + 6h + h^2)$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $\frac{h(14+6h+h^2)}{h} = 14 + 6h + h^2$.

(c) Noah confond la position $d(2) = 12$ m et la vitesse $d'(2)$. Inès donne le taux, et non sa limite : une vitesse instantanée ne dépend pas de h. Quand h tend vers 0, $6h + h^2$ tend vers 0, donc le taux tend vers 14. Ainsi d est dérivable en 2 et $d'(2) = 14$: à $t = 2$, la vitesse vaut 14 m/s.

(d) On prend $h = -0{,}1$: $d(1{,}9) \approx d(2) + (-0{,}1) \times 14 = 12 - 1{,}4 = 10{,}6$. Valeur exacte : $1{,}9^3 = 6{,}859$, donc $d(1{,}9) = 6{,}859 + 3{,}8 = 10{,}659$. L'erreur vaut $10{,}659 - 10{,}6 = 0{,}059$ m, soit environ 6 cm.

Ex. 19 ★★★ **Tangentes parallèles à une droite**

(a) $f(a+h)-f(a)=\frac{2}{a+h}-\frac{2}{a}=\frac{2a-2(a+h)}{a(a+h)}=\frac{2a-2a-2h}{a(a+h)}=\frac{-2h}{a(a+h)}$.

(b) Pour $h\neq 0$, le taux vaut $\frac{-2h}{h\times a(a+h)}=\frac{-2}{a(a+h)}$. Quand h tend vers 0, $a+h$ tend vers a, donc le taux tend vers $\frac{-2}{a^2}$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a)=-\frac{2}{a^2}$.

(c) La tangente est parallèle à d si et seulement si $f'(a)=-0{,}5$, c'est-à-dire $\frac{2}{a^2}=\frac{1}{2}$, soit $a^2=4$, donc $a=2$ ou $a=-2$. En $A(2\,;1)$: $y=-0{,}5(x-2)+1$, soit $y=-0{,}5x+2$. En $B(-2\,;-1)$: $y=-0{,}5(x+2)-1$, soit $y=-0{,}5x-2$. Ces deux tangentes ont le coefficient directeur de d, mais pas la même ordonnée à l'origine : elles sont strictement parallèles à d.

(d) Faux. Une tangente horizontale demande $f'(a)=0$, c'est-à-dire $-\frac{2}{a^2}=0$. C'est impossible, car le numérateur -2 n'est jamais nul. Il n'existe donc aucun point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.

Ex. 20 ★★★ **Une rampe : dérivable ou pas en 1 ?**

(a) $f(1)=1$ et, pour $h>0$, $f(1+h)=2\sqrt{1+h}-1$. Donc $f(1+h)-f(1)=2(\sqrt{1+h}-1)$. Le taux vaut $\frac{2(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{2((1+h)-1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{2h}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{2}{\sqrt{1+h}+1}$.

(b) Quand h tend vers 0, $\sqrt{1+h}$ tend vers 1, donc le taux tend vers $\frac{2}{1+1}=1$. Les valeurs du tableau sont cohérentes avec cette limite.

(c) Pour $-1\leqslant h<0$, on a $0\leqslant 1+h<1$, donc $f(1+h)=1$. Ainsi $f(1+h)-f(1)=1-1=0$ et le taux vaut $\frac{0}{h}=0$: la fonction est constante à gauche de 1. Quand h tend vers 0 avec $h<0$, le taux tend vers 0.

(d) Non. Quand h tend vers 0, le taux tend vers 1 pour $h>0$ et vers 0 pour $h<0$. Il ne s'approche pas d'un seul nombre, donc il n'a pas de limite : f n'est pas dérivable en 1. Le tableau ne donne que quelques valeurs, et seulement pour $h>0$: il permet une conjecture, pas une preuve, et il oublie les h négatifs. Au point $(1\,;1)$, la courbe forme un angle.

3. *Lire un nombre dérivé : pente de la tangente*

Ex. 21 ★☆☆ **Lire f(a) et f′(a) avec deux points de la tangente**

(a) $f(2)=1$, l'ordonnée de A. $f'(2)=\frac{7-1}{4-2}=\frac{6}{2}=3$.

(b) $g'(-1)=\frac{-2-4}{1-(-1)}=\frac{-6}{2}=-3$: la tangente descend.

(c) $u(3)=-5$. A et B ont la même ordonnée : la tangente est horizontale, donc $u'(3)=0$, alors que $u(3)\neq 0$.

Ex. 21 (suite)

(d) $k'(1)=\frac{0-2}{-3-1}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. On garde le même ordre des points en haut et en bas.

(e) $m(0)=-3$, l'ordonnée de A. La tangente monte de 2 quand x augmente de 5, donc $m'(0)=\frac{2}{5}$.

(f) Zoé confond $p(-2)$ et $p'(-2)$. $p(-2)=0$ est l'ordonnée de A, mais la pente de la tangente est $p'(-2)=\frac{-4-0}{-1-(-2)}=\frac{-4}{1}=-4\neq 0$.

Ex. 22 ★★☆ **Pente d'une tangente donnée par une droite**

(a) Des droites parallèles ont le même coefficient directeur : $f'(2)=3$.

(b) $f(-1)=6$. La tangente est horizontale, donc $f'(-1)=0$.

(c) Le coefficient directeur de $y=-2x+3$ est -2, donc $f'(0)=-2$. Le 3 est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire $f(0)$.

(d) $x+4y=2$ s'écrit $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$. Des droites parallèles ont le même coefficient directeur, donc $f'(5)=-\frac{1}{4}$.

(e) $f'(3)=\frac{2-0}{3-0}=\frac{2}{3}$.

(f) $f(4)=-2$ (et on vérifie que $-\frac{1}{2}\times 4=-2$). $f'(4)=-\frac{1}{2}$.

Ex. 23 ★★☆ **Les erreurs de Lina et Tom**

(a) A et C sont deux points de la courbe, pas de la tangente. 5 est le taux de variation de f entre 1 et 3, c'est-à-dire le coefficient directeur de la sécante (AC).

(b) On prend deux points de la tangente, A et B : $f'(1)=\frac{5-2}{2-1}=3$.
Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.

(c) Non. B est sur la tangente en A, pas forcément sur $\mathcal{C}_f$: 5 est l'ordonnée d'un point de cette tangente, ni $f(2)$ ni une pente. $f'(2)$ serait la pente de la tangente au point d'abscisse 2, et l'énoncé ne la donne pas.

(d) Non. B et C sont deux points de la tangente en C, donc $f'(3)=\frac{12-5}{3-2}=7$. Or $f'(1)=3\neq 7$: les deux tangentes n'ont pas le même coefficient directeur. Elles ne sont pas parallèles : elles se coupent en B.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur des tangentes**

(a) Faux. L'ordre des points n'est pas le même en haut (B puis A) et en bas (A puis B). Correctement : $g'(-2)=\frac{5-1}{-4-(-2)}=\frac{4}{-2}=-2$.

(b) Faux. La tangente descend, donc $g'(-2)<0$. Mais $g(-2)$ est l'ordonnée de A : $g(-2)=1>0$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Vrai. $g'(0) = \frac{1-3}{1-0} = -2$ et $g'(-2) = -2$: les deux tangentes ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

(d) Vrai. La tangente en A a pour pente $g'(-2) = -2$. Avec A et H : $\frac{-5-1}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2$, la même pente.
Donc H est sur la droite qui passe par A avec la pente -2, c'est-à-dire sur la tangente en A.

Ex. 25 ★★☆ **Exploiter un tableau de valeurs de f et de f′**

(a) $f'(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = 2$. Les tangentes sont horizontales aux points $(-2\,;16)$ et $(2\,;-16)$, même si $f(-2)$ et $f(2)$ ne sont pas nuls.

(b) Non. $f(0) = 0$ dit seulement que $\mathcal{C}_f$ passe par O. La pente de la tangente en O est $f'(0) = -12 \neq 0$: cette tangente descend, elle n'est pas horizontale.

(c) $f'(-1) = f'(1) = -9$: les tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 sont parallèles (et aussi les deux tangentes horizontales, en -2 et 2). La droite $y = -12x + 5$ a pour coefficient directeur $-12 = f'(0)$: c'est la tangente en O qui lui est parallèle.

(d) La tangente passe par $(3\,;-9)$ et a pour pente $f'(3) = 15$: si on avance de 1, on monte de 15. Le point cherché est $(4\,;-9+15) = (4\,;6)$.

Ex. 26 ★★☆ **La balle de Nadia : vitesse moyenne ou instantanée**

(a) On utilise deux points de la courbe (sécante (AC)) : $\frac{30-20}{3-1} = 5$. La vitesse moyenne est de 5 m/s.

(b) On utilise deux points de la tangente en A : $z'(1) = \frac{35-20}{2-1} = 15$. À $t = 1$, la balle monte à 15 m/s.

(c) La tangente en S est horizontale, donc $z'(2{,}5) = 0$: la balle est un instant immobile, au sommet. Son altitude n'est pas nulle : $z(2{,}5) = 31{,}25$ m.

(d) $z'(4) = \frac{5-20}{5-4} = -15$. Ce nombre est négatif : la tangente descend, la balle redescend à 15 m/s.

Ex. 27 ★★☆ **Coût marginal et graduations**

(a) Les deux axes n'ont pas la même unité : il faut compter en graduations, pas en carreaux. $C'(20) = \frac{1\,500-900}{50-20} = \frac{600}{30} = 20$.

(b) Le coût marginal pour 20 objets est de 20 € : produire un objet de plus coûte environ 20 €.

(c) $C(21) = C(20+1) \approx C(20) + 1 \times C'(20) = 900 + 20 = 920$.
Donc $C(21) \approx 920$ €.

Ex. 27 **(suite)**

(d) Des droites parallèles ont le même coefficient directeur, donc $C'(60) = 12$. Comme $12 < 20$, le coût marginal est plus faible pour 60 objets que pour 20 objets.

Ex. 28 ★★★ **Retrouver une parabole avec ses tangentes**

(a) A est sur $\mathcal{C}_f$, donc $f(0) = 3$. Or $f(0) = c$, donc $c = 3$. A et B sont deux points de la tangente en A, donc $f'(0) = \frac{-1-3}{2-0} = -2$.

(b) Pour tout réel h non nul : $f(h) - f(0) = ah^2 + bh + c - c = ah^2 + bh$.
Donc $\frac{f(h)-f(0)}{h} = ah + b$. Quand h tend vers 0, ce taux tend vers b.
Donc $f'(0) = b$. Comme $f'(0) = -2$, on obtient $b = -2$.

(c) $f(1+h) = a(1+2h+h^2) + b + bh + c$ et $f(1) = a + b + c$.
Donc $f(1+h) - f(1) = 2ah + ah^2 + bh$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $2a + b + ah$. Il tend vers $2a + b$ quand h tend vers 0, donc $f'(1) = 2a + b$. La tangente est horizontale, donc $f'(1) = 0$. On a donc $2a - 2 = 0$, soit $a = 1$. Ainsi $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

(d) Non. Une tangente horizontale a pour équation $y = f(1)$, et $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$. La tangente est $y = 0 \times (x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2$. Ce n'est pas l'axe des abscisses : $f'(1) = 0$ ne veut pas dire $f(1) = 0$.

(e) $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$, donc E est sur $\mathcal{C}_f$. Pour $h \neq 0$: $f(3+h) - f(3) = 9 + 6h + h^2 - 6 - 2h + 3 - 6 = h^2 + 4h$. Le taux vaut donc $h + 4$, qui tend vers 4. f est dérivable en 3 et $f'(3) = 4$. La tangente en E a donc le même coefficient directeur que la droite $y = 4x$: ces deux droites sont parallèles.

Ex. 29 ★★★ **Une tangente qui se redresse jusqu'à la verticale**

(a) A et B sont deux points de la tangente, donc $f'(4) = \frac{9-6}{8-4} = \frac{3}{4}$. La tangente a pour équation $y = \frac{3}{4}(x-4) + 6$, soit $y = \frac{3}{4}x + 3$.

(b) Pour tout réel h non nul avec $h > -4$: $\frac{3\sqrt{4+h}-6}{h} = \frac{3(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{3(4+h-4)}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{3}{\sqrt{4+h}+2}$. Quand h tend vers 0, ce taux tend vers $\frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$. f est dérivable en 4 et $f'(4) = \frac{3}{4}$.

(c) $3\sqrt{4{,}08} = f(4 + 0{,}08) \approx f(4) + 0{,}08 \times f'(4) = 6 + 0{,}08 \times 0{,}75 = 6{,}06$.

(d) Pour $h > 0$: $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{3\sqrt{h}}{h} = \frac{3}{\sqrt{h}}$, car $h = \sqrt{h} \times \sqrt{h}$.
Pour $h = 0{,}01$: $\frac{3}{0{,}1} = 30$. Pour $h = 0{,}0001$: $\frac{3}{0{,}01} = 300$.
Pour $h = 0{,}000001$: $\frac{3}{0{,}001} = 3\,000$.

Ex. 29 **(suite)**

(e) Non. Quand h tend vers 0, le taux $\frac{3}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand qu'on veut : il n'a pas de limite finie.
Donc f n'est pas dérivable en 0 et $f'(0)$ n'existe pas.
Une tangente verticale n'a pas de coefficient directeur. C'est une tangente horizontale qui donnerait un nombre dérivé nul.

Ex. 30 ★★★ **Cinq tangentes à identifier**

(a) $f'(-2) = \frac{8-(-1)}{-1-(-2)} = 9$; $f'(-1) = \frac{3-3}{3-(-1)} = 0$; $f'(0) = \frac{7-1}{-2-0} = -3$; $f'(2) = \frac{-6-3}{1-2} = 9$. Pour C et D, l'autre point est à gauche : on garde le même ordre en haut et en bas de la fraction.

(b) Non. 3 est l'ordonnée du point de contact, donc $f(-1) = 3$. $f'(-1)$ est la pente de la tangente. La droite $y = 3$ est horizontale, donc $f'(-1) = 0$.

(c) La tangente en C a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -3x + 1$. Ce n'est pas la droite $y = -3x + 5$: elles ont le même coefficient directeur -3, mais pas la même ordonnée à l'origine ($f(0) = 1 \neq 5$). Elles sont parallèles et distinctes.

(d) $f(1) = -1$ et $f(1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h + 1 = h^3 + 3h^2 - 1$.
Donc $f(1+h) - f(1) = h^3 + 3h^2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $h^2 + 3h$. Il tend vers 0, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. La tangente en E a pour équation $y = 0 \times (x-1) + (-1)$, soit $y = -1$.

(e) (1) : E, car sa tangente $y = -1$ est horizontale et $f(1) = -1 < 0$ (en B, la tangente horizontale $y = 3$ est au-dessus de l'axe). (2) : C, la seule tangente de pente négative ($f'(0) = -3$). (3) : A et D, car $f'(-2) = f'(2) = 9$.

4. *Équation de la tangente*

Ex. 31 ★☆☆ **Automatismes : écrire la tangente**

(a) $y = 2(x-3) + 5$, soit $y = 2x - 1$. Contrôle : $2 \times 3 - 1 = 5 = f(3)$.

(b) $y = 3(x-(-2)) + 1 = 3(x+2) + 1$, soit $y = 3x + 7$. Contrôle : $3 \times (-2) + 7 = 1 = f(-2)$.

(c) $y = 5(x-0) + (-4)$, soit $y = 5x - 4$. Contrôle : $x = 0$ donne $-4 = f(0)$.

(d) $y = 0 \times (x-1) + 7$, soit $y = 7$: la tangente est horizontale. Contrôle : pour $x = 1$, $y = 7 = f(1)$.

(e) $y = -\frac{1}{2}(x+3) - 2 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2$, soit $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$. Contrôle : $\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2 = f(-3)$.

Ex. 31 **(suite)**

(f) Attention, la pente est $f'(4) = -3$ et non 6 : $y = -3(x-4) + 6$, soit $y = -3x + 18$. Contrôle : $-12 + 18 = 6 = f(4)$.

Ex. 32 ★★☆ **Automatismes : lecture inverse**

(a) $f'(2) = 3$ (coefficient directeur) et $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.

(b) $f'(-1) = -2$ et $f(-1) = -2 \times (-1) + 4 = 6$.

(c) $f'(0) = 7$ et $f(0) = 7 \times 0 - 3 = -3$: ici, seulement parce que $a = 0$, l'ordonnée à l'origine est $f(a)$.

(d) La tangente est horizontale : $f'(5) = 0$ et $f(5) = -4$.

(e) $f'(-3) = \frac{1}{2}$ et $f(-3) = \frac{1}{2} \times (-3) + 2 = \frac{1}{2}$.

Ex. 33 ★★☆ **Deux copies à corriger**

(a) $f(-1) = 2 + 5 + 1 = 8$. $f(-1+h) = 2(1 - 2h + h^2) + 5 - 5h + 1 = 8 - 9h + 2h^2$. Pour tout $h \neq 0$: $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{-9h+2h^2}{h} = -9 + 2h$.

(b) Quand h tend vers 0, $-9 + 2h$ tend vers -9.
Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -9$.

(c) Lina a inversé $f(-1)$ et $f'(-1)$: la pente est -9.
Correction : $y = -9(x+1) + 8$, soit $y = -9x - 1$.
Contrôle : $9 - 1 = 8 = f(-1)$.

(d) Pour $x = -1$, Tom obtient $y = -9 \times (-2) + 8 = 26 \neq 8$. Son erreur : avec $a = -1$, on a $x - a = x + 1$ et non $x - 1$.

Ex. 34 ★★☆ **Une tangente qui dépend d'un paramètre**

(a) $f(1) = 1 + k$ et $f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + k + kh$. Pour $h \neq 0$: $\frac{2h+h^2+kh}{h} = 2 + k + h$, qui tend vers $2 + k$.
Donc $f'(1) = 2 + k$.

(b) $y = (2+k)(x-1) + 1 + k = (2+k)x - 2 - k + 1 + k$, soit $y = (2+k)x - 1$. Contrôle : $x = 1$ donne $1 + k = f(1)$.

(c) $K \in T_k$ si et seulement si $11 = 3(2+k) - 1 = 5 + 3k$, soit $k = 2$. Contrôle : pour $k = 2$, $T_2 : y = 4x - 1$, et $4 \times 3 - 1 = 11$.

(d) Faux. Pour $x = 0$, l'équation donne $y = -1$, quel que soit k.
Donc T_k ne passe jamais par $O(0\,;0)$.

Ex. 35 ★★☆ **Tangente à la courbe de la racine carrée**

(a) On multiplie par la quantité conjuguée : $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$.

(b) Quand h tend vers 0, $\sqrt{4+h}+2$ tend vers 4. Donc f est dérivable en 4 et $f'(4) = \frac{1}{4}$.

(c) $f(4) = 2$, donc $y = \frac{1}{4}(x-4)+2$, soit $y = \frac{1}{4}x+1$. Contrôle : $1+1 = 2 = f(4)$.

(d) $\frac{1}{4}x+1 = 0$ donne $x = -4$. T coupe l'axe des abscisses en $(-4\,;0)$.

Ex. 36 ★★☆ **Tangente horizontale, tangente de pente imposée**

(a) Quand h tend vers 0, $4-2a-h$ tend vers $4-2a$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 4-2a$.

(b) On résout $4-2a = 0$, soit $a = 2$. Comme $f(2) = -4+8+1 = 5$, on a $A(2\,;5)$ et la tangente a pour équation $y = 5$.

(c) Parallèle à d, la tangente a pour pente 6 : $4-2a = 6$, soit $a = -1$. $f(-1) = -1-4+1 = -4$, donc $B(-1\,;-4)$. Tangente : $y = 6(x+1)-4$, soit $y = 6x+2$.

Ex. 37 ★★☆ **Deux tangentes parallèles**

(a) $f(a+h)-f(a) = 3a^2h+3ah^2+h^3-4h$. Pour $h \neq 0$, on divise par h : $3a^2-4+3ah+h^2$, qui tend vers $3a^2-4$.
Donc $f'(a) = 3a^2-4$.

(b) $f'(2) = 12-4 = 8$ et $f'(-2) = 12-4 = 8$. Les deux tangentes ont la même pente : T_1 et T_2 sont parallèles.

(c) $f(2) = 0$ et $f(-2) = 0$. T_1 : $y = 8(x-2)$, soit $y = 8x-16$. T_2 : $y = 8(x+2)$, soit $y = 8x+16$. Leurs ordonnées à l'origine diffèrent : elles sont distinctes.

(d) Faux : $f'(0) = -4 \neq 8$. Les pentes sont différentes, donc ces tangentes ne sont pas parallèles.

Ex. 38 ★★★ **Tangentes issues d'un point**

(a) $f(a+h) = a^2+2ah+h^2+a+h-1$, donc $f(a+h)-f(a) = 2ah+h^2+h = h(2a+1+h)$. Pour tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+1+h$. Quand h tend vers 0, ce taux tend vers $2a+1$: f est dérivable en a et $f'(a) = 2a+1$.

(b) $y = f'(a)(x-a)+f(a) = (2a+1)(x-a)+a^2+a-1 = (2a+1)x-2a^2-a+a^2+a-1$, soit $y = (2a+1)x-a^2-1$. Contrôle : avec $x = a$, on obtient $y = 2a^2+a-a^2-1 = a^2+a-1 = f(a)$.

Ex. 38 **(suite)**

(c) $K \in T_a$ équivaut à $(2a+1)\times 0-a^2-1 = -5$, soit $a^2 = 4$, donc $a = 2$ ou $a = -2$. Pour $a = 2$: $f(2) = 5$ et $f'(2) = 5$, d'où $y = 5(x-2)+5$, soit $y = 5x-5$. Pour $a = -2$: $f(-2) = 1$ et $f'(-2) = -3$, d'où $y = -3(x-(-2))+1 = -3(x+2)+1$, soit $y = -3x-5$ (contrôle : $x = -2$ donne $y = 1 = f(-2)$). Deux tangentes passent par K.

(d) $5x-5 = 0$ donne $x = 1$: T_2 coupe l'axe des abscisses en $(1\,;0)$. $-3x-5 = 0$ donne $x = -\frac{5}{3}$: T_{-2} le coupe en $\left(-\frac{5}{3}\,;0\right)$.

(e) Pour E : $-a^2-1 = -1$ donne $a^2 = 0$, donc $a = 0$ seulement. Une seule tangente passe par E : $y = x-1$. Pour F : $-a^2-1 = 1$ donne $a^2 = -2$, ce qui est impossible. Aucune tangente ne passe par F. Léa a tort.

Ex. 39 ★★★ **Tangentes à une hyperbole**

(a) $f(a+h)-f(a) = \frac{3}{a+h}-\frac{3}{a} = \frac{3a-3(a+h)}{a(a+h)} = \frac{-3h}{a(a+h)}$. Pour tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-3}{a(a+h)}$. Quand h tend vers 0, $a(a+h)$ tend vers a^2 : f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{3}{a^2}$.

(b) $f(-1) = -3$ et $f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$. $y = -3(x-(-1))+(-3) = -3(x+1)-3$, soit $y = -3x-6$. Contrôle : $x = -1$ donne $y = 3-6 = -3 = f(-1)$.

(c) $y = -\frac{3}{a^2}(x-a)+\frac{3}{a} = -\frac{3}{a^2}x+\frac{3}{a}+\frac{3}{a}$, soit $y = -\frac{3}{a^2}x+\frac{6}{a}$. Contrôle : avec $a = -1$, on retrouve $y = -3x-6$.

(d) $y = 0$ donne $\frac{3}{a^2}x = \frac{6}{a}$, soit $x = 2a$: $P(2a\,;0)$. $x = 0$ donne $y = \frac{6}{a}$: $Q\left(0\,;\frac{6}{a}\right)$. Comme $a > 0$, le triangle OPQ est rectangle en O, avec $OP = 2a$ et $OQ = \frac{6}{a}$. Son aire vaut $\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{6}{a} = 6$ unités d'aire, quel que soit a.

(e) Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, donc il faut $-\frac{3}{a^2} = -12$, soit $a^2 = \frac{1}{4}$, donc $a = \frac{1}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$. Les points sont $\left(\frac{1}{2}\,;6\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}\,;-6\right)$. Les tangentes ont pour équations $y = -12\left(x-\frac{1}{2}\right)+6 = -12x+12$ et $y = -12\left(x+\frac{1}{2}\right)-6 = -12x-12$.

Ex. 40 ★★★ **Retrouver une parabole à partir d'une tangente**

(a) Le coefficient directeur de la tangente vaut $f'(1)$, donc $f'(1) = 3$: sur ce point, Nour a raison. En revanche, -2 est l'ordonnée à l'origine de la tangente, qui n'est égale à $f(a)$ que si $a = 0$. Ici, le point de contact a pour abscisse 1, donc $f(1) = 3\times 1-2 = 1$. Nour a tort pour $f(1)$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) $f(1+h) = p(1+2h+h^2) + q(1+h) + r = p+q+r+2ph+qh+ph^2$, donc $f(1+h) - f(1) = h(2p+q+ph)$. Pour tout réel h non nul, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2p+q+ph$. Ce taux tend vers $2p+q$ quand h tend vers 0 : $f'(1) = 2p+q$.

(c) $B \in \mathcal{C}_f$ donne $f(0) = r = 2$. $f(1) = 1$ donne $p+q+2 = 1$, soit $p+q = -1$. $f'(1) = 3$ donne $2p+q = 3$. En soustrayant, on obtient $p = 4$, puis $q = -5$.
Donc $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Contrôle : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 8 - 5 = 3$.

(d) $f(-1) = 4+5+2 = 11$. $f(-1+h) = 4(1-2h+h^2) - 5(-1+h) + 2 = 11 - 13h + 4h^2$. Pour tout réel h non nul, le taux vaut $-13+4h$, qui tend vers -13 : $f'(-1) = -13$. Tangente : $y = -13(x+1) + 11$, soit $y = -13x - 2$ (contrôle : $x = -1$ donne 11). $3x - 2 = -13x - 2$ donne $x = 0$, puis $y = -2$: les deux tangentes se coupent en $(0\,;-2)$, sur l'axe des ordonnées.

(e) $f(a+h) - f(a) = 4(2ah+h^2) - 5h = h(8a - 5 + 4h)$. Pour tout réel h non nul, le taux vaut $8a - 5 + 4h$, qui tend vers $8a - 5$: $f'(a) = 8a - 5$. La tangente est horizontale si $f'(a) = 0$, soit $a = \frac{5}{8}$. $f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{16} - \frac{50}{16} + \frac{32}{16} = \frac{7}{16}$. Le point est $\left(\frac{5}{8}\,;\frac{7}{16}\right)$ et la tangente a pour équation $y = \frac{7}{16}$.

5. *Problèmes : vitesse, pente et approximation affine*

Ex. 41 ★☆☆ **Automatismes : approximation affine sans calculatrice**

(a) $2{,}1 = 2 + 0{,}1$, donc $h = 0{,}1$ et $f(2{,}1) \approx 7 + 0{,}1 \times 3 = 7{,}3$.

(b) $4{,}98 = 5 + (-0{,}02)$, donc $h = -0{,}02$ et $g(4{,}98) \approx -1 + (-0{,}02) \times 4 = -1{,}08$.

(c) $4{,}02 = 4 + 0{,}02$, donc $\sqrt{4{,}02} \approx 2 + 0{,}02 \times \frac{1}{4} = 2{,}005$.

(d) $0{,}98 = 1 + (-0{,}02)$, donc $\frac{1}{0{,}98} \approx 1 + (-0{,}02) \times (-1) = 1{,}02$.

(e) $1{,}99 = 2 + (-0{,}01)$: on prend $a = 2$ et $h = -0{,}01$. Comme $c(2) = 8$, $1{,}99^3 \approx 8 + (-0{,}01) \times 12 = 7{,}88$.

(f) $3{,}1 = 3 + 0{,}1$, donc $5 + 0{,}1 \times u'(3) = 5{,}4$, d'où $u'(3) = \frac{0{,}4}{0{,}1} = 4$.

Ex. 42 ★☆☆ **Automatismes : vitesses, pentes et unités**

(a) $p(3) = 15$ et $p(1) = 1$, donc $\frac{15-1}{3-1} = 7$: la vitesse moyenne est de 7 m/s.

(b) $0{,}035 = 3{,}5\,\%$.

(c) $\frac{6}{150} = 0{,}04$: la pente est de 4 %.

(d) $0{,}12 \times 250 = 30$: la rampe monte de 30 m.

(e) $15 \times 3{,}6 = 54$: la vitesse est de 54 km/h.

(f) À l'instant $t = 2$ h, la vitesse instantanée du car est de 80 km/h.

Ex. 43 ★★☆ **Une bille lâchée d'un pont**

(a) $4{,}9t^2 = 44{,}1$ donne $t^2 = 9$, donc $t = 3$ car $t \geqslant 0$. La bille touche l'eau à $t = 3$ s.

(b) $\frac{d(3)-d(0)}{3-0} = \frac{44{,}1}{3} = 14{,}7$: la vitesse moyenne pendant la chute est de 14,7 m/s.

(c) $d(3+h) = 4{,}9(9+6h+h^2) = 44{,}1 + 29{,}4h + 4{,}9h^2$, donc $d(3+h) - d(3) = 29{,}4h + 4{,}9h^2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $29{,}4 + 4{,}9h$.

(d) Quand h tend vers 0, $29{,}4 + 4{,}9h$ tend vers 29,4 : d est dérivable en 3 et $d'(3) = 29{,}4$. La bille touche l'eau à 29,4 m/s, soit $29{,}4 \times 3{,}6 = 105{,}84$ km/h.

Ex. 44 ★★☆ **Vrai ou faux : pièges de contexte**

(a) Faux : c'est h qui multiplie $f'(5)$. Avec $h = 0{,}1$: $f(5{,}1) \approx 2 + 0{,}1 \times (-3) = 1{,}7$.

(b) Faux : on ne connaît pas $\sqrt{8}$, et 0,9 n'est pas petit. On prend $a = 9$ et $h = -0{,}1$: $\sqrt{8{,}9} \approx 3 + (-0{,}1) \times \frac{1}{6} \approx 2{,}983$.

(c) Faux : $0{,}05 \times 10 = 0{,}5$. La route monte de 0,5 m tous les 10 m.

(d) Faux : $\frac{8-0}{2-0} = 4$ m/s est la vitesse moyenne entre 0 et 2 s. Or $(2+h)^3 - 8 = 12h + 6h^2 + h^3$, donc pour $h \neq 0$ le taux vaut $12 + 6h + h^2$, qui tend vers 12 : $p'(2) = 12$ m/s.

(e) Vrai : le coût marginal $C'(50)$ est proche de $C(51) - C(50)$, le coût du 51e objet. Il vaut environ 12 €.

Ex. 45 ★★☆ **Coût marginal d'un atelier de bougies**

(a) $C(100) = 0{,}01 \times 10\,000 + 500 + 200 = 800$ €.

(b) $C(100+h) = 0{,}01(10\,000 + 200h + h^2) + 500 + 5h + 200 = 800 + 7h + 0{,}01h^2$.
Donc $C(100+h) - C(100) = 7h + 0{,}01h^2$ et, pour $h \neq 0$, le taux vaut $7 + 0{,}01h$.

Ex. 45 **(suite)**

(c) Quand h tend vers 0, $7 + 0{,}01h$ tend vers 7. C est dérivable en 100 et $C'(100) = 7$: pour 100 bougies, le coût marginal est de 7 €.

(d) $C(101) = 102{,}01 + 505 + 200 = 807{,}01$, donc $C(101) - C(100) = 7{,}01$ €. Ce coût est très proche de $C'(100) = 7$ €.

(e) Non : $\frac{C(100)}{100} = 8$ € est le coût moyen d'une bougie. Le coût marginal est $C'(100) = 7$ €, le coût d'une bougie de plus.

Ex. 46 ★★☆ **La pente d'une rampe de skate**

(a) C'est le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$: le coefficient directeur de la sécante passant par les points d'abscisses 2 et $2 + h$.

(b) Le programme affiche 0.25, puis 0.205, puis 0.2005. Les pentes se rapprochent de 0,2 : on conjecture $f'(2) = 0{,}2$.

(c) $f(2 + h) = 0{,}05(4 + 4h + h^2) = 0{,}2 + 0{,}2h + 0{,}05h^2$ et $f(2) = 0{,}2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut $0{,}2 + 0{,}05h$, qui tend vers 0,2. f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0{,}2$.

(d) Non : la pente vaut $f'(2) = 0{,}2 = 20\,\%$. Au point d'abscisse 2, la rampe monte de 20 cm par mètre parcouru à l'horizontale.

Ex. 47 ★★☆ **Racine carrée près de 25 et erreur commise**

(a) On multiplie par la quantité conjuguée : $\frac{(\sqrt{25+h}-5)(\sqrt{25+h}+5)}{h(\sqrt{25+h}+5)} = \frac{25+h-25}{h(\sqrt{25+h}+5)} = \frac{1}{\sqrt{25+h}+5}$ pour $h \neq 0$.

(b) Quand h tend vers 0, $\sqrt{25 + h}$ tend vers 5, donc le taux tend vers $\frac{1}{10}$. r est dérivable en 25 et $r'(25) = \frac{1}{10}$.

(c) $25{,}4 = 25 + 0{,}4$, donc $\sqrt{25{,}4} \approx 5 + 0{,}4 \times \frac{1}{10} = 5{,}04$.

(d) La calculatrice donne $\sqrt{25{,}4} \approx 5{,}039\,84$, donc l'erreur vaut environ $5{,}04 - 5{,}039\,84 = 0{,}000\,16$.

(e) $(5 + 0{,}1h)^2 = 25 + 2 \times 5 \times 0{,}1h + 0{,}01h^2 = 25 + h + 0{,}01h^2$. Pour $h > 0$, $0{,}01h^2 > 0$, donc $(\sqrt{25 + h})^2 = 25 + h < (5 + 0{,}1h)^2$. Les deux nombres sont positifs, donc $\sqrt{25 + h} < 5 + 0{,}1h$: l'approximation affine donne une valeur par excès, ce que confirme l'erreur positive trouvée à la question précédente.

Ex. 48 ★★★ **Un cube de métal qui se dilate**

(a) $V(1) = 1$ et $(1 + h)^3 = (1 + 2h + h^2)(1 + h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$.
Donc $V(1 + h) - V(1) = 3h + 3h^2 + h^3$ et, pour tout réel h non nul, $\frac{V(1+h)-V(1)}{h} = 3 + 3h + h^2$. Quand h tend vers 0, ce taux tend vers 3 : V est dérivable en 1 et $V'(1) = 3$.

(b) $1{,}003^3 = V(1 + 0{,}003) \approx 1 + 0{,}003 \times 3 = 1{,}009$. Pour 0,997, on garde le signe : $h = -0{,}003$, donc $0{,}997^3 = V(1 - 0{,}003) \approx 1 + (-0{,}003) \times 3 = 0{,}991$. Le cube chauffé a un volume d'environ 1,009 dm³, le cube refroidi d'environ 0,991 dm³.

(c) D'après le développement de la question 1, $V(1 + h) - (1 + 3h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1 - 3h = 3h^2 + h^3$.
Pour $h = 0{,}003$: l'erreur vaut $3 \times 0{,}000\,009 + 0{,}000\,000\,027 = 0{,}000\,027\,027$ dm³. La calculatrice donne bien $1{,}003^3 = 1{,}009\,027\,027$.

(d) L'erreur vaut $3h^2 + h^3$, positive pour $h > 0$. Si $0 < h \leqslant 0{,}005$, alors $h^2 \leqslant 0{,}000\,025$ et $h^3 \leqslant 0{,}000\,000\,125$, donc $3h^2 + h^3 \leqslant 0{,}000\,075\,125$ dm³, soit environ 0,075 cm³. L'erreur est donc inférieure à 0,1 cm³.

Ex. 49 ★★★ **Une voiture de course sur piste d'essai**

(a) $d(0) = 0$ et $d(10) = 600 - 200 = 400$. La vitesse moyenne vaut $\frac{d(10)-d(0)}{10-0} = \frac{400}{10} = 40$ m/s, soit $40 \times 3{,}6 = 144$ km/h.

(b) On complète par `v = (d(5 + h) - d(5)) / h`. Le programme affiche 44.698, 44.97, 45.03 et 45.298. Ce sont les vitesses moyennes (pentes des sécantes) entre $t = 5 + h$ et $t = 5$ pour $h < 0$, et entre $t = 5$ et $t = 5 + h$ pour $h > 0$. Elles encadrent de plus en plus près 45 : on conjecture que $d'(5) = 45$.

(c) $d(5) = 150 - 25 = 125$. On a $(5 + h)^2 = 25 + 10h + h^2$ et $(5 + h)^3 = 125 + 75h + 15h^2 + h^3$, donc $d(5 + h) = 150 + 60h + 6h^2 - 25 - 15h - 3h^2 - 0{,}2h^3 = 125 + 45h + 3h^2 - 0{,}2h^3$. Pour tout réel h non nul, $\frac{d(5+h)-d(5)}{h} = 45 + 3h - 0{,}2h^2$, qui tend vers 45 quand h tend vers 0. d est dérivable en 5 et $d'(5) = 45$: à $t = 5$ s, la vitesse instantanée est de 45 m/s, soit $45 \times 3{,}6 = 162$ km/h.

(d) Non. La vitesse moyenne ne renseigne pas sur la vitesse à un instant donné. D'après la question précédente, à $t = 5$ s la voiture roule à 162 km/h, soit plus de 150 km/h, alors que la vitesse moyenne sur les 10 s n'est que de 144 km/h.

Ex. 50 ★★★ **Le profil d'une route de col**

(a) $f(a+h) = 0{,}12a + 0{,}12h - 0{,}02(a^2 + 2ah + h^2)$, donc $f(a+h) - f(a) = 0{,}12h - 0{,}04ah - 0{,}02h^2$. Pour tout réel h non nul, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0{,}12 - 0{,}04a - 0{,}02h$, qui tend vers $0{,}12 - 0{,}04a$ quand h tend vers 0. f est dérivable en a et $f'(a) = 0{,}12 - 0{,}04a$.

(b) $f(0) = 0$ et $f(3) = 0{,}36 - 0{,}18 = 0{,}18$. La pente moyenne vaut $\frac{0{,}18-0}{3-0} = 0{,}06$, soit 6 %. Au départ, $f'(0) = 0{,}12$: la pente est de 12 %, le double de la pente moyenne.

(c) La tangente est parallèle à cette droite quand $f'(a) = 0{,}08$, soit $0{,}12 - 0{,}04a = 0{,}08$, donc $a = 1$. On a $f(1) = 0{,}12 - 0{,}02 = 0{,}1$. La tangente a pour équation $y = 0{,}08(x-1) + 0{,}1$, soit $y = 0{,}08x + 0{,}02$. Au point d'abscisse 1 km, la pente est de 8 %.

(d) La tangente est horizontale quand $f'(a) = 0$, soit $0{,}12 - 0{,}04a = 0$, donc $a = 3$. On a $f(3) = 0{,}18$: au point $(3\,;0{,}18)$, sommet du col, la pente est de 0 %. Yanis a gagné 0,18 km, soit 180 m de dénivelé, depuis le départ.