Corrigé – Moyenne et écart-type

Mathématiques – Seconde

Statistiques descriptives · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Moyenne d'une liste ★

Calcule la moyenne de chaque série. Arrondis au centième si besoin.

a) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 4.

$$\overline{x} = \frac{12 + 15 + 9 + 14}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

b) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 5.

$$\overline{x} = \frac{8 + 11 + 7 + 10 + 9}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

c) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 6.

$$\overline{x} = \frac{-3 + 2 - 1 + 4 + 0 + 5}{6} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$$

d) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 4.

$$\overline{x} = \frac{1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 4{,}2}{4} = \frac{11{,}2}{4} = 2{,}8$$

e) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 6.

$$\overline{x} = \frac{120 + 95 + 110 + 130 + 105 + 100}{6} = \frac{660}{6} = 110$$

f) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 4.

$$\overline{x} = \frac{7 + 7 + 7 + 7}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

g) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 7.

$$\overline{x} = \frac{14 + 9 + 17 + 6 + 11 + 12 + 8}{7} = \frac{77}{7} = 11$$

h) On additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre, 4.

$$\overline{x} = \frac{-5 - 8 - 2 - 6}{4} = \frac{-21}{4} = -5{,}25$$

Exercice 2 – Moyenne pondérée ★

Calcule la moyenne de chaque série. *Commence par calculer l'effectif total N.*

a) Effectif total : $N = 3 + 8 + 6 + 2 + 1 = 20$.

On multiplie chaque valeur par son effectif, on additionne, puis on divise par N :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{3\times 0 + 8\times 1 + 6\times 2 + 2\times 3 + 1\times 4}{20} \\ &= \frac{0 + 8 + 12 + 6 + 4}{20} \\ &= \frac{30}{20} = 1{,}5\end{aligned}$$

b) Somme des coefficients : $N = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$.

On multiplie chaque valeur par son coefficient, on additionne, puis on divise par N :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1\times 8 + 2\times 10 + 3\times 12 + 2\times 15}{8} \\ &= \frac{8 + 20 + 36 + 30}{8} \\ &= \frac{94}{8} = 11{,}75\end{aligned}$$

c) Effectif total : $N = 2 + 5 + 9 + 3 + 1 = 20$.

On multiplie chaque valeur par son effectif, on additionne, puis on divise par N :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{2\times 36 + 5\times 37 + 9\times 38 + 3\times 39 + 1\times 40}{20} \\ &= \frac{72 + 185 + 342 + 117 + 40}{20} \\ &= \frac{756}{20} = 37{,}8\end{aligned}$$

d) Les fréquences ont pour somme 1 : on multiplie chaque valeur par sa fréquence, puis on additionne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= 0{,}5\times 10 + 0{,}3\times 20 + 0{,}2\times 50 \\ &= 5 + 6 + 10 \\ &= 21\end{aligned}$$

Le gain moyen est 21 €.

Exercice 3 – Linéarité de la moyenne et de l'écart-type ★

Une série a pour moyenne 14 et pour écart-type 3. Donne la moyenne et l'écart-type de la nouvelle série quand on…

a) Chaque valeur x devient $y = x + 5$.

Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $14 + 5 = 19$.

Écart-type : ajouter un même nombre décale toutes les valeurs sans les écarter, il reste égal à 3.

b) Chaque valeur x devient $y = x - 4$.

Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $14 - 4 = 10$.

Écart-type : retirer un même nombre décale toutes les valeurs sans les écarter, il reste égal à 3.

c) Chaque valeur x devient $y = 2x$.

Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $2 \times 14 = 28$.

Écart-type : multiplier par 2 multiplie les écarts par 2 : $2 \times 3 = 6$.

d) Chaque valeur x devient $y = 0{,}5x$.
Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $0{,}5 \times 14 = 7$.
Écart-type : multiplier par $0{,}5$ multiplie les écarts par $0{,}5$: $0{,}5 \times 3 = 1{,}5$.

e) Chaque valeur x devient $y = 3x + 1$.
Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $3 \times 14 + 1 = 43$.
Écart-type : multiplier par 3 multiplie les écarts par 3 (le $+1$ ne change rien) : $3 \times 3 = 9$.

f) Chaque valeur x devient $y = 1{,}2x - 2$.
Moyenne : on fait la même opération sur la moyenne, $1{,}2 \times 14 - 2 = 14{,}8$.
Écart-type : multiplier par $1{,}2$ multiplie les écarts par $1{,}2$ (le -2 ne change rien) : $1{,}2 \times 3 = 3{,}6$.

g) Chaque valeur x devient $(x + 2) \times 4 = 4x + 8$.
Moyenne : on fait les mêmes opérations sur la moyenne, $(14 + 2) \times 4 = 64$.
Écart-type : multiplier par 4 multiplie les écarts par 4 (le $+8$ ne change rien) : $4 \times 3 = 12$.

h) Chaque valeur x devient $\dfrac{x}{2} - 3 = 0{,}5x - 3$.
Moyenne : on fait les mêmes opérations sur la moyenne, $\dfrac{14}{2} - 3 = 4$.
Écart-type : multiplier par $0{,}5$ multiplie les écarts par $0{,}5$ (le -3 ne change rien) : $0{,}5 \times 3 = 1{,}5$.

Exercice 4 – Retrouver une valeur manquante ★★

Pose une équation, puis résous-la.

a) La somme des 4 notes divisée par 4 vaut 11 :

$$\begin{aligned}
&\frac{12 + 8 + 15 + x}{4} = 11 \\
&\iff 12 + 8 + 15 + x = 44 \quad \text{(on multiplie par 4)} \\
&\iff 35 + x = 44 \quad \text{(on réduit)} \\
&\iff x = 9 \quad \text{(on retranche 35)}
\end{aligned}$$

Contrôle : $\dfrac{12 + 8 + 15 + 9}{4} = \dfrac{44}{4} = 11$.
La note manquante est 9.

b) Pour 12 de moyenne sur 4 contrôles, la somme des notes doit valoir $4 \times 12 = 48$.
Elle a déjà $13 + 9 + 11 = 33$ points.
Il lui faut $48 - 33 = 15$ au quatrième contrôle.

c) *On divise par la somme des coefficients :* $2 + 1 + 2 = 5$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2 \times 10 + 14 + 2x}{5} = 12 \\
&\iff 2 \times 10 + 14 + 2x = 60 \quad \text{(on multiplie par 5)} \\
&\iff 34 + 2x = 60 \quad \text{(on réduit)} \\
&\iff 2x = 26 \quad \text{(on retranche 34)} \\
&\iff x = 13 \quad \text{(on divise par 2)}
\end{aligned}$$

La troisième note est 13.

d) Effectif total : $N = 5 + n + 3 = 8 + n$.

Somme des produits : $0 \times 5 + 1 \times n + 2 \times 3 = n + 6$.

$\dfrac{n+6}{8+n} = 0{,}9$

$\iff n + 6 = 0{,}9\,(8 + n)$ (on multiplie par $8 + n$)

$\iff n + 6 = 7{,}2 + 0{,}9n$ (on développe)

$\iff 0{,}1n = 1{,}2$ (on retranche 6 et $0{,}9n$)

$\iff n = 12$ (on divise par 0,1)

L'effectif manquant est $n = 12$.

e) Pour 14 de moyenne sur 3 contrôles, la somme doit valoir $3 \times 14 = 42$.

Il a déjà $6 + 8 = 14$ points.

Il lui faudrait $42 - 14 = 28$: c'est impossible, la note maximale est 20.

Exercice 5 – Réunir, ajouter, retirer ★★

Calcule la moyenne demandée. Arrondis au centième si besoin.

a) On ne fait pas la moyenne des deux moyennes : on repasse par les sommes de notes.

Groupe 1 : $20 \times 11 = 220$.

Groupe 2 : $10 \times 14 = 140$.

Total : $220 + 140 = 360$ points pour 30 élèves : $\dfrac{360}{30} = 12$ (et non 12,5).

b) On repasse par les sommes : filles $15 \times 12{,}4 = 186$; garçons $13 \times 10{,}6 = 137{,}8$.

Effectif : $15 + 13 = 28$ élèves.

$\dfrac{186 + 137{,}8}{28} = \dfrac{323{,}8}{28} \approx 11{,}56$: la moyenne de la classe est d'environ 11,56.

c) Somme des 9 valeurs : $9 \times 15 = 135$.

Avec 25 : $135 + 25 = 160$, pour 10 valeurs.

$\dfrac{160}{10} = 16$: la moyenne augmente, car $25 > 15$.

d) Somme des 12 notes : $12 \times 10{,}5 = 126$.

Sans le 4 : $126 - 4 = 122$, pour 11 notes.

$\dfrac{122}{11} \approx 11{,}09$: la moyenne augmente, car $4 < 10{,}5$.

e) Somme de la classe : $30 \times 11 = 330$.

Somme des filles : $18 \times 12 = 216$.

Somme des garçons : $330 - 216 = 114$, pour $30 - 18 = 12$ garçons.

$\dfrac{114}{12} = 9{,}5$: les garçons ont 9,5 de moyenne.

Exercice 6 – Écart-type à la main ★★

Calcule la moyenne, la variance V, puis l'écart-type σ. Arrondis σ au centième.

a) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{2+4+6+8}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$.
Écarts à la moyenne $x_i - \overline{x}$: $-3\,;\ -1\,;\ 1\,;\ 3$.
Leurs carrés : $9\,;\ 1\,;\ 1\,;\ 9$.
La variance V est la moyenne des carrés des écarts :
$$V = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

b) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{5+7+7+9+12}{5} = \dfrac{40}{5} = 8$.
On calcule les écarts à la moyenne et leurs carrés :

x_i	5	7	7	9	12
$x_i - \overline{x}$	-3	-1	-1	1	4
$(x_i - \overline{x})^2$	9	1	1	1	16

La variance V est la moyenne des carrés des écarts :
$$V = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 4^2}{5} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{5{,}6} \approx 2{,}37$.

c) Effectif total : $N = 2 + 5 + 3 = 10$.
Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{2\times 1 + 5\times 2 + 3\times 3}{10} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$.
On calcule les écarts à la moyenne et leurs carrés :

x_i	1	2	3
Effectif	2	5	3
$x_i - \overline{x}$	$-1{,}1$	$-0{,}1$	0,9
$(x_i - \overline{x})^2$	1,21	0,01	0,81
Effectif $\times$ carré	2,42	0,05	2,43

La variance V est la moyenne des carrés des écarts (chaque carré compté avec son effectif) :
$$V = \frac{2\times(-1{,}1)^2 + 5\times(-0{,}1)^2 + 3\times 0{,}9^2}{10} = \frac{4{,}9}{10} = 0{,}49$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

d) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{-2+0+1+5}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.
Écarts à la moyenne $x_i - \overline{x}$: -3 ; -1 ; 0 ; 4.
Leurs carrés : 9 ; 1 ; 0 ; 16.
La variance V est la moyenne des carrés des écarts :
$$V = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 4^2}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{6{,}5} \approx 2{,}55$.

e) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{9+9+9+9+9}{5} = \dfrac{45}{5} = 9$.
On calcule les écarts à la moyenne et leurs carrés :

x_i	9	9	9	9	9
$x_i - \overline{x}$	0	0	0	0	0
$(x_i - \overline{x})^2$	0	0	0	0	0

La variance V est la moyenne des carrés des écarts :
$$V = \frac{0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma = 0$: toutes les valeurs sont égales.

Exercice 7 – Les deux nageuses ★★★

1. On additionne les 8 temps, puis on divise par 8.
   Anna : $31{,}2 + 30{,}8 + 31{,}5 + 30{,}9 + 31{,}1 + 31 + 31{,}3 + 30{,}6 = 248{,}4$, et $\dfrac{248{,}4}{8} = 31{,}05$ s.
   Bérénice : $30{,}1 + 32{,}4 + 29{,}8 + 31{,}9 + 30{,}5 + 32{,}6 + 29{,}9 + 31{,}2 = 248{,}4$, et $\dfrac{248{,}4}{8} = 31{,}05$ s.
   Les deux moyennes sont égales.

2. À la calculatrice : mode statistiques, on saisit les 8 temps, puis on lit σ_x (et non s_x).
   Anna $\sigma \approx 0{,}27$ s ; Bérénice $\sigma \approx 1{,}06$ s.

3. Les moyennes sont égales : elles ne permettent pas de choisir.
   L'écart-type d'Anna $(0{,}27)$ est environ quatre fois plus petit que celui de Bérénice $(1{,}06)$: ses temps sont plus resserrés autour de la moyenne.
   Il choisit Anna, même si Bérénice a fait le meilleur temps (29,8 s).

4. Chaque temps x devient $y = x - 0{,}2$.
   Moyenne : on retire aussi $0{,}2$, $31{,}05 - 0{,}2 = 30{,}85$ s.
   Écart-type : retirer un même nombre décale les temps sans les écarter, il ne change pas : $\sigma \approx 0{,}27$ s.

Exercice 8 – Les salaires ★★★

1. Chaque salaire x devient $y = x + 100$.
   Moyenne : $2\,100 + 100 = 2\,200$ €.
   Écart-type : ajouter 100 € à tous ne change pas les écarts, il reste 300 €.

2. $+4\,\%$: on multiplie par $1 + 0{,}04 = 1{,}04$, donc $y = 1{,}04x$.
   Moyenne : $1{,}04 \times 2\,100 = 2\,184$ €.
   Écart-type : multiplier par 1,04 multiplie les écarts par $1{,}04$: $1{,}04 \times 300 = 312$ €.

3. La masse salariale (somme des salaires) vaut $40 \times \overline{x}$: elle augmente de $40\times$ (hausse de la moyenne).
   Option 1 : la moyenne augmente de 100 €, coût $40 \times 100 = 4\,000$ € par mois.
   Option 2 : la moyenne augmente de $2\,184 - 2\,100 = 84$ €, coût $40 \times 84 = 3\,360$ € par mois.

4. Il faut que la moyenne augmente de 100 €, c'est-à-dire de 100 € sur 2 100 €.
   Taux : $t = \dfrac{100}{2\,100} \approx 0{,}0476$.
   Une augmentation d'environ $4{,}76\,\%$ coûterait autant que l'option 1.

Exercice 9 – La note mal saisie ★★★

1. Somme des notes saisies : $25 \times 10{,}8 = 270$.
   L'erreur a retiré $18 - 8 = 10$ points : vraie somme $270 + 10 = 280$.
   Vraie moyenne : $\dfrac{280}{25} = 11{,}2$.

2. $y = 0{,}8x + 4$.
   Moyenne : mêmes opérations, $0{,}8 \times 11{,}2 + 4 = 8{,}96 + 4 = 12{,}96$.
   Écart-type : multiplié par 0,8, le $+4$ ne change rien : $0{,}8 \times 3{,}5 = 2{,}8$.

3. Une note inchangée vérifie $y = x$:
   $0{,}8x + 4 = x$
   $\iff 4 = 0{,}2x$ (on retranche $0{,}8x$)
   $\iff x = 20$ (on divise par 0,2)

   Seule la note 20 reste inchangée.
   Toutes les notes sous 20 augmentent, et d'autant plus qu'elles sont basses (par exemple 5 devient 8, 15 devient 16) : l'écart-type diminue, les notes sont plus proches les unes des autres.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *Les effectifs sont oubliés.*

$N = 3 + 1 + 6 = 10$.
$\overline{x} = \dfrac{3 \times 2 + 1 \times 5 + 6 \times 8}{10} = \dfrac{6 + 5 + 48}{10} = \dfrac{59}{10} = 5{,}9$.

b) *Les groupes n'ont pas le même effectif.*

On repasse par les sommes : $16 \times 9 = 144$ et $24 \times 14 = 336$.
$\dfrac{144 + 336}{40} = \dfrac{480}{40} = 12$.

c) *Ajouter 3 décale les valeurs sans les écarter.*

La moyenne devient 15, l'écart-type reste 2.

d) *L'écart-type est la racine carrée de la variance.*

$\sigma = \sqrt{9} = 3$.

e) *On élève les écarts au carré.*

Moyenne 6 ; écarts -3 ; -1 ; 4 ; carrés 9 ; 1 ; 16.

$V = \dfrac{9 + 1 + 16}{3} = \dfrac{26}{3}$.

$\sigma = \sqrt{\dfrac{26}{3}} \approx 2{,}94$.

f) *Chaque carré est multiplié par son effectif, et on divise par $N = 4$.*

$V = \dfrac{3 \times (-2{,}5)^2 + 1 \times 7{,}5^2}{4} = \dfrac{3 \times 6{,}25 + 56{,}25}{4} = \dfrac{75}{4} = 18{,}75$.

$\sigma = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Valeurs 1 ; 2 ; 4 d'effectifs 5 ; 3 ; 2. La moyenne vaut :

Réponse C : 1,9

$\dfrac{5 + 6 + 8}{10} = 1{,}9$: on divise par $N = 10$.

2. 10 élèves ont 12 de moyenne et 30 élèves ont 8. La moyenne des 40 élèves est :

Réponse A : 9

$\dfrac{120 + 240}{40} = 9$.

3. Une série a pour moyenne 15 et pour écart-type 4. On multiplie chaque valeur par 2, puis on ajoute 1 :

Réponse D : moyenne 31, écart-type 8

$2 \times 15 + 1 = 31$; $2 \times 4 = 8$: le $+1$ ne change pas l'écart-type.

4. L'écart-type de la série 3 ; 7 vaut :

Réponse B : 2

Moyenne 5, écarts -2 et 2 : $V = \dfrac{4 + 4}{2} = 4$ et $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

5. Une série a pour variance 2,25. Son écart-type vaut :

Réponse D : 1,5

$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

6. Deux séries ont la même moyenne ; $\sigma_A = 1{,}2$ et $\sigma_B = 3{,}5$. Alors :

Réponse A : la série A est la plus régulière

Le plus petit écart-type indique des valeurs plus resserrées autour de la moyenne.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).