49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Vocabulaire, modélisation, somme et produit par un réel*

À retenir : Format $n \times p$: n lignes puis p colonnes ; a_{ij} est en ligne i, colonne j. On n'additionne que deux matrices de même format, coefficient par coefficient : $2\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\end{pmatrix}$.

Ex. 1 ★☆☆ **Lire une matrice et reconnaître sa forme** — On considère $M = \begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}8\\ -5\end{pmatrix}$, ainsi que les matrices carrées suivantes.

$P = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 0 & 7\\ -2 & 7 & 5\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

(a) Donne le format de M.

(b) Donne les coefficients m_{12} et m_{21} de M.

(c) Donne m_{23}. Le coefficient m_{32} existe-t-il ? Justifie.

(d) C est-elle une matrice ligne ou une matrice colonne ? Donne son format.

(e) Pour chacune des matrices P, Q et R, indique si elle est diagonale, triangulaire ou symétrique (plusieurs réponses sont possibles).

(f) Vrai ou faux : $M = \begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 5\\ 7 & -3\end{pmatrix}$. Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Sommes et combinaisons de matrices** — On donne $A = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

(a) Calcule $A + B$.

(b) Calcule $2A - 3B$.

(c) La somme $A + C$ existe-t-elle ? Justifie.

(d) Écris la matrice D de format 2×3 définie par $d_{ij} = 2i - j$.

(e) Calcule $A - D$.

Ex. 3 ★★☆ **Ventes de vélos dans deux boutiques** — Inès gère deux boutiques de vélos, l'une à Annecy, l'autre à Chambéry. Le tableau donne ses ventes de septembre.

	Annecy	Chambéry
Vélo de ville	12	8
VTT	5	9
Vélo électrique	7	4

En octobre, la boutique d'Annecy a vendu 10 vélos de ville, 6 VTT et 9 vélos électriques. Celle de Chambéry en a vendu respectivement 11, 7 et 5.

(a) Écris la matrice S des ventes de septembre, avec une ligne par boutique et une colonne par type de vélo (dans l'ordre du tableau). Donne son format.

(b) Écris, avec la même disposition, la matrice O des ventes d'octobre.

(c) Calcule $S + O$. Interprète son coefficient situé en ligne 2, colonne 3.

(d) Calcule $O - S$. Interprète ses coefficients négatifs.

Ex. 4 ★★☆ **Équation matricielle et paramètres** — On donne $A = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & 4\\ -8 & 6\end{pmatrix}$. On cherche la matrice X carrée d'ordre 2 telle que $3X - A = B$.

(a) Hugo écrit : « $3X - A = B$, donc $3X = B - A$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(b) Résous l'équation $3X - A = B$, puis vérifie ta solution en calculant $3X - A$.

(c) Détermine les réels a et b tels que $aA + bB = \begin{pmatrix}9 & -6\\ 12 & 0\end{pmatrix}$.

Ex. 5 ★★★ **Matrices définies par une formule** — Une matrice carrée $M = (m_{ij})$ est dite symétrique si $m_{ij} = m_{ji}$ pour tous i et j. On note A la matrice de format 2×3 telle que $a_{ij} = i - 2j$. Pour des réels p et q, on note M la matrice carrée d'ordre 3 telle que $m_{ij} = pi + qj$.

(a) Écris la matrice A en précisant son nombre de lignes et son nombre de colonnes.

(b) Zoé écrit : « $a_{32} = 3 - 2 \times 2 = -1$ ». A-t-elle raison ? Justifie, puis donne a_{23}.

(c) Pour $p = 1$ et $q = -2$, Zoé affirme que $M = A$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Démontre que M est symétrique si et seulement si $p = q$.

Ex. 5 **(suite)**

(e) Existe-t-il des réels p et q, non tous les deux nuls, tels que M soit triangulaire supérieure ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Stocks de deux librairies** — Malik tient deux librairies, à Rennes et à Vannes. Le tableau donne ses stocks au début de la semaine 0.

	Rennes	Vannes
BD	120	90
Romans	200	150
Mangas	80	110

Chaque semaine, il reçoit les livraisons L et vend les quantités V (une ligne par ville, une colonne par rayon) : $L = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 \\ 25 & 30 & 20 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 45 & 35 & 30 \\ 40 & 30 & 35 \end{pmatrix}$. On note S_n la matrice des stocks au bout de n semaines, avec $S_{n+1} = S_n + L - V$.

(a) Écris la matrice S_0 des stocks, avec une ligne par ville et une colonne par rayon, puis donne son format.

(b) Malik commande des mangas : 10 pour Rennes, 5 pour Vannes. Il écrit $S_0 + \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Explique pourquoi ce calcul n'a pas de sens, puis écris correctement la matrice de la commande.

(c) Calcule $D = L - V$, puis interprète le coefficient d_{23}.

(d) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $S_n = S_0 + nD$.

(e) Détermine le plus petit entier n pour lequel un coefficient de S_n est nul ou négatif, et précise le rayon concerné.

Ex. 7 ★★★ **Un système d'équations matricielles** — On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche deux matrices X et Y telles que $2X - 3Y = A$ (1) et $X - 2Y = B$ (2).

(a) Justifie que, si X et Y existent, elles sont nécessairement de format 2×3.

(b) Démontre que, si X et Y vérifient (1) et (2), alors $Y = A - 2B$, puis $X = 2A - 3B$.

(c) Calcule X et Y en détaillant les signes.

(d) Vérifie que les matrices trouvées sont bien solutions de (1) et de (2).

(e) Lina affirme que $X - Y = A - B$. A-t-elle raison ? Justifie sans calculer de coefficient.

2. *Produit de deux matrices et ses propriétés*

À retenir : $(n \times p)(p \times q)$ donne $n \times q$; c_{ij} = ligne i de A × colonne j de B. Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 11$. Souvent $AB \neq BA$, donc $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. $AI = IA = A$; $AB = O$ sans $A = O$ ni $B = O$.

Ex. 8 ★☆☆ **Existe ou n'existe pas ?** — On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifie que le produit AB existe, donne son format, puis calcule-le.

(b) Le produit BA existe-t-il ? Justifie.

(c) Calcule BC en précisant son format.

(d) Calcule LA en précisant son format.

(e) Le produit AL existe-t-il ? Justifie.

(f) Justifie que le produit LBC existe, donne son format, puis calcule-le.

Ex. 9 ★☆☆ **Produits de matrices carrées** — On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule AB.

(b) Calcule BA.

(c) Vrai ou faux : « pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, $AB = BA$ ». Justifie.

(d) Calcule AI_2 et I_2A. Que remarques-tu ?

(e) Calcule A^2, puis déduis-en la matrice $A^2 - 5A$.

(f) Sans calculer tout le produit, donne le coefficient c_{21} de la matrice $C = A^2B$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux élèves, deux erreurs** — On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note O la matrice nulle d'ordre 2.

(a) Calcule AB. Tom en déduit : « l'une des deux matrices A ou B est forcément nulle ». A-t-il raison ? Justifie.

(b) Calcule BA. Les matrices A et B commutent-elles ? Justifie.

(c) Calcule A^2 et B^2, puis exprime chacune en fonction de A ou de B.

(d) Inès écrit : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = A + B$. Calcule $(A+B)^2$ directement, puis explique et corrige son erreur.

Ex. 11 ★★☆ **La recette du week-end** — Margaux tient une boulangerie à Annecy. Un pain de campagne coûte 3 €, une brioche 5 € et une tarte 12 €. Ses ventes du week-end :

	Pain de campagne	Brioche	Tarte
Samedi	20	8	4
Dimanche	15	12	6

Hugo programme le produit de deux matrices écrites en listes de listes :

```
def produit(A, B):
    C = [ [0] * len(B[0]) for i in range(len(A))]
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(B[0])):
            for k in range(len(B)):
                C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[j][k]
    return C
```

(a) Écris la matrice Q de format 2×3 des quantités et la matrice colonne P des prix. Justifie que QP existe mais pas PQ.

(b) Calcule QP et interprète chacun de ses coefficients.

(c) Le programme de Hugo provoque une erreur avec Q et P. Repère la ligne fautive, explique pourquoi elle est fausse et corrige-la.

(d) Une fois le programme corrigé, qu'affiche `print(produit(Q, P)[1][0])`, où `Q` et `P` sont les listes de listes associées aux matrices Q et P ? Interprète.

Ex. 12 ★★★ **Quand a-t-on le droit de développer ?** — On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2 la matrice identité d'ordre 2.

(a) Démontre que, pour toutes matrices M et N carrées d'ordre 2, $(M+N)^2 = M^2 + 2MN + N^2$ si et seulement si $MN = NM$.

(b) Calcule AB et BA. Déduis-en, sans calculer $(A+B)^2$, si $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Justifie.

(c) Détermine toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $AM = MA$.

(d) Calcule A^2. Déduis-en $(A + I_2)^2$ sans poser d'autre produit, en justifiant que le développement est permis.

Ex. 13 ★★★ **Peut-on simplifier par une matrice ?** — On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Détermine toutes les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que AX soit la matrice colonne nulle.

(b) Calcule AB et AC. Léo en déduit que $B = C$. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Détermine toutes les matrices M carrées d'ordre 2 telles que $AM = AB$.

Ex. 13 (suite)

(d) Calcule QP. Déduis-en que, pour toutes matrices D et E carrées d'ordre 2, $PD = PE$ entraîne $D = E$. Cite les propriétés utilisées.

Ex. 14 ★★★ **Trois boucles pour un produit** — Ben écrit une fonction Python qui calcule le produit de deux matrices, chaque matrice étant stockée comme la liste de ses lignes :

```
def produit(A, B):
    n = len(A)
    p = len(B)
    q = len(B[0])
    if len(A[0]) != p:
        return None
    C = [ [0] * q for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(q):
            for k in range(p):
                C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j]
    return C
```

On code $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ par les listes `A` et `B`.

(a) Que représentent `n`, `p` et `q` ? Justifie que `produit(A, A)` renvoie `None`.

(b) Calcule à la main le résultat de `produit(A, B)`. Donne ensuite le format de BA, sans le calculer.

(c) Combien de multiplications de nombres la fonction effectue-t-elle pour calculer `produit(A, B)` ? Et pour deux matrices carrées d'ordre n ?

(d) Mehdi remplace la dernière ligne de la boucle par `C[i][j] = A[i][k] * B[k][j]`. Que renvoie alors `produit(A, B)` ? Explique son erreur.

3. *Puissances d'une matrice*

À retenir : $A^0 = I_n$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ (et non $A^n + A$). On élève chaque coefficient à la puissance n seulement si la matrice est diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Une conjecture sur A^2, A^3 se démontre. Si $AB = BA$, le binôme s'applique.

Ex. 15 ★☆☆ **Puissances d'une matrice diagonale** — On considère la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Calcule D^2.

(b) Calcule D^3.

(c) Donne D^0.

(d) Exprime D^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(e) Donne le coefficient d_{11} de D^{2027}, puis celui de D^{2026}.

Ex. 16 ★☆☆ **Carré et cube sans raccourci** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule A^2.

(b) Écris la matrice C dont chaque coefficient est le carré du coefficient de A placé au même endroit. A-t-on $C = A^2$? Justifie.

(c) Calcule A^3 en écrivant $A^3 = A^2 \times A$.

(d) Calcule $A^2 + A$. Cette matrice est-elle égale à A^3 ? Justifie.

(e) Calcule $A^0 + A$.

Ex. 17 ★★☆ **Écrire $\mathbf{A = I + N}$ avec $\mathbf{N^2 = O}$** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Détermine la matrice N telle que $A = I_3 + N$, puis calcule N^2.

(b) Justifie que I_3 et N commutent. À l'aide de la formule du binôme, exprime A^n en fonction de I_3, N et n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(c) Déduis-en A^{10} sans effectuer de produit de matrices.

(d) La formule obtenue est-elle encore valable pour $n = 0$? Justifie.

(e) On pose $M = 2A$. Exprime M^n en fonction de n, I_3 et N, pour tout entier naturel n.

Ex. 18 ★★☆ **Quand $\mathbf{A^2}$ est un multiple de A** — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule A^2, puis détermine le réel k tel que $A^2 = kA$.

(b) Déduis-en A^3 et A^4 en fonction de A, sans calculer d'autre produit de deux matrices.

(c) Conjecture une expression de A^n en fonction de A pour tout entier $n \geqslant 1$. En admettant cette conjecture, calcule le coefficient a_{12} de A^6.

(d) Malik a vérifié sa formule pour $n = 1, 2, 3$ et 4, et il affirme qu'elle est démontrée. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Cette formule donne-t-elle A^0 si on l'applique avec $n = 0$? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Une matrice triangulaire qui ne suit pas « n × »** — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, une matrice triangulaire.

(a) Inès élève chaque coefficient au carré, comme pour une matrice diagonale, et obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A-t-elle raison ? Justifie en calculant A^2.

(b) Calcule A^3. Théo voit un 2 en haut à droite de A et affirme que ce coefficient vaut $2n$ dans A^n. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Conjecture une expression de A^n pour tout entier naturel n.

Ex. 19 (suite)

(d) Démontre ta conjecture par récurrence, en commençant à $n = 0$.

(e) Détermine le plus petit entier naturel n tel que le coefficient en haut à droite de A^n dépasse 1 000.

Ex. 20 ★★★ **$\mathbf{A = I + N}$: puissances, piège et inverse** — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_2$, donc $A = I_2 + N$.

(a) Écris la matrice N, calcule N^2 et justifie que $I_2 N = N I_2$.

(b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = I_2 + nN$.

(c) Déduis-en les coefficients de A^n en fonction de n, puis la matrice A^{20}.

(d) Détermine l'entier naturel n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 31 & 15 \\ -60 & -29 \end{pmatrix}$.

(e) Calcule le produit $A(I_2 - N)$. Que peux-tu en déduire pour la matrice A ?

Ex. 21 ★★★ **De $\mathbf{A^2 = kA}$ aux puissances de $\mathbf{I + A}$** — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = I_2 + A$.

(a) Calcule A^2, puis exprime A^2 en fonction de A.

(b) Déduis-en, en le démontrant par récurrence, une expression de A^n en fonction de A pour tout entier $n \geqslant 1$.

(c) Lucie applique à B la formule $B^n = I_2 + nA$, valable quand $A^2 = O$. Calcule B^2 en fonction de I_2 et A. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n tel que $B^n = I_2 + a_n A$, et exprime a_{n+1} en fonction de a_n.

(e) En étudiant la suite $(a_n + \frac{1}{3})$, exprime a_n en fonction de n, puis donne B^3.

4. *Matrice inversible : inverse 2 × 2 et 3 × 3*

À retenir : A est inversible si et seulement si $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Exemple : $\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Si $AB = kI$ avec $k \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{k}B$. Attention à l'ordre : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Pivot : fais chaque opération à la fois sur A et sur I_3.

Ex. 22 ★☆☆ **Déterminants et inverses 2×2** — Les questions sont indépendantes. Écris les nombres négatifs entre parenthèses.

(a) Calcule le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Justifie.

(c) Justifie que $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, puis donne C^{-1}.

(d) Justifie que $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, puis donne D^{-1}.

(e) Noé écrit $\det(E) = 6 \times 3 + 4 \times 3 = 30$ pour $E = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Corrige son erreur, puis donne E^{-1} avec des fractions simplifiées.

(f) Donne l'inverse de la matrice diagonale $F = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Paramètre, vérification et ordre des facteurs** — Les questions sont indépendantes ; m désigne un nombre réel.

(a) Détermine les valeurs de m pour lesquelles $M = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible.

(b) Détermine les valeurs de m pour lesquelles $N = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ est inversible.

(c) Calcule le produit PQ, avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Que peux-tu en déduire pour P ?

(d) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

(e) Avec les matrices A et B de la question précédente, déduis-en que A est inversible et donne A^{-1}.

(f) On admet que $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $(RS)^{-1}$.

Ex. 24 ★★☆ **Un inverse obtenu grâce à une relation** — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule A^2.

(b) Démontre que $A^2 - 3A + 2I_3 = O$.

(c) Déduis-en que A est inversible et exprime A^{-1} en fonction de A et de I_3.

(d) Donne les coefficients de A^{-1}.

(e) Léo affirme : « Pour obtenir A^{-1}, il suffit de remplacer chaque coefficient non nul de A par son inverse. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Inverser une matrice d'ordre 3 par le pivot** — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note L_1, L_2, L_3 les lignes du tableau $(A \mid I_3)$.

(a) Écris le tableau $(A \mid I_3)$. Effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ avec la nouvelle ligne L_2. Donne le tableau obtenu.

(b) Pour l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, Élise a modifié la partie gauche mais a laissé $(0 \;\; 1 \;\; 0)$ à droite. Explique son erreur.

(c) Termine le pivot en faisant apparaître des zéros au-dessus de la diagonale, puis donne A^{-1}.

(d) Contrôle ton résultat en calculant la deuxième ligne de AA^{-1}.

(e) Sans refaire de pivot, déduis-en que la matrice $2A$ est inversible et donne $(2A)^{-1}$.

Ex. 26 ★★★ **L'inverse d'un produit** — On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Pauline affirme : « Ici $a = d = 2$: échanger a et d ne change rien, donc $A^{-1} = A$. » A-t-elle raison ? Justifie par un produit, puis calcule A^{-1}.

(b) Calcule B^{-1}, puis AB et $(AB)^{-1}$.

(c) Calcule $A^{-1}B^{-1}$ et $B^{-1}A^{-1}$. Laquelle de ces deux matrices est égale à $(AB)^{-1}$?

(d) Soient M et N deux matrices carrées inversibles de même ordre. Démontre que MN est inversible et que $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

(e) Déduis-en $(A^2)^{-1}$ sans calculer de déterminant.

Ex. 27 ★★★ **Les prix au marché de Lorient** — À Lorient, le kilo de pommes coûte x €, celui de poires y € et celui de prunes z €. Camille paie 3,50 € pour 2 kg de pommes et 1 kg de poires ; Malik, 6 € pour 1 kg de pommes, 2 kg de poires et 1 kg de prunes ; Inès, 5,50 € pour 1 kg de poires et 2 kg de prunes. On pose $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Traduis la situation par un système, puis écris-le sous la forme $AX = Y$ en précisant A, X et Y.

(b) Calcule AB. Déduis-en que A est inversible et donne A^{-1}.

(c) Détermine le prix d'un kilo de chaque fruit.

(d) Le mois suivant, les trois paniers coûtent 4 €, 7 € et 6 €. Quel fruit a changé de prix ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Une matrice d'ordre 3 qui dépend d'un paramètre** — Pour tout réel m, on pose $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$. On note L_1, L_2, L_3 les lignes et on applique la méthode du pivot.

(a) Dans A_m, effectue $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. Trouve ensuite k tel que $L_3 \leftarrow L_3 - kL_2$ annule le coefficient de la colonne 2. Écris la matrice triangulaire obtenue.

(b) On prend $m = 3$. Trouve une matrice colonne X non nulle telle que A_3X soit la colonne nulle. Démontre par l'absurde que A_3 n'est pas inversible.

(c) On prend $m = 2$. Applique la méthode du pivot au tableau $(A_2 \mid I_3)$ pour obtenir A_2^{-1}, puis contrôle une colonne du produit $A_2A_2^{-1}$.

(d) Soit c un réel. On considère le système $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = c \end{cases}$. Pour quelle valeur de c a-t-il des solutions ? Donne-les alors.

5. *Résoudre un système $AX = B$*

À retenir : Système carré : $AX = B$, avec les coefficients dans l'ordre des inconnues, et 0 si une inconnue manque. Si A est inversible : $X = A^{-1}B$ (jamais BA^{-1}), puis je vérifie. Si $\det A = 0$: aucune solution ou une infinité, à trancher par le calcul.

Ex. 29 ★☆☆ **Du système à l'écriture $AX = B$** — Range les inconnues dans l'ordre x, y (puis z). Quand tu écris un système sous la forme $AX = B$, précise A, X et B.

(a) Écris le système $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$ sous la forme $AX = B$.

(b) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$. Écris le système traduit par $AX = B$.

(c) Écris le système $\begin{cases} 2y + x = 5 \\ y - 3x = -8 \end{cases}$ sous la forme $AX = B$.

(d) Écris le système $\begin{cases} 3x = 2y + 4 \\ y = 3 - x \end{cases}$ sous la forme $AX = B$.

(e) Écris le système $\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + 3y = 10 \\ y + z = 4 \end{cases}$ sous la forme $AX = B$.

(f) Écris le système $\begin{cases} y + 2x - z = 1 \\ z - x = 1 \\ 3y = x + 2 \end{cases}$ sous la forme $AX = B$.

Ex. 30 ★★☆ **Résoudre avec la matrice inverse** — Dans chaque cas, écris le système sous la forme $AX = B$. Calcule $X = A^{-1}B$ et vérifie dans une équation. Pour un système 2×2, justifie d'abord que A est inversible.

(a) Résous le système $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

(b) Résous le système $\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 3x = y + 5 \end{cases}$.

(c) Résous le système $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

(d) On admet que la matrice A du système $\begin{cases} x + z = 5 \\ x + y = 3 \\ y + z = 6 \end{cases}$ a pour inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Résous ce système.

(e) On admet que la matrice A du système $\begin{cases} y + x = 3 \\ 2z + y = -1 \\ z + x + y = 2 \end{cases}$ a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (inconnues dans l'ordre x, y, z). Résous ce système.

Ex. 31 ★★☆ **Déterminant nul : aucune ou une infinité ?** — Pour tout réel m, on considère le système $(S_m) : \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = m \end{cases}$.

(a) Écris (S_m) sous la forme $AX = B$, puis calcule $\det A$. Peut-on utiliser $X = A^{-1}B$?

(b) Pour $m = 3$, le système (S_3) admet-il des solutions ? Justifie.

(c) Détermine les réels m pour lesquels (S_m) admet des solutions, puis décris toutes ces solutions.

(d) Hugo affirme : « Comme $\det A = 0$, le système (S_m) n'a jamais de solution. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Une parabole par trois points** — On cherche des réels a, b, c tels que la courbe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par $E(-1\,;6)$, $F(1\,;2)$ et $G(2\,;3)$. On note $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Traduis les trois conditions par un système, puis écris-le sous la forme $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(b) Calcule AN. Déduis-en que A est inversible et donne A^{-1}.

(c) Zoé écrit : « $AX = B$ donc $X = BA^{-1}$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine a, b et c, puis vérifie que la courbe de f passe bien par les trois points.

Ex. 33 ★★★ **Trois coffrets, des colonnes dans le désordre** — Une épicerie de Colmar vend trois coffrets. Le tableau donne le nombre de paquets de chaque produit dans un coffret et le prix du coffret. On note x, y et z les prix en euros d'un paquet de thé, d'un paquet de café et d'un paquet de chocolat.

	Café	Chocolat	Thé	Prix en euros
Matin	2	0	1	16
Goûter	1	1	0	11
Veillée	2	1	1	21

(a) Traduis le tableau par un système, puis écris-le sous la forme $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (inconnues dans l'ordre x, y, z).

(b) On pose $N = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule AN. Déduis-en que A est inversible et donne A^{-1}.

(c) Détermine X, vérifie ta réponse dans une équation et donne le prix de chaque paquet.

(d) L'an prochain, les coffrets coûteront 17, 12 et 23 euros. Détermine les nouveaux prix des paquets, puis le prix d'un coffret qui contient un paquet de chaque produit.

Ex. 34 ★★★ **Un paramètre qui décide de tout** — Pour tout réel k, on considère le système (S_k) : $\begin{cases} kx + 2y = 4 \\ 2x + ky = 4 \end{cases}$, d'inconnues x et y. On le note $A_k X = B$.

(a) Écris A_k, X et B. Calcule $\det A_k$ et déduis-en les valeurs de k pour lesquelles A_k est inversible.

(b) Pour tout k tel que A_k est inversible, donne A_k^{-1}. Calcule $X = A_k^{-1}B$, simplifie, puis vérifie le résultat dans la première équation.

(c) Pour chaque valeur de k telle que A_k n'est pas inversible, résous (S_k) par le calcul.

(d) Détermine les valeurs de k pour lesquelles le couple $(1\,;1)$ est solution de (S_k). Est-ce alors l'unique solution ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Coder et décoder avec une matrice** — Pour se transmettre un couple d'entiers $(x\,;y)$, Inès et Noé utilisent $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$: on envoie la colonne AX, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Justifie que A est inversible et donne A^{-1}.

(b) Inès reçoit la colonne $\begin{pmatrix} 19 \\ 27 \end{pmatrix}$. Détermine le couple envoyé par Noé et vérifie ta réponse.

Ex. 35 (suite)

(c) Noé envoie trois couples à la fois : il calcule AM, où les colonnes de M sont les couples. Inès reçoit $C = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 16 \\ 17 & 10 & 22 \end{pmatrix}$. Tom écrit $M = CA^{-1}$. Explique pourquoi c'est impossible, puis détermine M.

(d) Sacha code autrement : il envoie la matrice ligne LA, où $L = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Inès reçoit $R = \begin{pmatrix} 18 & 13 \end{pmatrix}$. Détermine L et justifie de quel côté tu multiplies par A^{-1}.

6. *Suites $U_{n+1} = AU_n$ et calcul de A^n avec une matrice diagonale*

À retenir : Si $U_{n+1} = AU_n$, alors $U_n = A^n U_0$ (jamais $U_0 A^n$) et $U_n = A^{n-1}U_1$. D diagonale : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$, pas D^n.

Ex. 36 ★★☆ **Puissances d'une matrice diagonale** — On pose $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule D^3.

(b) Écris D^n pour tout entier naturel n.

(c) Détermine deux réels a et b tels que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$.

(d) Lina affirme que pour $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = DU_n$ pour tout entier naturel n. Exprime U_n en fonction de n.

(f) On pose $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Détermine la limite de chaque coefficient de F^n.

Ex. 37 ★★☆ **Traduire une suite couplée** — Deux suites sont définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 3v_n$.

(a) Écris la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$, avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(b) On pose plutôt $W_n = \begin{pmatrix} v_n \\ u_n \end{pmatrix}$. Écris la matrice B telle que $W_{n+1} = BW_n$.

(c) Calcule U_1 puis U_2.

(d) Exprime U_5 à l'aide d'une puissance de A et de U_0. Malo écrit $U_5 = U_0 A^5$: explique pourquoi ce produit n'existe pas.

(e) On ne connaît que U_2. Exprime U_9 à l'aide d'une puissance de A et de U_2.

Ex. 38 ★★☆ **Calculer A^n avec P et D donnés** — On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule PQ. Déduis-en que P est inversible et donne P^{-1}.

(b) Vérifie que $AP = PD$. Déduis-en que $A = PDP^{-1}$.

(c) Développe $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$ et justifie que $A^2 = PD^2P^{-1}$. On admet ensuite que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

(d) Déduis-en les quatre coefficients de A^n en fonction de n. Contrôle ton résultat avec $n = 1$.

Ex. 39 ★★☆ **Entre Lorient et Vannes** — Chaque année, 10 % des habitants de Lorient partent à Vannes et 40 % des habitants de Vannes partent à Lorient ; on néglige les autres mouvements. On note a_n et b_n les populations (en milliers) de Lorient et Vannes l'année $2024 + n$, et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. En 2025, $a_1 = 30$ et $b_1 = 20$. On donne $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Écris la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

(b) Vérifie que $PP^{-1} = I_2$, puis que $PDP^{-1} = A$.

(c) On admet que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calcule D^n, puis les coefficients de A^n en fonction de n.

(d) Justifie que $U_n = A^{n-1}U_1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Déduis-en a_n et b_n en fonction de n.

(e) Détermine les limites de (a_n) et (b_n), puis interprète-les.

Ex. 40 ★★★ **Vélos en libre-service à Chambéry** — Chambéry répartit 400 vélos entre deux stations, Gare et Campus. Chaque nuit, 20 % des vélos de Gare sont déplacés à Campus et 30 % des vélos de Campus sont déplacés à Gare. Au jour 0, Gare compte 300 vélos et Campus 100. On note g_n et c_n les nombres de vélos à Gare et à Campus au jour n, et $U_n = \begin{pmatrix} c_n \\ g_n \end{pmatrix}$ (Campus en premier). On donne $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Exprime c_{n+1} et g_{n+1} en fonction de c_n et g_n, puis écris la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

(b) Calcule PQ. Déduis-en que P est inversible et donne P^{-1}, puis vérifie que $AP = PD$.

(c) Déduis-en que $A = PDP^{-1}$, puis démontre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

(d) Donne D^n, puis calcule A^n en fonction de n. Contrôle ton résultat avec $n = 1$.

(e) Exprime c_n et g_n en fonction de n, puis détermine les limites des suites (c_n) et (g_n). Interprète.

Ex. 41 ★★★ **Une suite qui démarre au rang 1** — Deux suites sont définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2v_n$. On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(a) Écris la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Calcule A^2 et A^3, puis conjecture l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

(c) Démontre ta conjecture par récurrence.

(d) Inès écrit : « D'après le cours, $U_n = U_1A^n$ ». Corrige ses deux erreurs, puis exprime u_n et v_n en fonction de n.

(e) Démontre que la suite (u_n) est croissante, puis détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$.

Ex. 42 ★★★ **Moyennes successives et matrice diagonale** — Deux suites sont définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = v_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

(a) Écris la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$. Calcule le déterminant de P, déduis-en P^{-1} et vérifie que $PP^{-1} = I_2$.

(b) Vérifie que $AP = PD$, puis déduis-en que $A = PDP^{-1}$.

(c) Mattéo affirme : « Puisque $A = PDP^{-1}$, on a $U_n = D^nU_0$ ». Vrai ou faux ? Justifie à l'aide du cas $n = 1$.

(d) On admet que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n. Donne D^n, puis calcule A^n en fonction de n.

(e) Exprime u_n et v_n en fonction de n, puis détermine les limites des suites (u_n) et (v_n).

7. *Suite affine $U_{n+1} = AU_n + B$: état stable*

À retenir : $C = AC + B \iff (I - A)C = B$ (pas $A - I$). $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$, d'où $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ (et non $A^nU_0 + B$). Si $A^n \to O$, $U_n \to C$. Ex. : $A = 0{,}5I_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Trouver l'état stable** — Dans tout l'exercice, (U_n) est une suite de matrices colonnes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n.

(a) Avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, détermine l'état stable C en résolvant $C = AC + B$.

(b) Avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, calcule $I_2 - A$ et son déterminant. Déduis-en que, pour toute colonne B, il existe un unique état stable.

(c) Avec la même matrice A et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_2 - A)^{-1}$, puis l'état stable C.

Ex. 43 **(suite)**

(d) Avec les mêmes A et B, un élève résout $(A - I_2)C' = B$. Calcule C' et compare-le à C.

(e) Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-elle un état stable ? Justifie.

(f) A est une matrice carrée d'ordre 2. Peut-on prendre $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$? Justifie.

(g) Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, justifie qu'il n'existe aucun état stable.

Ex. 44 ★☆☆ **Terme général avec une matrice diagonale** — On pose $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n, avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(a) Calcule U_1.

(b) Détermine l'état stable C.

(c) Donne A^n pour tout entier naturel n.

(d) À l'aide de $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, exprime u_n et v_n en fonction de n.

(e) Déduis-en la limite de (U_n).

(f) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 12 < 0{,}01$. Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Vrai ou faux sur la suite affine** — Dans tout l'exercice, $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n, où A est carrée d'ordre 2 et B, U_n sont des colonnes à 2 lignes. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie (démonstration ou contre-exemple).

(a) Si C est un état stable et $U_0 = C$, alors $U_n = C$ pour tout entier naturel n.

(b) Si C est un état stable, la suite définie par $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n + B$.

(c) Pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0 + nB$.

(d) Si A^n tend vers la matrice nulle, alors (U_n) tend vers la matrice nulle.

(e) Si $I_2 - A$ n'est pas inversible, la relation n'a aucun état stable.

Ex. 46 ★★☆ **Les truites des deux étangs** — Inès élève des truites dans deux étangs reliés par un canal, le Moulin et la Forge. Chaque année, 60 % des truites d'un étang y restent, 20 % passent dans l'autre et les autres sont pêchées ; puis elle déverse 400 truites au Moulin et 100 à la Forge. On note m_n et f_n les effectifs l'année $2026 + n$, avec $m_0 = 500$, $f_0 = 400$ et $U_n = \begin{pmatrix} m_n \\ f_n \end{pmatrix}$.

(a) Exprime m_{n+1} et f_{n+1} en fonction de m_n et f_n, puis écris $U_{n+1} = AU_n + B$ en précisant A, B et leurs tailles.

Ex. 46 **(suite)**

(b) Justifie que $I_2 - A$ est inversible, puis détermine l'état stable C.

(c) Calcule $V_0 = U_0 - C$, puis $P^{-1}V_0$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

(d) On admet que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. À l'aide de $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, déduis-en m_n et f_n pour tout entier naturel n.

(e) Détermine les limites de (m_n) et de (f_n), puis interprète-les dans le contexte.

Ex. 47 ★★★ **Les abricots de la coopérative** — Une coopérative de Valence stocke des abricots secs dans deux entrepôts, E et F. Chaque semaine, E garde 40 % de son stock et en envoie 20 % vers F ; F garde 30 % du sien et en envoie 10 % vers E ; le reste est vendu. Puis la coopérative livre 16 tonnes en E et 8 tonnes en F. On note e_n et f_n les stocks en tonnes la semaine n, $U_n = \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$, avec $e_0 = 42$ et $f_0 = 26$.

(a) Exprime e_{n+1} et f_{n+1} en fonction de e_n et f_n. Écris ensuite $U_{n+1} = AU_n + B$ en donnant A, B et leurs dimensions, puis calcule U_1.

(b) Justifie que $I_2 - A$ est inversible et calcule $(I_2 - A)^{-1}$. Déduis-en l'unique état stable C.

(c) On pose $V_n = U_n - C$. Démontre que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier naturel n, puis exprime U_n en fonction de A^n, U_0 et C.

(d) On admet que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Calcule P^{-1}, puis exprime e_n et f_n en fonction de n.

(e) Détermine les limites de (e_n) et de (f_n). Interprète-les en tonnes : vers quel stock total la coopérative tend-elle ?

Ex. 48 ★★★ **Corriger la copie de Léo** — On pose $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n. Léo rédige une étude de cette suite, mais sa copie contient plusieurs erreurs.

(a) Léo écrit : « $C = AC + B$ équivaut à $(A - I_2)C = B$ ». Repère son erreur, puis détermine l'état stable C en justifiant son unicité.

(b) Calcule A^2 et A^3. Conjecture l'expression de A^n, puis démontre-la par récurrence.

(c) Léo affirme que $U_n = A^n U_0 + B$ pour tout entier naturel n. Calcule U_1 et U_2, puis justifie qu'il a tort.

(d) À l'aide de l'encadré, exprime les deux coefficients de U_n en fonction de n.

Ex. 48 **(suite)**

(e) On admet que $n \times 0{,}5^n$ tend vers 0. Léo conclut que (U_n) tend vers la matrice nulle, puisque A^n tend vers O. Corrige-le.

Ex. 49 ★★★ **Un paramètre, trois comportements** — Pour tout réel k, on pose $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$. On étudie une suite de matrices colonnes à 2 lignes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier naturel n, où B est une matrice colonne à 2 lignes.

(a) Calcule le déterminant de $I_2 - A$ en fonction de k. Pour quelles valeurs de k l'état stable existe-t-il et est-il unique, quel que soit B ?

(b) Dans cette question, $k = 2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Démontre qu'il n'existe aucun état stable, puis, en passant à la limite dans la relation, que (U_n) ne converge pour aucun U_0.

(c) Dans cette question, $k = 2$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Détermine tous les états stables.

(d) Désormais, $k = 0{,}5$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Détermine l'état stable C, puis calcule $A(U_0 - C)$.

(e) Démontre par récurrence une expression de $A^n(U_0 - C)$, puis exprime U_n en fonction de n. La suite (U_n) converge-t-elle ? Justifie.