1. Vocabulaire, modélisation, somme et produit par un réel

Ex. 1 ★☆☆ **Lire une matrice et reconnaître sa forme**

(a) M a 2 lignes et 3 colonnes : son format est 2×3.

(b) m_{12} est en ligne 1, colonne 2 : $m_{12} = -1$. m_{21} est en ligne 2, colonne 1 : $m_{21} = 0$. Ce ne sont pas les mêmes coefficients.

(c) $m_{23} = -3$ (ligne 2, colonne 3). En revanche, m_{32} n'existe pas, car M n'a que 2 lignes.

(d) C a une seule colonne : c'est une matrice colonne, de format 2×1.

(e) P : tous ses coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls, donc P est triangulaire (inférieure). Elle n'est pas symétrique, car $p_{21} = 5 \neq p_{12} = 0$. Q est symétrique, car $q_{12} = q_{21} = 3$, $q_{13} = q_{31} = -2$ et $q_{23} = q_{32} = 7$. Elle n'est pas triangulaire. R est diagonale : tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls. Elle est donc aussi triangulaire et symétrique.

(f) Faux. M est de format 2×3 et l'autre matrice est de format 3×2. Deux matrices de formats différents ne sont jamais égales.

Ex. 2 ★☆☆ **Sommes et combinaisons de matrices**

(a) Les formats sont égaux (2×3). On additionne coefficient par coefficient : $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) $2A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \end{pmatrix}$ et $3B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 18 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $2A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -16 \\ -9 & 14 & -10 \end{pmatrix}$ (par exemple $6 - (-3) = 9$ et $8 - (-6) = 14$).

(c) Non : A est de format 2×3 et C est de format 2×1. On n'additionne que des matrices de même format.

(d) $d_{11} = 2 - 1 = 1$, $d_{12} = 2 - 2 = 0$, $d_{13} = 2 - 3 = -1$, $d_{21} = 4 - 1 = 3$, $d_{22} = 4 - 2 = 2$ et $d_{23} = 4 - 3 = 1$.
Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) $A - D = \begin{pmatrix} 3-1 & -2-0 & 1-(-1) \\ 0-3 & 4-2 & -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Ex. 3 ★★☆ **Ventes de vélos dans deux boutiques**

(a) Dans le tableau, les boutiques sont en colonnes. On doit donc les placer en lignes : $S = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. S a 2 lignes (les boutiques) et 3 colonnes (les types de vélo) : son format est 2×3.

(b) $O = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 9 \\ 11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$: la ligne 1 correspond à Annecy, la ligne 2 à Chambéry.

(c) S et O ont le même format, donc $S + O = \begin{pmatrix} 22 & 11 & 16 \\ 19 & 16 & 9 \end{pmatrix}$. Le coefficient en ligne 2, colonne 3 vaut $4 + 5 = 9$. La boutique de Chambéry a donc vendu 9 vélos électriques sur l'ensemble de septembre et octobre.

(d) $O - S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Il y a deux coefficients négatifs, tous deux égaux à -2. Entre septembre et octobre, les ventes de vélos de ville ont baissé de 2 à Annecy, et celles de VTT ont baissé de 2 à Chambéry.

Ex. 4 ★★☆ **Équation matricielle et paramètres**

(a) Non. Pour isoler $3X$, on ajoute A aux deux membres, comme avec des réels : $3X - A = B$ équivaut à $3X = B + A$, et non à $3X = B - A$. Hugo a fait une erreur de signe.

(b) $3X = A + B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$, donc $X = \frac{1}{3}(A + B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérification : $3X - A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = B$. L'unique solution est donc $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $aA + bB = \begin{pmatrix} 5a + b & -a + 4b \\ 2a - 8b & 3a + 6b \end{pmatrix}$. Deux matrices sont égales si leurs coefficients sont égaux. La ligne 1 donne $\begin{cases} 5a + b = 9 \\ -a + 4b = -6 \end{cases}$. La deuxième équation donne $a = 4b + 6$. On remplace : $5(4b + 6) + b = 9$, soit $21b = -21$.
Donc $b = -1$ et $a = 2$. On vérifie la ligne 2 : $2 \times 2 - 8 \times (-1) = 12$ et $3 \times 2 + 6 \times (-1) = 0$. Conclusion : $a = 2$ et $b = -1$.

Ex. 5 ★★★ **Matrices définies par une formule**

(a) A a 2 lignes et 3 colonnes. Ligne 1 : $1-2=-1$, $1-4=-3$, $1-6=-5$; ligne 2 : $2-2=0$, $2-4=-2$, $2-6=-4$.
Donc $A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -5\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}$.

(b) Non : a_{32} serait en ligne 3, or A n'a que 2 lignes, donc a_{32} n'existe pas. Le coefficient en ligne 2, colonne 3 est $a_{23}=2-2\times 3=-4$.

(c) Non : M est de format 3×3 et A de format 2×3. Deux matrices de formats différents ne sont jamais égales.
Les deux premières lignes de M sont celles de A, mais M a une troisième ligne : $m_{31}=3-2=1$, $m_{32}=3-4=-1$, $m_{33}=3-6=-3$, soit $\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

(d) Pour tous i, j : $m_{ij}-m_{ji}=pi+qj-pj-qi=(p-q)(i-j)$. Si $p=q$, cette différence est nulle pour tous i, j, donc M est symétrique. Réciproquement, si M est symétrique, alors $m_{12}=m_{21}$ donne $(p-q)(1-2)=0$, donc $p=q$. Ainsi, M est symétrique si et seulement si $p=q$.

(e) M est triangulaire supérieure si $m_{ij}=0$ pour $i>j$. En particulier, $m_{21}=2p+q=0$ et $m_{31}=3p+q=0$. En soustrayant, on obtient $p=0$, puis $q=0$.
Donc non : seule la matrice nulle ($p=q=0$) convient, et la condition $m_{32}=3p+2q=0$ est alors vérifiée.

Ex. 6 ★★★ **Stocks de deux librairies**

(a) Dans le tableau, les villes sont en colonnes : il faut les mettre en lignes. $S_0=\begin{pmatrix}120 & 200 & 80\\ 90 & 150 & 110\end{pmatrix}$, de format 2×3
(2 lignes, 3 colonnes).

(b) S_0 est de format 2×3, alors que la matrice colonne est de format 2×1. On n'additionne que des matrices de même format, donc la somme n'existe pas. La commande s'écrit $E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, et $S_0+E=\begin{pmatrix}120 & 200 & 90\\ 90 & 150 & 115\end{pmatrix}$.

(c) $D=\begin{pmatrix}30-45 & 20-35 & 40-30\\ 25-40 & 30-30 & 20-35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & -15 & 10\\ -15 & 0 & -15\end{pmatrix}$. Comme $d_{23}=-15$ (ligne 2 : Vannes ; colonne 3 : mangas), le stock de mangas de Vannes baisse de 15 chaque semaine.

Ex. 6 (suite)

(d) Initialisation : $S_0+0\times D=S_0$, donc la propriété est vraie pour $n=0$. Hérédité : on suppose $S_n=S_0+nD$ pour un entier naturel n. Alors $S_{n+1}=S_n+D=S_0+nD+D=S_0+(n+1)D$. Conclusion : pour tout entier naturel n, $S_n=S_0+nD$.

(e) $S_n=\begin{pmatrix}120-15n & 200-15n & 80+10n\\ 90-15n & 150 & 110-15n\end{pmatrix}$. Un coefficient devient nul ou négatif dès que $90-15n\leqslant 0$, soit $n\geqslant 6$; puis $110-15n\leqslant 0$ pour $n\geqslant 8$, et $120-15n\leqslant 0$ pour $n\geqslant 8$. Pour $n=5$, tous les coefficients sont strictement positifs (le plus petit vaut 15), et $S_6=\begin{pmatrix}30 & 110 & 140\\ 0 & 150 & 20\end{pmatrix}$.
Donc $n=6$: le rayon BD de Vannes est vide au bout de 6 semaines.

Ex. 7 ★★★ **Un système d'équations matricielles**

(a) D'après (2), la différence $X-2Y$ existe, donc X et $2Y$ ont le même format, qui est aussi celui de $X-2Y$. Comme $X-2Y=B$ est de format 2×3, X et Y sont de format 2×3.

(b) D'après (2), $X=B+2Y$. En remplaçant dans (1) : $2(B+2Y)-3Y=A$, soit $2B+Y=A$, donc $Y=A-2B$. Alors $X=B+2(A-2B)=2A-3B$.

(c) $X=2A-3B=\begin{pmatrix}2-6 & 8-3 & -4-(-3)\\ 0-(-9) & -6-0 & 10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 5 & -1\\ 9 & -6 & 4\end{pmatrix}$ et $Y=A-2B=\begin{pmatrix}1-4 & 4-2 & -2-(-2)\\ 0-(-6) & -3-0 & 5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

(d) $2X-3Y=\begin{pmatrix}-8+9 & 10-6 & -2-0\\ 18-18 & -12+9 & 8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix}=A$ et $X-2Y=\begin{pmatrix}-4+6 & 5-4 & -1-0\\ 9-12 & -6+6 & 4-2\end{pmatrix}=B$. Le couple (X,Y) trouvé est donc l'unique solution du système.

(e) Oui. En soustrayant (2) de (1), on obtient $(2X-3Y)-(X-2Y)=A-B$, soit $X-Y=A-B$. On le retrouve avec les expressions démontrées : $(2A-3B)-(A-2B)=A-B$. Contrôle : $X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}=A-B$. Lina a raison.

2. *Produit de deux matrices et ses propriétés*

Ex. 8 ★☆☆ **Existe ou n'existe pas ?**

(a) A est de format 2×2 et B de format 2×3 : $(2\times 2)(2\times 3)$, les nombres du milieu sont égaux, donc AB existe et est de format 2×3. Ligne 1 : $1\times 2+(-2)\times 0=2$; $1\times 1+(-2)\times 4=-7$; $1\times(-1)+(-2)\times 3=-7$. Ligne 2 : $3\times 2+0\times 0=6$; $3\times 1+0\times 4=3$; $3\times(-1)+0\times 3=-3$.
Donc $AB=\begin{pmatrix}2&-7&-7\\6&3&-3\end{pmatrix}$.

(b) $(2\times 3)(2\times 2)$: B a 3 colonnes et A a 2 lignes. Comme $3\neq 2$, le produit BA n'existe pas.

(c) $(2\times 3)(3\times 1)$: BC existe et est de format 2×1. $2\times 1+1\times(-1)+(-1)\times 2=-1$ et $0\times 1+4\times(-1)+3\times 2=2$, donc $BC=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

(d) $(1\times 2)(2\times 2)$: LA est de format 1×2. $3\times 1+(-1)\times 3=0$ et $3\times(-2)+(-1)\times 0=-6$, donc $LA=\begin{pmatrix}0&-6\end{pmatrix}$.

(e) $(2\times 2)(1\times 2)$: A a 2 colonnes et L n'a qu'une ligne. Comme $2\neq 1$, le produit AL n'existe pas.

(f) $(1\times 2)(2\times 3)(3\times 1)$: LBC existe et est de format 1×1, c'est un nombre. Par associativité, $LBC=L(BC)=3\times(-1)+(-1)\times 2=-5$.

Ex. 9 ★☆☆ **Produits de matrices carrées**

(a) Ligne 1 : $2\times 0+1\times 1=1$; $2\times 1+1\times(-2)=0$.
Ligne 2 : $(-1)\times 0+3\times 1=3$;
$(-1)\times 1+3\times(-2)=-7$.
Donc $AB=\begin{pmatrix}1&0\\3&-7\end{pmatrix}$.

(b) Ligne 1 : $0\times 2+1\times(-1)=-1$; $0\times 1+1\times 3=3$.
Ligne 2 : $1\times 2+(-2)\times(-1)=4$;
$1\times 1+(-2)\times 3=-5$.
Donc $BA=\begin{pmatrix}-1&3\\4&-5\end{pmatrix}$.

(c) Faux. Avec les matrices A et B de l'énoncé, le coefficient c_{11} vaut 1 pour AB et -1 pour BA, donc $AB\neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif.

(d) $AI_2=\begin{pmatrix}2\times 1+1\times 0&2\times 0+1\times 1\\-1\times 1+3\times 0&-1\times 0+3\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$ et de même $I_2A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$. On a $AI_2=I_2A=A$: I_2 joue le rôle de 1 pour le produit.

Ex. 9 **(suite)**

(e) Ligne 1 : $2\times 2+1\times(-1)=3$; $2\times 1+1\times 3=5$.
Ligne 2 : $(-1)\times 2+3\times(-1)=-5$;
$(-1)\times 1+3\times 3=8$.
Donc $A^2=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}$. Puis $A^2-5A=\begin{pmatrix}3-10&5-5\\-5+5&8-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0\\0&-7\end{pmatrix}=-7I_2$.

(f) $c_{21}=$ ligne 2 de $A^2\times$ colonne 1 de B
$=(-5)\times 0+8\times 1=8$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux élèves, deux erreurs**

(a) Ligne 1 : $1\times 1+1\times(-1)=0$; $1\times 0+1\times 0=0$. La ligne 2 de A est nulle, donc la ligne 2 de AB aussi. Ainsi $AB=O$. Pourtant $A\neq O$ et $B\neq O$: Tom a tort, un produit de matrices peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul.

(b) Ligne 1 : $1\times 1+0\times 0=1$; $1\times 1+0\times 0=1$. Ligne 2 : $(-1)\times 1+0\times 0=-1$; $(-1)\times 1+0\times 0=-1$.
Donc $BA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$. Comme $BA\neq O=AB$, les matrices A et B ne commutent pas.

(c) $A^2=\begin{pmatrix}1\times 1+1\times 0&1\times 1+1\times 0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, donc $A^2=A$. $B^2=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times(-1)&0\\(-1)\times 1+0\times(-1)&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$, donc $B^2=B$.

(d) $A+B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, donc $(A+B)^2=\begin{pmatrix}2\times 2+1\times(-1)&2\times 1+1\times 0\\(-1)\times 2+0\times(-1)&(-1)\times 1+0\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, qui est différent de $A+B$. Par distributivité, $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$, et on ne peut regrouper $AB+BA$ en $2AB$ que si $AB=BA$, ce qui n'est pas le cas ici. Correction : $(A+B)^2=A+O+BA+B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, ce qui confirme le calcul direct.

Ex. 11 ★★☆ **La recette du week-end**

(a) $Q=\begin{pmatrix}20&8&4\\15&12&6\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}3\\5\\12\end{pmatrix}$. $(2\times 3)(3\times 1)$: les nombres du milieu sont égaux, donc QP existe et est de format 2×1. $(3\times 1)(2\times 3)$: P a 1 colonne et Q a 2 lignes, $1\neq 2$, donc PQ n'existe pas.

(b) $20\times 3+8\times 5+4\times 12=148$ et $15\times 3+12\times 5+6\times 12=177$, donc $QP=\begin{pmatrix}148\\177\end{pmatrix}$. Margaux encaisse 148 € le samedi et 177 € le dimanche.

Ex. 11 (suite)

(c) La ligne fautive est `C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[j][k]`. Le coefficient c_{ij} se calcule avec la ligne i de A et la colonne j de B, donc avec a_{ik} et b_{kj} : i parcourt les lignes de A, j les colonnes de B et k l'indice commun. Ici `B[j][k]` échange ligne et colonne : avec P, qui n'a qu'une colonne, `B[0][1]` n'existe pas, d'où l'erreur. Correction : `C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j]`.

(d) `produit(Q, P)[1][0]` est le coefficient de la ligne 2, colonne 1 de QP (les indices commencent à 0) : le programme affiche 177, c'est la recette du dimanche en euros.

Ex. 12 ★★★ Quand a-t-on le droit de développer ?

(a) Par distributivité, $(M+N)^2 = (M+N)(M+N) = M^2 + MN + NM + N^2$.
Donc $(M+N)^2 = M^2 + 2MN + N^2 \iff MN + NM = 2MN \iff NM = MN$. L'identité remarquable est vraie si et seulement si M et N commutent.

(b) $AB = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 & 1\times 1 + 2\times 0 \\ 0\times 0 + (-1)\times 1 & 0\times 1 + (-1)\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0\times 1 + 1\times 0 & 0\times 2 + 1\times(-1) \\ 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les coefficients c_{11} valent 2 et 0, donc $AB \neq BA$. D'après la question 1, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$: on ne peut pas développer comme avec des réels.

(c) $AM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$. On a $AM = MA$ si et seulement si $2c = 0$, $b + 2d = 2a - b$ et $-c = c$, c'est-à-dire si $c = 0$ et $b = a - d$. Les matrices cherchées sont donc les $M = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec a et d réels.

(d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 2 + 2\times(-1) \\ 0 & (-1)\times(-1) \end{pmatrix} = I_2$. Comme $AI_2 = I_2 A = A$, les matrices A et I_2 commutent (I_2 est la matrice de la question 3 avec $a = d = 1$). D'après la question 1, $(A + I_2)^2 = A^2 + 2AI_2 + I_2^2 = I_2 + 2A + I_2 = 2I_2 + 2A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 13 ★★★ Peut-on simplifier par une matrice ?

(a) $AX = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -4x + 2y \end{pmatrix}$. La seconde ligne vaut -2 fois la première, donc AX est nulle si et seulement si $y = 2x$. Les solutions sont les colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$, avec x réel.

Ex. 13 (suite)

(b) $AB = \begin{pmatrix} 2\times 1 + (-1)\times 0 & 2\times 3 + (-1)\times 1 \\ -4\times 1 + 2\times 0 & -4\times 3 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 4-2 & 8-3 \\ -8+4 & -16+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$. On a $AB = AC$, mais $b_{11} = 1$ et $c_{11} = 2$, donc $B \neq C$. Léo a tort : on ne simplifie pas $AB = AC$ par A. Ici $C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a des colonnes de la forme trouvée à la question 1, donc $A(C-B) = O$.

(c) Par distributivité, $AM = AB \iff A(M-B) = O$. La colonne j de $A(M-B)$ est A fois la colonne j de $M - B$. D'après la question 1, chaque colonne de $M - B$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$. Ainsi $M - B = \begin{pmatrix} s & t \\ 2s & 2t \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $M = \begin{pmatrix} 1+s & 3+t \\ 2s & 1+2t \end{pmatrix}$, avec s et t réels. Il y a une infinité de solutions ($s = t = 1$ donne C).

(d) $QP = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-1 \\ -6+6 & -2+3 \end{pmatrix} = I_2$. Si $PD = PE$, on multiplie à gauche par Q : $Q(PD) = Q(PE)$. Par associativité, $(QP)D = (QP)E$, soit $I_2 D = I_2 E$. Comme $I_2 D = D$ et $I_2 E = E$, on obtient $D = E$. Avec P, la simplification est donc permise, car il existe Q telle que $QP = I_2$.

Ex. 14 ★★★ Trois boucles pour un produit

(a) `n` est le nombre de lignes de la première matrice, `p` le nombre de lignes de la seconde et `q` son nombre de colonnes. Le test vérifie que le nombre de colonnes du premier facteur est égal au nombre de lignes du second. A est de format 2×3 : pour $A \times A$, on a $3 \neq 2$, donc le produit n'existe pas et la fonction renvoie `None`.

(b) $(2\times 3)(3\times 2)$: AB existe et est de format 2×2. $c_{11} = 1\times 2 + 0\times 0 + 2\times 1 = 4$; $c_{12} = 1\times 1 + 0\times(-1) + 2\times 4 = 9$; $c_{21} = -1\times 2 + 3\times 0 + 1\times 1 = -1$; $c_{22} = -1\times 1 + 3\times(-1) + 1\times 4 = 0$. La fonction renvoie donc la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $(3\times 2)(2\times 3)$ donne le format 3×3, BA est de format 3×3.

(c) Une multiplication est faite à chaque passage dans la boucle la plus interne, soit $n \times q \times p$ fois. Pour `produit(A, B)` : $2 \times 2 \times 3 = 12$ multiplications. Pour deux matrices carrées d'ordre n : $n \times n \times n = n^3$ multiplications.

Ex. 14 (suite)

(d) À chaque tour de boucle, `C[i][j]` est écrasé au lieu d'être augmenté. Il ne reste donc que le dernier terme, pour $k = 2$: `A[i][2] * B[2][j]`. La fonction renvoie `[ [2, 8], [1, 4] ]`, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 4 \\ 1\times 1 & 1\times 4 \end{pmatrix}$.
L'erreur : c_{ij} est la somme des produits $a_{ik}b_{kj}$, il faut accumuler les termes.

3. *Puissances d'une matrice*

Ex. 15 ★☆☆ Puissances d'une matrice diagonale

(a) D est diagonale, donc on élève chaque coefficient diagonal au carré : $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(b) De même, $D^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

(c) Par définition, $D^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce n'est pas la matrice nulle.

(d) Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$.
Cette formule donne bien I_3 pour $n = 0$.

(e) 2027 est impair, donc $(-1)^{2027} = -1$. 2026 est pair, donc $(-1)^{2026} = 1$.

Ex. 16 ★☆☆ Carré et cube sans raccourci

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times(-1) & 1\times 2 + 2\times 3 \\ -1\times 1 + 3\times(-1) & -1\times 2 + 3\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Le coefficient c_{11} vaut 1, alors que le coefficient de A^2 à la même place vaut -1.
Donc $C \neq A^2$. On ne peut élever chaque coefficient au carré que pour une matrice diagonale, et A ne l'est pas.

(c) $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$.

(d) $A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$. Elle est différente de A^3 (par exemple $0 \neq -9$) : une puissance est un produit, pas une somme.

(e) $A^0 = I_2$, donc $A^0 + A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ex. 17 ★★☆ Écrire $\mathbf{A = I + N}$ avec $\mathbf{N^2 = O}$

(a) $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La première ligne de N multipliée par chacune de ses colonnes donne 0, et ses autres lignes sont nulles.
Donc $N^2 = O$.

(b) On a $I_3 N = N I_3 = N$, donc I_3 et N commutent et la formule du binôme s'applique : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$. Pour $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 N^{k-2} = O$. Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = I_3 + nN$.

(c) $A^{10} = I_3 + 10N = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Pour $n = 0$, on a $I_3 + 0 \times N = I_3$, et $A^0 = I_3$ par définition. La formule est donc valable pour tout entier naturel n.

(e) Un réel commute avec toute matrice, donc $(2A)^n = 2^n A^n$. D'après les questions 2 et 4, pour tout entier naturel n, $M^n = 2^n(I_3 + nN) = \begin{pmatrix} 2^n & n\times 2^{n+1} & -n\times 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Ex. 18 ★★☆ Quand $\mathbf{A^2}$ est un multiple de $\mathbf{A}$

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 9+6 & 18+12 \\ 3+2 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = 5A$, donc $k = 5$.

(b) $A^3 = A^2 \times A = 5A \times A = 5A^2 = 25A$, puis $A^4 = A^3 \times A = 25A^2 = 125A$.

(c) On conjecture que $A^n = 5^{n-1}A$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Alors $A^6 = 5^5 A = 3\,125A$, d'où $a_{12} = 3\,125 \times 6 = 18\,750$.

(d) Non. Quelques vérifications ne prouvent pas la formule pour tout n : il faut une récurrence. L'hérédité s'écrit : si $A^n = 5^{n-1}A$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = 5^{n-1}A^2 = 5^{n-1} \times 5A = 5^n A$.

(e) Non. Avec $n = 0$, on obtiendrait $5^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, qui est différente de $A^0 = I_2$. La formule ne vaut que pour $n \geqslant 1$.

Ex. 19 ★★★ Une matrice triangulaire qui ne suit pas « n × »

(a) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 3\times 3 + 2\times 0 & 3\times 2 + 2\times 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inès a tort : élever chaque coefficient à la puissance n ne marche que pour une matrice diagonale, ce qui n'est pas le cas de A
(son coefficient 2 est hors de la diagonale).

Ex. 19 **(suite)**

(b) $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Théo a tort : la formule $2n$ donnerait 4 pour $n = 2$ et 6 pour $n = 3$, alors que les coefficients valent 8 et 26.

(c) Les coefficients en haut à droite sont 2, 8, 26, c'est-à-dire $3 - 1$, $9 - 1$, $27 - 1$. On conjecture que pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ». Initialisation : $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $3^0 = 1$, $3^0 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 3^n \times 3 & 3^n \times 2 + 3^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion : par récurrence, la formule est vraie pour tout entier naturel n.

(e) On cherche $3^n - 1 > 1\,000$, soit $3^n > 1\,001$. Or $3^6 = 729$ et $3^7 = 2\,187$, et la suite (3^n) est croissante. Le plus petit entier est donc $n = 7$: le coefficient en haut à droite de A^7 vaut 2 186.

Ex. 20 ★★★ **$\mathbf{A = I + N}$: puissances, piège et inverse**

(a) $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} 4-4 & 2-2 \\ -8+8 & -4+4 \end{pmatrix} = O$. Comme I_2 est l'élément neutre du produit, $I_2 N = N = N I_2$: les matrices I_2 et N commutent.

(b) Initialisation : $A^0 = I_2 = I_2 + 0 \times N$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$. Hérédité : supposons $A^n = I_2 + nN$. Alors $A^{n+1} = A^n \times A = (I_2 + nN)(I_2 + N) = I_2 + N + nN + nN^2 = I_2 + (n+1)N$, puisque $N^2 = O$. Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n, $A^n = I_2 + nN$.

(c) $A^n = \begin{pmatrix} 1+2n & n \\ -4n & 1-2n \end{pmatrix}$, donc $A^{20} = \begin{pmatrix} 41 & 20 \\ -80 & -39 \end{pmatrix}$.

(d) D'après la question 3, il faut $1 + 2n = 31$, $n = 15$, $-4n = -60$ et $1 - 2n = -29$. Ces quatre égalités donnent toutes $n = 15$.
Donc $A^{15} = \begin{pmatrix} 31 & 15 \\ -60 & -29 \end{pmatrix}$, et $n = 15$ est le seul entier qui convient.

(e) $A(I_2 - N) = (I_2 + N)(I_2 - N) = I_2 - N + N - N^2 = I_2$, car $N^2 = O$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = I_2 - N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 21 ★★★ **De $\mathbf{A^2 = kA}$ aux puissances de $\mathbf{I + A}$**

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4+2 & -4-2 \\ -2-1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

(b) On conjecture que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = 3^{n-1}A$. Initialisation : pour $n = 1$, $3^0 A = A$, donc c'est vrai. Hérédité : si $A^n = 3^{n-1}A$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1}A^2 = 3^{n-1} \times 3A = 3^n A$. Conclusion : par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 3^{n-1}A$.

(c) I_2 et A commutent, donc $B^2 = (I_2 + A)^2 = I_2 + 2A + A^2 = I_2 + 2A + 3A = I_2 + 5A$. La formule de Lucie donnerait $I_2 + 2A$. Or $5A \neq 2A$ car $A \neq O$. Lucie a tort : la formule $I_2 + nA$ suppose $A^2 = O$, alors qu'ici $A^2 = 3A$.

(d) Initialisation : $B^0 = I_2 = I_2 + 0 \times A$, donc $a_0 = 0$ convient. Hérédité : si $B^n = I_2 + a_n A$, alors $B^{n+1} = B^n \times B = (I_2 + a_n A)(I_2 + A) = I_2 + A + a_n A + a_n A^2 = I_2 + (4a_n + 1)A$, car $A^2 = 3A$. Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier naturel n, avec $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = 4a_n + 1$.

(e) Pose $v_n = a_n + \frac{1}{3}$. Alors $v_{n+1} = 4a_n + \frac{4}{3} = 4v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison 4, avec $v_0 = \frac{1}{3}$.
Donc $v_n = \frac{4^n}{3}$ et $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$. Comme $a_3 = 21$, on obtient $B^3 = I_2 + 21A = \begin{pmatrix} 43 & -42 \\ -21 & 22 \end{pmatrix}$.

4. *Matrice inversible : inverse 2 × 2 et 3 × 3*

Ex. 22 ★☆☆ **Déterminants et inverses $\mathbf{2 \times 2}$**

(a) $\det(A) = 4 \times 5 - (-3) \times 2 = 20 + 6 = 26$.

(b) $\det(B) = (-3) \times (-4) - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$.
Donc B n'est pas inversible. On le voit aussi sur les lignes : la première vaut $-\frac{3}{2}$ fois la deuxième.

(c) $\det(C) = 5 \times 3 - 2 \times 7 = 1 \neq 0$, donc C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $\det(D) = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 2 + 6 = 8 \neq 0$, donc D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

(e) Noé a calculé $ad + bc$ au lieu de $ad - bc$.
$\det(E) = 6 \times 3 - 4 \times 3 = 18 - 12 = 6 \neq 0$, donc E est inversible et $E^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

(f) $\det(F) = (-2) \times 5 - 0 \times 0 = -10 \neq 0$, donc F est inversible et $F^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Pour une matrice diagonale, on inverse les coefficients diagonaux.

Ex. 23 ★☆☆ **Paramètre, vérification et ordre des facteurs**

(a) $\det(M) = 6m - 3 \times 2 = 6m - 6$.
Donc M est inversible si et seulement si $6m - 6 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 1$.

(b) $\det(N) = m \times m - 2 \times 2 = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$.
Donc N est inversible si et seulement si $m \neq 2$ et $m \neq -2$.

(c) $PQ = \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} = I_2$. Comme P est carrée, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

(d) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$.

(e) $AB = 2I_3$, donc $A \times \frac{1}{2}B = I_3$. Comme A est carrée, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(f) $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$: l'ordre s'inverse. $S^{-1}R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Attention : $R^{-1}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce n'est pas le bon résultat.

Ex. 24 ★★☆ **Un inverse obtenu grâce à une relation**

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 9-2 & -6 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 7-9+2 & -6+6 & 0 \\ 3-3 & -2-0+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-6+2 \end{pmatrix} = O$.

(c) D'après la question précédente, $3A - A^2 = 2I_3$, donc $A(3I_3 - A) = 2I_3$, puis $A \times \frac{1}{2}(3I_3 - A) = I_3$. Comme A est carrée, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A)$.

(d) $3I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) Léo a tort. Avec sa méthode, le premier coefficient serait $\frac{1}{3}$, or celui de A^{-1} vaut 0. De même, au coefficient -2 correspondrait $-\frac{1}{2}$, or A^{-1} porte 1 à cette place. En général, l'inverse d'une matrice n'est pas la matrice des inverses de ses coefficients.

Ex. 25 ★★☆ **Inverser une matrice d'ordre 3 par le pivot**

(a) Partie gauche : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; partie droite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 25 (suite)

(b) Une opération sur les lignes se fait en même temps des deux côtés du tableau. À droite, $L_2 - 2L_1$ donne $(0\ \ 1\ \ 0) - 2(1\ \ 0\ \ 0) = (-2\ \ 1\ \ 0)$, et non $(0\ \ 1\ \ 0)$.

(c) On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$: on obtient $(0\ \ 1\ \ 0 \mid -4\ \ 2\ \ -1)$. Puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$: on obtient $(1\ \ 0\ \ 0 \mid 5\ \ -2\ \ 1)$. La partie gauche vaut I_3, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Deuxième ligne de AA^{-1} :
$2 \times 5 + 3 \times (-4) + 1 \times 2 = 0$, puis
$2 \times (-2) + 3 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$, puis
$2 \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$. On trouve bien $(0\ \ 1\ \ 0)$, la deuxième ligne de I_3.

(e) $(2A) \times \frac{1}{2}A^{-1} = 2 \times \frac{1}{2} \times AA^{-1} = I_3$, donc $2A$ est inversible et $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Attention : ce n'est pas $2A^{-1}$.

Ex. 26 ★★★ **L'inverse d'un produit**

(a) Le coefficient de la ligne 1, colonne 1 de $A \times A$ vaut $2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \neq 1$: $A^2 \neq I_2$, donc Pauline a tort. Elle a oublié de changer le signe de b et de c.
$\det(A) = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\det(B) = 1 \times 3 - 2 \times 1 = 1 \neq 0$, donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; $\det(AB) = 5 \times 8 - 13 \times 3 = 1 \neq 0$, donc $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
C'est donc $B^{-1}A^{-1}$ qui est égale à $(AB)^{-1}$, et pas $A^{-1}B^{-1}$.

(d) Par associativité, $(MN)(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MIM^{-1} = MM^{-1} = I$. Le produit de MN par $N^{-1}M^{-1}$ vaut I, donc MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

(e) On applique le résultat précédent avec $M = N = A$:
$(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Ex. 27 ★★★ **Les prix au marché de Lorient**

(a) $\begin{cases} 2x + y = 3{,}5 \\ x + 2y + z = 6 \\ y + 2z = 5{,}5 \end{cases}$, soit $AX = Y$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 6 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$.

Ex. 27 **(suite)**

(b) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$.
Donc $A \times \frac{1}{4}B = I_3$: A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}B$.
Attention, l'inverse n'est pas B.

(c) A est inversible, donc $X = A^{-1}Y = \frac{1}{4}BY$. On a $BY = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le kilo de pommes coûte 1 €, celui de poires 1,50 € et celui de prunes 2 €.

(d) Avec $Y' = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, on obtient $X' = \frac{1}{4}BY' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Seules les poires ont changé de prix : elles passent de 1,50 € à 2 € le kilo.

Ex. 28 ★★★ **Une matrice d'ordre 3 qui dépend d'un paramètre**

(a) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne $L_3 = (0 \;\; m-4 \;\; -1)$. Puis $L_3 - kL_2 = (0 \;\; m-4-k \;\; -1-k)$: on prend $k = m-4$, d'où $-1-(m-4) = 3-m$. On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-m \end{pmatrix}$: une ligne nulle apparaît exactement quand $m = 3$.

(b) On résout $x+2y+z=0$, $y+z=0$, $2x+3y+z=0$. Avec $z=1$: $y=-1$ puis $x=1$, et la troisième équation donne $2-3+1=0$.
Donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Si A_3 était inversible, on aurait $X = A_3^{-1}O = O$, ce qui contredit $X \neq O$.
Donc A_3 n'est pas inversible.

(c) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$: $(0 \;\; -2 \;\; -1 \,|\, -2 \;\; 0 \;\; 1)$; $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$: $(0 \;\; 0 \;\; 1 \,|\, -2 \;\; 2 \;\; 1)$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$: $(0 \;\; 1 \;\; 0 \,|\, 2 \;\; -1 \;\; -1)$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$: $(1 \;\; 2 \;\; 0 \,|\, 3 \;\; -2 \;\; -1)$; $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$: $(1 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, -1 \;\; 0 \;\; 1)$.
Donc $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Contrôle de la colonne 1 de $A_2A_2^{-1}$: $-1+4-2=1$, $0+2-2=0$, $-2+4-2=0$.

(d) Le système s'écrit $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$. Or $L_3 = 2L_1 - L_2$ dans A_3, donc une solution vérifie $c = 2\times 1 - 2 = 0$. Si $c \neq 0$, il n'y a aucune solution. Si $c = 0$, il reste $y = 2 - z$ et $x = 1 - 2(2-z) - z = z - 3$: les solutions sont les triplets $(z-3\,;\,2-z\,;\,z)$ avec z réel. Il y en a une infinité.

5. *Résoudre un système $AX = B$*

Ex. 29 ★☆☆ **Du système à l'écriture $AX = B$**

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) La deuxième ligne de A commence par 0 : x est absente de la deuxième équation. $AX = B$ s'écrit donc $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3y = -9 \end{cases}$.

(c) On remet dans l'ordre : $x+2y=5$ et $-3x+y=-8$.
Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(d) On passe les inconnues à gauche : $3x-2y=4$ et $x+y=3$.
Donc $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(f) On remet dans l'ordre : $2x+y-z=1$, $-x+z=1$ et $-x+3y=2$.
Donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ex. 30 ★☆☆ **Résoudre avec la matrice inverse**

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\det A = 2\times 2 - 3\times 1 = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2\times 4 - 3\times 3 \\ -4 + 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Contrôle : $-1 + 2\times 2 = 3$. Unique solution : le couple $(-1\,;2)$.

(b) La deuxième équation s'écrit $3x - y = 5$. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\det A = 5\times(-1) - (-2)\times 3 = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -9 + 10 \\ -27 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Contrôle : $3\times 1 = -2 + 5$. Unique solution : le couple $(1\,;-2)$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\det A = 4\times 1 - 2\times 3 = -2 \neq 0$, donc $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6-4 \\ -18+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Contrôle : $4\times(-1) + 2\times 5 = 6$. Unique solution : le couple $(-1\,;5)$.

Ex. 30 **(suite)**

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+3-6 \\ -5+3+6 \\ 5-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Contrôle : $2+4=6$. Unique solution : le triplet $(1\,;2\,;4)$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3+1+4 \\ 6-1-4 \\ -3+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Contrôle : $2\times(-1)+1=-1$. Unique solution : le triplet $(2\,;1\,;-1)$.

Ex. 31 ★★☆ **Déterminant nul : aucune ou une infinité ?**

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ m \end{pmatrix}$. $\det A = 2\times 6 - (-3)\times(-4) = 12-12 = 0$. A n'est donc pas inversible et on ne peut pas écrire $X = A^{-1}B$.

(b) On remarque que $-4x+6y = -2(2x-3y)$. Si $(x\,;y)$ vérifie la première équation, alors $-4x+6y = -2\times 5 = -10$. Or $-10 \neq 3$, donc la deuxième équation ne peut pas être vérifiée en même temps. (S_3) n'a aucune solution.

(c) Même calcul : s'il existe une solution, alors $m=-10$. Réciproquement, pour $m=-10$, la deuxième équation est la première multipliée par -2. Le système équivaut donc à $2x-3y=5$, soit $y=\frac{2x-5}{3}$. Les solutions sont les couples $\left(x\,;\frac{2x-5}{3}\right)$, x réel : il y en a une infinité, par exemple $(1\,;-1)$ et $(4\,;1)$.

(d) Non. $\det A = 0$ signifie seulement qu'il n'y a pas de solution unique. Pour $m \neq -10$ il n'y a aucune solution, mais pour $m=-10$ il y en a une infinité : par exemple, $(4\,;1)$ est solution de (S_{-10}) car $8-3=5$ et $-16+6=-10$.

Ex. 32 ★★☆ **Une parabole par trois points**

(a) $f(-1)=6$, $f(1)=2$ et $f(2)=3$ donnent $\begin{cases} a-b+c=6 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$, soit $AX=B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule ligne par colonne : par exemple, le coefficient d'indice $(1,1)$ vaut $1+3+2=6$ et celui d'indice $(1,2)$ vaut $-3-3+6=0$. On obtient $AN = 6I_3$, donc $A\times\frac{1}{6}N = I_3$. Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}N$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Non. On multiplie $AX=B$ à gauche par A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}B$, donc $X = A^{-1}B$. De plus, B est de format 3×1 et A^{-1} de format 3×3 : le produit BA^{-1} n'existe pas, car $1 \neq 3$.

(d) $X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6-6+6 \\ -18+6+0 \\ 12+12-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vérification : $f(-1) = 1+2+3 = 6$, $f(1) = 1-2+3 = 2$ et $f(2) = 4-4+3 = 3$. La courbe passe bien par E, F et G.

Ex. 33 ★★★ **Trois coffrets, des colonnes dans le désordre**

(a) Attention : les colonnes du tableau sont dans l'ordre café, chocolat, thé, alors que les inconnues sont dans l'ordre x (thé), y (café), z (chocolat). Matin : $x+2y = 16$ (il n'y a pas de chocolat, donc le coefficient de z est 0). Goûter : $y+z=11$ (le coefficient de x est 0). Veillée : $x+2y+z=21$. Le système s'écrit $AX=B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}$.

(b) Ligne 1 de AN : $(-1+2\,;-2+2\,;2-2) = (1\,;0\,;0)$. Ligne 2 : $(1-1\,;1+0\,;-1+1) = (0\,;1\,;0)$. Ligne 3 : $(-1+2-1\,;-2+2+0\,;2-2+1) = (0\,;0\,;1)$. Donc $AN = I_3$: A est inversible et $A^{-1} = N$.

(c) A est inversible : on multiplie $AX=B$ à gauche par A^{-1}. $X = A^{-1}B = NB = \begin{pmatrix} -16-22+42 \\ 16+11-21 \\ -16+0+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Contrôle avec le coffret Veillée : $4+2\times 6+5 = 21$. Un paquet de thé coûte 4 €, un paquet de café 6 € et un paquet de chocolat 5 €.

(d) On garde la même matrice A, donc on réutilise A^{-1} : $X' = N\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17-24+46 \\ 17+12-23 \\ -17+0+23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Contrôle avec le coffret Matin : $5+2\times 6 = 17$. Les nouveaux prix seront 5 € pour le thé, 6 € pour le café et 6 € pour le chocolat. Un coffret avec un paquet de chaque produit coûtera $5+6+6=17$ euros.

Ex. 34 ★★★ **Un paramètre qui décide de tout**

(a) $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\det A_k = k \times k - 2 \times 2 = k^2 - 4 = (k-2)(k+2)$. Une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

Donc A_k est inversible si et seulement si $k \neq 2$ et $k \neq -2$.

(b) $A_k^{-1} = \frac{1}{k^2-4}\begin{pmatrix} k & -2 \\ -2 & k \end{pmatrix}$.

Donc $X = A_k^{-1}B = \frac{1}{k^2-4}\begin{pmatrix} 4k-8 \\ -8+4k \end{pmatrix} = \frac{4(k-2)}{(k-2)(k+2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient $x = y = \frac{4}{k+2}$. Contrôle : $k \times \frac{4}{k+2} + 2 \times \frac{4}{k+2} = \frac{4(k+2)}{k+2} = 4$. Pour $k \neq \pm 2$, (S_k) a pour unique solution le couple $\left(\frac{4}{k+2} ; \frac{4}{k+2}\right)$.

(c) D'après la première question, A_k n'est pas inversible pour $k = 2$ et $k = -2$: on ne peut pas utiliser A_k^{-1}, on tranche par le calcul. Si $k = 2$, les deux équations s'écrivent $2x + 2y = 4$, c'est-à-dire $y = 2 - x$. (S_2) a donc une infinité de solutions : les couples $(t ; 2-t)$, t réel. Si $k = -2$, on a $-2x + 2y = 4$ et $2x - 2y = 4$. En additionnant, on obtient $0 = 8$, ce qui est impossible : (S_{-2}) n'a aucune solution. Un déterminant nul ne suffit donc pas à conclure : on trouve une infinité de solutions dans un cas et aucune dans l'autre.

(d) $(1 ; 1)$ est solution si et seulement si $k + 2 = 4$ et $2 + k = 4$, c'est-à-dire $k = 2$. Pour $k = 2$, la question précédente montre que le système a une infinité de solutions. Par exemple, $(0 ; 2)$ convient aussi : $2 \times 0 + 2 \times 2 = 4$. Le couple $(1 ; 1)$ n'est donc pas l'unique solution. La formule obtenue quand A_k est inversible ne s'applique pas ici, car A_2 n'est pas inversible.

Ex. 35 ★★★ **Coder et décoder avec une matrice**

(a) $\det A = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$. Ce déterminant n'est pas nul, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) On a $AX = \begin{pmatrix} 19 \\ 27 \end{pmatrix}$, et A est inversible. On multiplie à gauche par A^{-1} : $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 19 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 - 54 \\ -76 + 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Contrôle : $3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$ et $4 \times 3 + 3 \times 5 = 27$. Noé a envoyé le couple $(3 ; 5)$.

Ex. 35 (suite)

(c) C est de format 2×3 et A^{-1} de format 2×2. Le produit CA^{-1} n'existe pas, car $3 \neq 2$. De plus, A est à gauche dans $AM = C$, donc on multiplie à gauche : $M = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 36-34 & 21-20 & 48-44 \\ -48+51 & -28+30 & -64+66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Contrôle avec la première colonne : $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$. Les couples envoyés sont $(2 ; 3)$, $(1 ; 2)$ et $(4 ; 2)$.

(d) On a $LA = R$, avec A à droite. On multiplie donc à droite par A^{-1} : $L = RA^{-1}$. Le produit $A^{-1}R$ (2×2 par 1×2) n'existe pas. $L = \begin{pmatrix} 18 \times 3 + 13 \times (-4) & 18 \times (-2) + 13 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Contrôle : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 6+12 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 13 \end{pmatrix}$. Sacha a envoyé le couple $(2 ; 3)$.

6. *Suites $U_{n+1} = AU_n$ et calcul de A^n avec une matrice diagonale*

Ex. 36 ★☆☆ **Puissances d'une matrice diagonale**

(a) D est diagonale, donc $D^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & (-2)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

(b) D est diagonale : pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ (pour $n = 0$, on retrouve bien I_2).

(c) La matrice est diagonale, donc son cube vaut $\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$. Par égalité des coefficients, $a^3 = -8$ et $b^3 = 125$. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $a = -2$ et $b = 5$ sont les seules solutions.

(d) Non. B n'est pas diagonale, donc on ne peut pas élever chaque coefficient au carré. On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times 3 \\ 0 & 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Le coefficient b_{12} vaut 5 et non 1.

(e) D'après le cours, $U_n = D^n U_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 2 \times (-2)^n \end{pmatrix}$. Contrôle : pour $n = 0$, on retrouve U_0.

(f) $F^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, les deux coefficients diagonaux tendent vers 0 ; les autres valent 0. Tous les coefficients de F^n tendent donc vers 0.

Ex. 37 ★☆☆ **Traduire une suite couplée**

(a) La première ligne donne u_{n+1}, la seconde v_{n+1} : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) La première ligne doit maintenant donner $v_{n+1} = 3v_n + u_n$ et la seconde $u_{n+1} = -v_n + 2u_n$: $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, différente de A.

(c) $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $U_2 = AU_1 = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(d) D'après le cours, $U_5 = A^5U_0$. U_0 est de taille 2×1 et A^5 de taille 2×2 : le produit U_0A^5 demanderait que U_0 ait 2 colonnes, ce qui n'est pas le cas. Ce produit n'existe pas.

(e) On passe de U_2 à U_9 en 7 étapes : $U_9 = A^7U_2$ (et non A^9U_2).

Ex. 38 ★★☆ **Calculer A^n avec P et D donnés**

(a) $PQ = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2$.
Donc P est inversible et $P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $AP = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ -2+4 & -2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
Donc $AP = PD$; en multipliant à droite par P^{-1} : $APP^{-1} = PDP^{-1}$, soit $A = PDP^{-1}$.

(c) $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$. Le produit est associatif et $P^{-1}P = I_2$, donc $A^2 = PDI_2DP^{-1} = PD^2P^{-1}$. On ne peut pas simplifier P avec un P^{-1} qui n'est pas juste à côté de lui, car le produit n'est pas commutatif.
Conclusion : $A^2 = PD^2P^{-1}$.

(d) $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^n & 2\times 3^n \end{pmatrix}$, donc $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n \\ 2^{n+1}-2\times 3^n & 2\times 3^n - 2^n \end{pmatrix}$. Contrôle pour $n=1$: $\begin{pmatrix} 4-3 & 3-2 \\ 4-6 & 6-2 \end{pmatrix} = A$.

Ex. 39 ★★☆ **Entre Lorient et Vannes**

(a) $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n$, donc $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

(b) $PP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+1 & 4-4 \\ 1-1 & 1+4 \end{pmatrix} = I_2$. Ensuite $PD = \begin{pmatrix} 4 & 0{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$, donc $PDP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0{,}5 & 4-2 \\ 1-0{,}5 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = A$.

Ex. 39 **(suite)**

(c) $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$, $PD^n = \begin{pmatrix} 4 & 0{,}5^n \\ 1 & -0{,}5^n \end{pmatrix}$, donc $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+0{,}5^n & 4-4\times 0{,}5^n \\ 1-0{,}5^n & 1+4\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Contrôle : pour $n=1$, on retrouve A.

(d) Pour $k \geqslant 0$, on pose $V_k = U_{k+1}$: $V_{k+1} = AV_k$, donc $V_k = A^kV_0$, d'où $U_n = A^{n-1}U_1$. Avec $q = 0{,}5^{n-1}$: $a_n = \frac{30(4+q)+20(4-4q)}{5} = 40 - 10\times 0{,}5^{n-1}$ et $b_n = \frac{30(1-q)+20(1+4q)}{5} = 10 + 10\times 0{,}5^{n-1}$. Contrôle : $a_1 = 30$ et $b_1 = 20$.

(e) Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim 0{,}5^{n-1} = 0$, donc $\lim a_n = 40$ et $\lim b_n = 10$. À long terme, Lorient compte environ 40 000 habitants et Vannes 10 000 (le total reste 50 000).

Ex. 40 ★★★ **Vélos en libre-service à Chambéry**

(a) Campus garde 70 % de ses vélos et reçoit 20 % de ceux de Gare : $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2g_n$. De même, $g_{n+1} = 0{,}3c_n + 0{,}8g_n$. Comme $U_n = \begin{pmatrix} c_n \\ g_n \end{pmatrix}$, la première ligne correspond à Campus : $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Contrôle : $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 130 \\ 270 \end{pmatrix}$, et le total vaut bien 400.

(b) $PQ = \begin{pmatrix} 2+3 & 2-2 \\ 3-3 & 3+2 \end{pmatrix} = 5I_2$, donc $P \times \frac{1}{5}Q = I_2$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Ensuite $AP = \begin{pmatrix} 1{,}4+0{,}6 & 0{,}7-0{,}2 \\ 0{,}6+2{,}4 & 0{,}3-0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 3 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \\ 3 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.
Donc $AP = PD$.

(c) En multipliant $AP = PD$ à droite par P^{-1}, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.
Récurrence. Initialisation : $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$. Hérédité : si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Conclusion : $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

(d) D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$. On a $PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5^n \\ 3 & -0{,}5^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3\times 0{,}5^n & 2-2\times 0{,}5^n \\ 3-3\times 0{,}5^n & 3+2\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Contrôle avec $n=1$: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & 4 \end{pmatrix} = A$.

Ex. 40 (suite)

(e) D'après le cours, $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix}100\\300\end{pmatrix}$. On obtient $c_n = \frac{100(2+3\times 0{,}5^n)+300(2-2\times 0{,}5^n)}{5} = 160 - 60\times 0{,}5^n$ et $g_n = 240 + 60\times 0{,}5^n$ (avec $n=0$, on retrouve bien 100 et 300). Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim 0{,}5^n = 0$, donc (c_n) tend vers 160 et (g_n) vers 240. À long terme, il y aura environ 160 vélos à Campus et 240 à Gare.

Ex. 41 ★★★ Une suite qui démarre au rang 1

(a) La première ligne de U_{n+1} est $u_{n+1} = 2u_n + 1\times v_n$ et la seconde est $v_{n+1} = 0\times u_n + 2v_n$, donc $A = \begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix}4&4\\0&4\end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix}8&12\\0&8\end{pmatrix}$. Les coefficients en haut à droite sont $1 = 1\times 2^0$, $4 = 2\times 2^1$ et $12 = 3\times 2^2$. On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix}2^n & n\times 2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$.

(c) Initialisation : pour $n=0$, la formule donne $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2 = A^0$. Hérédité : si la formule est vraie au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix}2^{n+1} & 2^n + n\times 2^n\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$, et $2^n + n\times 2^n = (n+1)\times 2^{(n+1)-1}$: la formule est donc vraie au rang $n+1$. Conclusion : elle est vraie pour tout entier naturel n.

(d) Première erreur : U_1A^n n'existe pas, car on ne peut pas multiplier une matrice 2×1 par une matrice 2×2. Il faut multiplier à gauche par la puissance de A. Seconde erreur : la suite démarre à U_1, donc on passe de U_1 à U_n en $n-1$ étapes. Pour tout $n\geqslant 1$, $U_n = A^{n-1}U_1$ (on applique le cours à $V_k = U_{k+1}$). On obtient $u_n = 2^{n-1}\times 1 + (n-1)\times 2^{n-2}\times 2 = n\times 2^{n-1}$ et $v_n = 2^{n-1}\times 2 = 2^n$. Contrôle : $u_2 = 4$, ce qui donne bien $2u_1 + v_1 = 4$.

(e) $u_{n+1} - u_n = (n+1)\times 2^n - n\times 2^{n-1} = 2^{n-1}(2n+2-n) = 2^{n-1}(n+2) > 0$, donc (u_n) est croissante. On calcule $u_7 = 7\times 2^6 = 448$ et $u_8 = 8\times 2^7 = 1\,024$. Comme la suite est croissante, $u_n \leqslant 448$ pour $n\leqslant 7$. Le plus petit entier cherché est donc $n=8$.

Ex. 42 ★★★ Moyennes successives et matrice diagonale

(a) $A = \begin{pmatrix}0&1\\0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}$. $\det(P) = 1\times(-1) - 2\times 1 = -3 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. Vérification : $PP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2&2-2\\1-1&2+1\end{pmatrix} = I_2$.

Ex. 42 (suite)

(b) $AP = \begin{pmatrix}0+1&0-1\\0{,}5+0{,}5&1-0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\1&0{,}5\end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix}1&-1\\1&0{,}5\end{pmatrix}$, donc $AP = PD$. En multipliant à droite par P^{-1}, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.

(c) C'est faux. Par définition, $U_1 = \begin{pmatrix}v_0\\\frac{u_0+v_0}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$, alors que $DU_0 = \begin{pmatrix}0\\-1{,}5\end{pmatrix}$. Mattéo remplace A^n par D^n : or $U_n = A^nU_0$ et $A^n = PD^nP^{-1}$, qui est différent de D^n.

(d) D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix}1&0\\0&(-0{,}5)^n\end{pmatrix}$. On a $PD^n = \begin{pmatrix}1&2\times(-0{,}5)^n\\1&-(-0{,}5)^n\end{pmatrix}$, puis $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\times(-0{,}5)^n & 2-2\times(-0{,}5)^n\\1-(-0{,}5)^n & 2+(-0{,}5)^n\end{pmatrix}$. Contrôle avec $n=1$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3\\1{,}5&1{,}5\end{pmatrix} = A$.

(e) D'après le cours, $U_n = A^nU_0$, donc $u_n = \frac{3(2-2\times(-0{,}5)^n)}{3} = 2 - 2\times(-0{,}5)^n$ et $v_n = 2 + (-0{,}5)^n$ (avec $n=1$, on retrouve 3 et 1,5). Comme $-1 < -0{,}5 < 1$, $\lim(-0{,}5)^n = 0$. Les deux suites convergent donc vers 2.

7. *Suite affine $U_{n+1} = AU_n + B$: état stable*

Ex. 43 ★☆☆ Trouver l'état stable

(a) On pose $C = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. $C = AC + B$ équivaut à $x = 0{,}2x + 4$ et $y = 0{,}6y + 2$, soit $0{,}8x = 4$ et $0{,}4y = 2$. Donc $C = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$.

(b) $I_2 - A = \begin{pmatrix}0{,}5&-0{,}25\\-0{,}5&0{,}5\end{pmatrix}$ et $\det(I_2-A) = 0{,}5\times 0{,}5 - (-0{,}25)\times(-0{,}5) = 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}125 \neq 0$. $I_2 - A$ est inversible, donc, pour toute colonne B, l'équation $(I_2-A)C = B$ a une unique solution $C = (I_2-A)^{-1}B$: l'état stable existe et il est unique.

(c) $(I_2-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}125}\begin{pmatrix}0{,}5&0{,}25\\0{,}5&0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&2\\4&4\end{pmatrix}$. Donc $C = (I_2-A)^{-1}B = \begin{pmatrix}12+2\\12+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\16\end{pmatrix}$. Contrôle : $AC + B = \begin{pmatrix}7+4+3\\7+8+1\end{pmatrix} = C$.

(d) $A - I_2 = -(I_2 - A)$, donc $(A-I_2)C' = B$ équivaut à $(I_2-A)(-C') = B$, d'où $-C' = C$. On obtient $C' = \begin{pmatrix}-14\\-16\end{pmatrix} = -C$. Ce n'est pas l'état stable : le signe est faux.

Ex. 43 (suite)

(e) $AC+B=\begin{pmatrix}2\times1+1\times2\\0\times1+3\times2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=C$. Donc C est bien un état stable.

(f) Non. U_n est une colonne à 2 lignes, donc AU_n est de taille 2×1. On ne peut pas l'additionner à une matrice ligne 1×2. B doit être une colonne à 2 lignes, par exemple $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

(g) $I_2-A=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, de déterminant $-1\times1-(-1)\times1=0$: I_2-A n'est pas inversible. $(I_2-A)C=B$ s'écrit $\begin{cases}-x-y=1\\x+y=1\end{cases}$, donc $x+y=-1$ et $x+y=1$: c'est impossible. Il n'y a aucun état stable.

Ex. 44 ★☆☆ Terme général avec une matrice diagonale

(a) $U_1=AU_0+B=\begin{pmatrix}0{,}5\times20\\0{,}25\times8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\5\end{pmatrix}$.

(b) $(I_2-A)C=B$ s'écrit $0{,}5x=6$ et $0{,}75y=3$, donc $C=\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$.

(c) A est diagonale, donc $A^n=\begin{pmatrix}0{,}5^n&0\\0&0{,}25^n\end{pmatrix}$.

(d) $U_0-C=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$, donc $U_n=\begin{pmatrix}8\times0{,}5^n\\4\times0{,}25^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$. On obtient $u_n=12+8\times0{,}5^n$ et $v_n=4+4\times0{,}25^n$. Contrôle : $u_1=16$ et $v_1=5$.

(e) $0{,}5^n$ et $0{,}25^n$ tendent vers 0 car $0<0{,}25<0{,}5<1$. Donc (U_n) converge vers $C=\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$, et non vers la matrice nulle.

(f) $u_n-12=8\times0{,}5^n$.
Donc $u_n-12<0{,}01\iff0{,}5^n<0{,}00125\iff2^n>800$. La suite (2^n) est croissante, et $2^9=512<800<1024=2^{10}$. Le plus petit entier cherché est donc $n=10$.

Ex. 45 ★★☆ Vrai ou faux sur la suite affine

(a) Vrai. Par récurrence : $U_0=C$. Si $U_n=C$ pour un entier n, alors $U_{n+1}=AC+B=C$, car C est un état stable. La propriété est héréditaire, donc $U_n=C$ pour tout entier naturel n.

(b) Faux. $V_{n+1}=U_{n+1}-C=(AU_n+B)-(AC+B)=A(U_n-C)=AV_n$. Les deux B s'annulent : la suite (V_n) vérifie $V_{n+1}=AV_n$, et $AV_n+B\neq AV_n$ dès que $B\neq O$.

Ex. 45 (suite)

(c) Faux. Contre-exemple : $A=2I_2$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $U_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Alors $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $U_2=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, alors que $A^2U_0+2B=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(d) Faux. Contre-exemple : $A=O_2$ (donc $A^n=O_2$ pour $n\geqslant1$) et $B=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Pour tout $n\geqslant1$, $U_n=B$, donc (U_n) tend vers $B\neq O$. En général, la limite est l'état stable C, et non la matrice nulle.

(e) Faux. Contre-exemple : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0{,}5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. $\det(I_2-A)=0\times0{,}5-0=0$, mais $C=AC+B$ s'écrit $x=x$ et $y=0{,}5y+1$: toute matrice $\begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$ est un état stable. Il y en a une infinité.

Ex. 46 ★★☆ Les truites des deux étangs

(a) $m_{n+1}=0{,}6m_n+0{,}2f_n+400$ et $f_{n+1}=0{,}2m_n+0{,}6f_n+100$.
Donc $U_{n+1}=AU_n+B$ avec $A=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}2\\0{,}2&0{,}6\end{pmatrix}$ (carrée d'ordre 2) et $B=\begin{pmatrix}400\\100\end{pmatrix}$, colonne 2×1 comme U_n.

(b) $I_2-A=\begin{pmatrix}0{,}4&-0{,}2\\-0{,}2&0{,}4\end{pmatrix}$, et son déterminant vaut $0{,}16-0{,}04=0{,}12\neq0$: I_2-A est inversible.
Donc $C=(I_2-A)^{-1}B=\frac{1}{0{,}12}\begin{pmatrix}0{,}4&0{,}2\\0{,}2&0{,}4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}400\\100\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}12}\begin{pmatrix}180\\120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\1000\end{pmatrix}$.

(c) $V_0=\begin{pmatrix}500-1500\\400-1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1000\\-600\end{pmatrix}$ et $P^{-1}V_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1600\\-400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-800\\-200\end{pmatrix}$.

(d) Comme $A=PDP^{-1}$ et $P^{-1}P=I_2$, on a $A^n=PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n (récurrence immédiate : $A^{n+1}=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$).
Donc $A^nV_0=PD^n\begin{pmatrix}-800\\-200\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-800\times0{,}8^n\\-200\times0{,}4^n\end{pmatrix}$. On en déduit $m_n=1500-800\times0{,}8^n-200\times0{,}4^n$ et $f_n=1000-800\times0{,}8^n+200\times0{,}4^n$. Contrôle : $m_1=780$ et $f_1=440$, comme avec la relation de récurrence.

(e) Comme $0<0{,}4<0{,}8<1$, $0{,}8^n$ et $0{,}4^n$ tendent vers 0. Donc (m_n) tend vers 1500 et (f_n) vers 1000. À long terme, il y aura environ 1500 truites au Moulin et 1000 truites à la Forge.

Ex. 47 ★★★ Les abricots de la coopérative

(a) Chaque semaine, $e_{n+1} = 0{,}4e_n + 0{,}1f_n + 16$ et $f_{n+1} = 0{,}2e_n + 0{,}3f_n + 8$.

Donc $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, carrée d'ordre 2, et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$, colonne à 2 lignes comme U_n.

Ensuite, $U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 16{,}8 + 2{,}6 + 16 \\ 8{,}4 + 7{,}8 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35{,}4 \\ 24{,}2 \end{pmatrix}$. Après une semaine, il y a 35,4 t d'abricots en E et 24,2 t en F.

(b) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ (et non $A - I_2$). Son déterminant vaut $0{,}6 \times 0{,}7 - (-0{,}1) \times (-0{,}2) = 0{,}42 - 0{,}02 = 0{,}4 \neq 0$, donc elle est inversible et $(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$. Ensuite, $C = AC + B \iff (I_2 - A)C = B \iff C = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 28 + 2 \\ 8 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$. L'état stable existe et il est unique : $C = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $V_{n+1} = U_{n+1} - C = (AU_n + B) - (AC + B) = AU_n - AC = A(U_n - C) = AV_n$. La suite (V_n) vérifie donc $V_{n+1} = AV_n$, d'où $V_n = A^nV_0$ par récurrence immédiate. Comme $U_n = V_n + C$, on obtient $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ pour tout entier naturel n.

(d) $\det P = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$, donc $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $U_0 - C = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}(U_0 - C) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D^n\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 0{,}5^n \\ 2 \times 0{,}2^n \end{pmatrix}$. En multipliant par P puis en ajoutant C : $e_n = 30 + 10 \times 0{,}5^n + 2 \times 0{,}2^n$ et $f_n = 20 + 10 \times 0{,}5^n - 4 \times 0{,}2^n$. Contrôle : $e_0 = 42$, $f_0 = 26$ et $e_1 = 30 + 5 + 0{,}4 = 35{,}4$.

(e) Comme $-1 < 0{,}5 < 1$ et $-1 < 0{,}2 < 1$, les suites $(0{,}5^n)$ et $(0{,}2^n)$ tendent vers 0.

Donc $\lim e_n = 30$ et $\lim f_n = 20$: (U_n) tend vers C, et non vers la matrice nulle. À long terme, il y aura environ 30 t d'abricots en E et 20 t en F. Le stock total tend vers 50 tonnes, quel que soit le stock de départ.

Ex. 48 ★★★ Corriger la copie de Léo

(a) $C = AC + B \iff C - AC = B \iff (I_2 - A)C = B$: il faut $I_2 - A$, pas $A - I_2$. Avec la matrice de Léo, on obtiendrait $-C$ au lieu de C. Ici, $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et son déterminant vaut $0{,}25 \neq 0$. Elle est donc inversible, avec $(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}25}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. L'état stable est unique : $C = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 + 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$. Contrôle : $AC + B = \begin{pmatrix} 5 + 4 + 1 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = C$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 1 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}125 \end{pmatrix}$. On conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 2n \times 0{,}5^n \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Initialisation : pour $n = 0$, on trouve I_2, ce qui est vrai. Hérédité : si la formule est vraie au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 0{,}5^{n+1} & 0{,}5^n + 2n \times 0{,}5^{n+1} \\ 0 & 0{,}5^{n+1} \end{pmatrix}$. Or $0{,}5^n + n \times 0{,}5^n = (n + 1) \times 0{,}5^n = 2(n + 1) \times 0{,}5^{n+1}$: la formule est vraie au rang $n + 1$. Conclusion : elle est vraie pour tout entier naturel n.

(c) $U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = AU_1 + B = \begin{pmatrix} 1{,}5 + 2 + 1 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$. La formule de Léo donne $A^2U_0 + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq U_2$. Elle n'est juste que pour $n = 1$: en réalité, chaque apport B est lui aussi multiplié par A aux étapes suivantes. Léo a donc tort.

(d) $U_n = A^n(U_0 - C) + C$ avec $U_0 - C = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc $A^n(U_0 - C) = \begin{pmatrix} -6 \times 0{,}5^n - 8n \times 0{,}5^n \\ -4 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 10 - (6 + 8n) \times 0{,}5^n \\ 4 - 4 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Contrôle : on retrouve $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) Comme $0 < 0{,}5 < 1$, $0{,}5^n$ tend vers 0, et $n \times 0{,}5^n$ aussi. Tous les coefficients de A^n tendent donc vers 0. Mais c'est seulement l'écart $A^n(U_0 - C)$ qui disparaît : $(6 + 8n) \times 0{,}5^n$ et $4 \times 0{,}5^n$ tendent vers 0.

Donc (U_n) converge vers $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, et non vers la matrice nulle.

Ex. 49 ★★★ **Un paramètre, trois comportements**

(a) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -1 & 1-k \end{pmatrix}$, de déterminant $(1-k)^2 - 1 = k^2 - 2k = k(k-2)$. Si $k \neq 0$ et $k \neq 2$, $I_2 - A$ est inversible : l'état stable existe, il est unique et vaut $C = (I_2 - A)^{-1}B$, quel que soit B. Si $k = 0$ ou $k = 2$, $I_2 - A$ n'est pas inversible : selon B, il n'y en a aucun ou il y en a une infinité.

(b) Pour $k = 2$, $I_2 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $(I_2 - A)C = B$ s'écrit $\begin{cases} -x - y = 1 \\ -x - y = 2 \end{cases}$. Ce système est incompatible : il n'existe aucun état stable. Supposons que (U_n) converge vers une colonne L. Alors U_{n+1} tend vers L. Chaque coefficient de $AU_n + B$ est une combinaison des coefficients de U_n plus une constante, donc $AU_n + B$ tend vers $AL + B$. Par unicité de la limite, $L = AL + B$, et L serait un état stable : c'est absurde. Donc (U_n) ne converge pour aucun U_0.

(c) $(I_2 - A)C = B$ s'écrit $\begin{cases} -x - y = 3 \\ -x - y = 3 \end{cases}$, c'est-à-dire $y = -3 - x$. Les états stables sont toutes les colonnes $\begin{pmatrix} t \\ -3 - t \end{pmatrix}$, où t est un réel : il y en a une infinité. Contrôle : $A\begin{pmatrix} t \\ -3-t \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 2t - 3 - t + 3 \\ t - 6 - 2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3 - t \end{pmatrix}$.

(d) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, de déterminant $0{,}25 - 1 = -0{,}75 \neq 0$, donc l'état stable est unique. Le système $\begin{cases} 0{,}5x - y = 1 \\ -x + 0{,}5y = 1 \end{cases}$ donne, par soustraction, $1{,}5x - 1{,}5y = 0$, donc $x = y$, puis $-0{,}5x = 1$. D'où $C = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ensuite, $U_0 - C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(U_0 - C) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1{,}5(U_0 - C)$.

(e) Soit $V_0 = U_0 - C$. Montrons que $A^n V_0 = 1{,}5^n V_0$. Initialisation : pour $n = 0$, c'est $V_0 = V_0$. Hérédité : si $A^n V_0 = 1{,}5^n V_0$, alors $A^{n+1}V_0 = A(1{,}5^n V_0) = 1{,}5^n \times AV_0 = 1{,}5^{n+1}V_0$. La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n. Avec $U_n = A^n(U_0 - C) + C$, on obtient $U_n = \begin{pmatrix} 2 \times 1{,}5^n - 2 \\ 2 \times 1{,}5^n - 2 \end{pmatrix}$. Comme $1{,}5 > 1$, $1{,}5^n$ tend vers $+\infty$: (U_n) diverge. L'état stable existe, mais A^n ne tend pas vers O. L'existence de C ne suffit donc pas pour que la suite converge.