Terminale maths complémentaires / Lois à densité : uniforme et exponentielle

benprof particulier.fr

42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Densité : une probabilité est une aire*

À retenir : f est une densité sur I si elle est continue, positive sur I et d'intégrale 1 sur I. $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ et $P(X = c) = 0$. Piège : $f = 5$ sur $[0\,;0{,}2]$ est une densité (aire $5 \times 0{,}2 = 1$) : $f(t)$ n'est pas une probabilité.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : est-ce une densité ?** — Pour chaque fonction, dis si c'est une densité de probabilité sur l'intervalle donné. Vérifie les trois conditions : continuité, positivité, intégrale égale à 1.

a) $f_1(t) = 0{,}5t$ sur $[0\,;2]$.

b) $f_2(t) = 4$ sur $[0\,;0{,}25]$. Léo affirme : « f_2 ne peut pas être une densité, car $4 > 1$. » A-t-il raison ? Justifie.

c) $f_3(t) = 0{,}2$ sur $[0\,;4]$.

d) $f_4(t) = 6t(1-t)$ sur $[0\,;1]$ (étudie le signe de chaque facteur).

e) $f_5(t) = 4t - 1$ sur $[0\,;1]$. Calcule d'abord son intégrale, puis conclus.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : une probabilité est une aire** — La durée X, en heures, d'une coupure de courant dans un village du Jura a pour densité $f(t) = 0{,}375t^2$ sur $[0\,;2]$. Une primitive de f est $G(t) = 0{,}125t^3$. Donne les valeurs exactes.

a) Calcule $f(2)$. Est-ce une probabilité ? Justifie.

b) Calcule $P(X \leqslant 1)$.

c) Calcule $P(X < 1{,}6)$.

d) Que vaut $P(X = 1{,}6)$? Justifie.

e) Calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}6)$.

f) Calcule $P(X > 1)$.

g) Calcule $P(1{,}6 \leqslant X \leqslant 3)$.

Ex. 3 ★☆☆ **Automatismes : des trapèzes sans intégrale** — Au guichet de la poste de Brest, le temps d'attente X, en minutes, a pour densité $f(t) = 0{,}04t + 0{,}1$ sur $[0\,;5]$. Calcule les aires avec des trapèzes, sans intégrale.

a) Calcule $f(0)$ et $f(5)$. Justifie que f est positive sur $[0\,;5]$.

b) Calcule l'aire du domaine sous la courbe de f entre 0 et 5. Que confirme ce résultat ?

Ex. 3 (suite)

c) Calcule $P(X \leqslant 2)$.

d) Calcule $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.

e) Calcule $P(X > 3)$.

Ex. 4 ★★☆ **Trouver la constante qui fait une densité** — Inès résout une énigme. Le temps X qu'elle y passe, en minutes, a pour densité $f(t) = k(9 - t^2)$ sur $[0\,;3]$, où k est un réel. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

a) Étudie le signe de $9 - t^2$ sur $[0\,;3]$. Quelle condition sur k rend f positive ?

b) Détermine k pour que f soit une densité sur $[0\,;3]$.

c) Calcule $P(X < 1)$.

d) Calcule $P(X > 2)$.

e) Calcule $P(-1 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$.

Ex. 5 ★★☆ **Corriger les erreurs de calcul** — À Grenoble, le retard X d'un tram, en minutes, a pour densité $f(t) = 0{,}5 - 0{,}125t$ sur $[0\,;4]$.

a) Montre que f est une densité sur $[0\,;4]$.

b) Nathan écrit : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \left[0{,}5t - 0{,}125t^2\right]_1^2 = 0{,}5 - 0{,}375 = 0{,}125$. Trouve son erreur, puis corrige.

c) Clara écrit : $P(X \geqslant 3) = \displaystyle\int_4^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ et obtient $-0{,}0625$. Explique son erreur, puis donne la bonne valeur.

Ex. 6 ★★★ **Une famille de fonctions : lesquelles sont des densités ?** — Dans un atelier vélo de Rennes, Malo modélise la durée X, en heures, d'une réparation. Pour un réel m, il pose $f_m(t) = mt^2 + c$ sur $[0\,;2]$, où c est un réel qui dépend de m. Donne les valeurs exactes.

a) Exprime c en fonction de m pour que $\displaystyle\int_0^2 f_m(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

b) Malo prend $m = -0{,}25$ et affirme : « l'intégrale vaut 1, donc f_m est une densité ». A-t-il raison ? Justifie.

c) Détermine toutes les valeurs de m pour lesquelles f_m est une densité sur $[0\,;2]$. Étudie le sens de variation de f_m selon le signe de m.

d) On prend $m = 0{,}3$. Calcule $f_m(2)$. Malo écrit $P(X = 2) = f_m(2)$. A-t-il raison ? Justifie.

e) Avec $m = 0{,}3$, calcule $P(X > 1{,}5)$ puis $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

Ex. 7 ★★★ **Attente du bateau : triangle, trapèze et intégrale** — À Marseille, le temps d'attente X, en minutes, de la navette vers le Frioul a pour densité une fonction affine f sur $[0\,;5]$, avec $f(5)=0$.

(a) Avec l'aire d'un triangle, détermine $f(0)$. Déduis-en l'expression de $f(t)$ et justifie que f est positive sur $[0\,;5]$.

(b) Calcule $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$ avec l'aire d'un trapèze, sans intégrale.

(c) Calcule $P(X<2)$ avec une intégrale.

(d) Déduis-en $P(X \geqslant 2)$, puis $P(X>2)$.

(e) Détermine le temps d de $[0\,;5]$ tel que $P(X>d)=0{,}16$. Exprime cette probabilité avec l'aire d'un triangle.

2. *Fonction de répartition*

À retenir : $F(x)=P(X\leqslant x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ croît de 0 à 1 et $F'=f$. $P(c<X\leqslant d)=F(d)-F(c)$, $P(X>x)=1-F(x)$, médiane : $F(m)=0{,}5$. Piège : $f(x)\neq F(x)$. Ex. : $F(x)=\frac{x^2}{4}$ sur $[0\,;2]$ donne $f(x)=\frac{x}{2}$.

Ex. 8 ★★★ **Automatismes : calculer et utiliser F** — À un guichet de Brest, le temps d'attente X de Yanis (en minutes) a pour densité $f(t)=\frac{t}{18}$ sur $[0\,;6]$. On note F sa fonction de répartition. Donne les valeurs exactes.

(a) Exprime $F(x)$ pour $x\in[0\,;6]$ en calculant $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Donne $F(x)$ pour $x<0$, puis pour $x>6$.

(c) Calcule $P(X\leqslant 3)$.

(d) Calcule $P(2<X\leqslant 4)$.

(e) Calcule $P(X>5)$.

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : lire un tableau de valeurs de F** — La durée de fonctionnement X (en heures) de la lampe frontale d'Inès, à Grenoble, est une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0\,;8]$. Voici des valeurs de sa fonction de répartition F :

t	F(t)
0	0
2	0,3
4	0,55
6	0,8
8	1

(a) Donne $P(X\leqslant 4)$.

(b) Calcule $P(X>2)$.

(c) Calcule $P(2<X\leqslant 6)$.

(d) Donne $P(X<6)$. Justifie.

(e) Donne $F(-1)$ et $F(9)$.

Ex. 9 (suite)

(f) Sophie affirme que $F(5)=0{,}85$. Est-ce possible ? Justifie.

Ex. 10 ★★★ **Loi exponentielle : F, médiane et quantile** — La durée de vie X (en années) de la batterie du vélo de Théo, à Bordeaux, suit la loi $\mathcal{E}(0{,}125)$. Donne la valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

(a) Donne l'expression de $F(t)=P(X\leqslant t)$ pour $t\geqslant 0$.

(b) Calcule $P(X\leqslant 4)$.

(c) Calcule $P(X>12)$.

(d) Calcule $P(4<X\leqslant 12)$.

(e) Détermine la médiane m de X en résolvant $F(m)=0{,}5$.

(f) Détermine la durée t dépassée avec probabilité 0,1, c'est-à-dire telle que $P(X>t)=0{,}1$.

Ex. 11 ★★★ **Retrouver la densité à partir de F** — À l'atelier de Malik, à Lille, la durée X (en heures) d'une réparation a pour fonction de répartition $F(x)=\frac{x^2-1}{8}$ sur $[1\,;3]$, avec $F(x)=0$ avant 1 et $F(x)=1$ après 3.

(a) Calcule $F(1)$ et $F(3)$, puis interprète ces deux valeurs.

(b) Détermine la densité f de X sur $[1\,;3]$ et vérifie qu'elle est positive.

(c) Léa écrit : « $P(X\leqslant 2)=f(2)=0{,}5$ ». Repère son erreur et corrige-la.

(d) Calcule $P(X>2{,}5)$.

(e) Détermine la médiane de X : valeur exacte, puis arrondi au centième.

Ex. 12 ★★★ **Constante, F et quantile** — À Nantes, le temps X (en minutes) que met Chloé pour se garer a pour densité $f(t)=kt^2$ sur $[0\,;3]$, où k est un réel positif. On note F la fonction de répartition de X.

(a) Détermine k.

(b) Pour $x\in[0\,;3]$, écris $F(x)$ sous forme d'intégrale, puis calcule-la.

(c) Donne l'expression de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(d) Calcule $P(1<X\leqslant 2)$: valeur exacte, puis arrondi au millième.

(e) Détermine le temps x dépassé avec probabilité 0,1, arrondi au millième.

Ex. 13 ★★★ **Densité affine à reconstituer** — Au musée de Strasbourg, la durée X (en heures) de la visite libre de Nora a pour densité $f(t)=at+b$ sur $[0\,;2]$, où a et b sont des réels. On sait que $P(X\leqslant 1)=0{,}375$. On note F la fonction de répartition de X. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Exprime $F(x)$ en fonction de a, b et x pour $x\in[0\,;2]$, puis donne $F(x)$ pour $x<0$ et pour $x>2$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Détermine a et b à l'aide de $F(2)$ et de $P(X \leqslant 1)$, puis vérifie que f est bien positive sur $[0\,;2]$.

(c) Détermine la médiane m de X, puis interprète-la dans le contexte.

(d) Hugo affirme : « $P(X > 1{,}6) = 1 - f(1{,}6)$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $P(X > 1{,}6)$.

(e) Calcule $E(X)$ et $V(X)$, puis compare $E(X)$ à la médiane m.

Ex. 14 ★★★ **Attente au centre d'appels : de F au seuil** — Dans un centre d'appels de Toulouse, le temps d'attente X (en minutes) avant de joindre un conseiller suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, de densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0\,;+\infty[$. On note F sa fonction de répartition. La moitié des clients attendent plus de 3 minutes. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Démontre que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geqslant 0$, puis justifie que F est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et tend vers 1 en $+\infty$.

(b) Détermine λ à l'aide de l'information sur la moitié des clients.

(c) Complète le tableau

t	3	6	9
F(t)	…	…	…

avec des valeurs exactes, puis déduis-en $P(3 < X \leqslant 9)$.

(d) Détermine la durée d'attente t_0 dépassée par seulement 10 % des clients.

(e) Ben cherche le plus petit entier n tel que $P(X > n) < 0{,}05$. Complète les lignes 2 et 4, puis donne ce qu'affiche le programme.

```
import math
lam = ......
n = 0
while ............ :
    n = n + 1
print(n)
```

3. *Loi uniforme sur [a ; b]*

À retenir : Si X suit $\mathcal{U}([a\,;b])$: densité $\frac{1}{b-a}$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$ (on coupe ce qui dépasse de $[a\,;b]$), $P(X = c) = 0$. $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Ex. : sur $[2\,;6]$, $E(X) = 4$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : calculs directs avec la loi uniforme** — X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([2\,;12])$. Donne les valeurs exactes.

(a) Donne la densité f de X sur $[2\,;12]$.

(b) Calcule $P(4 \leqslant X \leqslant 9)$.

(c) Calcule $P(8 \leqslant X \leqslant 20)$.

(d) Calcule $P(X > 10{,}5)$.

Ex. 15 **(suite)**

(e) Calcule $E(X)$.

(f) Calcule $V(X)$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur une loi uniforme** — Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([-3\,;5])$ et F est sa fonction de répartition. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) La densité de Y vaut 8 sur $[-3\,;5]$.

(b) $E(Y) = 4$.

(c) $P(Y < 1) = P(Y \leqslant 1)$.

(d) $P(-5 \leqslant Y \leqslant 0) = \frac{5}{8}$.

(e) $F(3) = 0{,}75$.

(f) L'écart type de Y vaut environ 2,31.

Ex. 17 ★★☆ **Arriver à l'heure au lycée** — À Rennes, Malik arrive au lycée à une heure au hasard entre 7 h 40 et 8 h 10. Les cours commencent à 8 h. On note T le temps écoulé depuis 7 h 40, en minutes, à son arrivée : T suit une loi uniforme. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Précise l'intervalle de la loi de T, puis calcule la probabilité que Malik arrive avant 8 h.

(b) Calcule la probabilité que Malik arrive entre 7 h 52 et 8 h 03.

(c) Donne l'heure moyenne d'arrivée de Malik, puis l'écart type de T.

(d) À 7 h 45, Malik n'est pas encore arrivé. Calcule la probabilité qu'il arrive avant 8 h.

Ex. 18 ★★☆ **L'attente du bus à Grenoble** — À Grenoble, un bus passe à un arrêt toutes les 12 minutes, de façon parfaitement régulière. Léna arrive à l'arrêt à un instant pris au hasard. Son temps d'attente W, en minutes, suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0\,;12])$.

(a) Donne la densité de W, puis le temps d'attente moyen de Léna.

(b) Hugo affirme : « $P(W > 5) = \frac{5}{12}$ ». Repère son erreur et corrige-la.

(c) Calcule la probabilité que Léna attende moins de 2 minutes ou plus de 9 minutes.

(d) Détermine la durée m telle que $P(W \leqslant m) = 0{,}9$. Donne-la en minutes et secondes.

Ex. 19 ★★☆ **Lire et corriger une simulation Python** — Chez Ben, Zoé étudie ce programme. On rappelle que `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$.

```
from random import random

def simul(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        x = 4 + 6*random()
        if x > 8.5:
            c = c + 1
    return c/n
```

(a) Quelle loi la variable `x` simule-t-elle ?

(b) Que représente le nombre `c` à la fin de la boucle ? Qu'estime `simul(10000)` ?

(c) Calcule la valeur exacte de la probabilité estimée par `simul(10000)`.

(d) Pour simuler $\mathcal{U}([-2\,;3])$, Zoé écrit `x = 3*random() - 2`. Sur quel intervalle `x` est-il uniforme ? Corrige la ligne.

Ex. 20 ★★★ **Retrouver l'intervalle d'une livraison** — À Lille, la durée X d'une livraison de repas, en minutes, suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a\,;b])$, avec $a < b$. Le restaurant annonce $E(X) = 25$ et $V(X) = 12$. Donne les valeurs exactes, puis un arrondi au millième si besoin.

(a) Détermine a et b. Justifie.

(b) Calcule $P(20 \leqslant X \leqslant 35)$, puis $P(X = 25)$.

(c) Margaux a déjà attendu 23 minutes. Calcule la probabilité que sa livraison dure moins de 28 minutes au total.

(d) Le restaurant offre le repas si la livraison dure plus de d minutes. Détermine d pour que le repas soit offert dans 5 % des livraisons.

Ex. 21 ★★★ **Un jeu à base d'équation du second degré** — À Toulouse, Inès programme un jeu. L'ordinateur tire un réel X selon la loi $\mathcal{U}([-1\,;5])$. Le joueur gagne si l'équation $t^2 - Xt + 1 = 0$, d'inconnue t, a au moins une solution réelle. Donne les valeurs exactes, puis un arrondi au millième.

(a) Détermine les valeurs de X pour lesquelles le joueur gagne, puis calcule la probabilité de gagner.

Ex. 21 (suite)

(b) Inès écrit ce programme, où `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$. Complète les deux lignes en pointillés pour que `x` simule X et que `jeu()` renvoie 1 en cas de victoire. Qu'estime `frequence(10000)` ?

```
from random import random

def jeu():
    x = ........
    if ........:
        return 1
    else:
        return 0

def frequence(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + jeu()
    return s / n
```

(c) Calcule $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$, puis $P\big(E(X) - \sigma(X) \leqslant X \leqslant E(X) + \sigma(X)\big)$.

(d) Sachant que le joueur a gagné, calcule la probabilité que X soit supérieur ou égal à 4.

4. *Loi exponentielle : calculer des probabilités*

À retenir : $P(X > t) = e^{-\lambda t}$ et $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$; $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$. $\lambda = \frac{1}{E(X)}$; si $e^{-\lambda t} = p$, $\lambda = \frac{-\ln p}{t}$. Ex. : $E(X) = 50 \Rightarrow \lambda = 0{,}02$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : probabilités avec la loi exponentielle** — X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(0{,}25)$. Donne la valeur exacte, puis l'arrondi au millième si besoin.

(a) Calcule $P(X \leqslant 4)$.

(b) Calcule $P(X > 8)$.

(c) Calcule $P(2 \leqslant X \leqslant 6)$.

(d) Donne $E(X)$.

(e) Donne $P(X = 3)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : retrouver le paramètre λ** — Dans chaque cas, X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Détermine λ : valeur exacte, puis l'arrondi au millième si besoin.

(a) X est une durée de vie, en heures, de moyenne 2 500 h.

(b) X est une durée, en années, avec $E(X) = 0{,}8$.

(c) $P(X > 5) = 0{,}8$.

(d) $P(X \leqslant 2) = 0{,}3$.

(e) X est le temps d'attente, en minutes, entre deux clients ; il en arrive en moyenne 3 par heure. Donne λ par minute.

Ex. 24 ★★☆ **Trouver l'erreur de Lucas** — X suit la loi $\mathcal{E}(0{,}3)$. Lucas écrit : « une primitive de $0{,}3e^{-0{,}3t}$ est $e^{-0{,}3t}$, donc $P(X \leqslant 5) = \left[e^{-0{,}3t}\right]_0^5 = e^{-1{,}5} - 1$ ».

(a) Calcule une valeur approchée du résultat de Lucas. Pourquoi est-il impossible ?

(b) Donne une primitive correcte de $t \mapsto 0{,}3e^{-0{,}3t}$ et vérifie-la en la dérivant.

(c) Calcule $P(X \leqslant 5)$: valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

(d) Calcule $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ à l'aide d'une intégrale : valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

Ex. 25 ★★☆ **Durée de vie d'une ampoule LED** — La durée de vie X, en heures, d'une ampoule LED suit une loi exponentielle. Sa durée de vie moyenne est de 16 000 h.

(a) Détermine le paramètre λ de cette loi.

(b) Mélissa affirme : « une ampoule sur deux dure plus longtemps que la moyenne ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Calcule la médiane de X, c'est-à-dire la durée m telle que $P(X \leqslant m) = 0{,}5$. Arrondis à l'heure.

(d) L'ampoule reste allumée en continu (1 an = 8 760 h). Calcule la probabilité qu'elle dure plus de 2 ans, arrondie au millième.

Ex. 26 ★★☆ **Désintégration d'un noyau radioactif** — La durée de vie X, en années, d'un noyau radioactif suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Sa demi-vie T vérifie $P(X \leqslant T) = 0{,}5$, et $T = 30$ ans.

(a) Montre que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$, puis donne l'arrondi à 10^{-4}.

(b) Calcule la valeur exacte de $P(X > 60)$.

(c) Détermine le plus petit entier t tel que $P(X \leqslant t) \geqslant 0{,}9$.

(d) Recopie et complète la ligne 4 pour que ce programme affiche l'entier de la question précédente.

```
from math import exp, log
lam = log(2)/30
t = 0
while ...:
    t = t + 1
print(t)
```

Ex. 27 ★★★ **Temps d'attente dans un centre d'appels** — Dans le centre d'appels d'une mutuelle à Rennes, le temps d'attente X, en minutes, avant qu'un conseiller décroche suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On observe que 60 % des appelants attendent plus de 2 minutes. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Détermine le paramètre λ.

(b) Calcule la probabilité qu'un appelant attende entre 1 et 5 minutes.

(c) Calcule l'attente moyenne $E(X)$: valeur exacte, puis l'arrondi à la seconde près.

Ex. 27 (suite)

(d) La mutuelle veut qu'au moins 80 % des appelants attendent au plus 5 min. Si l'attente suit alors $\mathcal{E}(\mu)$, quelle valeur minimale de μ faut-il ? Quelle attente moyenne maximale cela impose-t-il ?

Ex. 28 ★★★ **Garantie d'un capteur de station météo** — Une station météo de Briançon utilise un capteur de vent. Sa durée de vie X, en années, suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Le fabricant annonce un taux de 0,000025 panne par heure, et le capteur fonctionne 8 000 h par an.

(a) À l'aide d'une primitive de f, montre que pour tout $t \geqslant 0$: $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

(b) Exprime λ en pannes par an, puis donne la durée de vie moyenne du capteur.

(c) Calcule la probabilité que le capteur tombe en panne au cours de la troisième année (valeur exacte, puis arrondi au millième).

(d) Le fabricant veut qu'au plus 10 % des capteurs tombent en panne pendant la garantie. Détermine la durée maximale de garantie, en mois entiers.

5. *Espérance et variance*

À retenir : $E(X) = \displaystyle\int_I x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ (multiplie par x !), $V(X) = \displaystyle\int_I x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - E(X)^2$, $\sigma = \sqrt{V(X)}$. $\mathcal{U}([a\,;b])$: $E = \frac{a+b}{2}$, $V = \frac{(b-a)^2}{12}$; $\mathcal{E}(\lambda)$: $E = \frac{1}{\lambda}$. Ex. : $E(3X+2) = 3E(X) + 2$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : espérance par une intégrale** — Dans chaque question, f est une densité de la variable aléatoire X sur l'intervalle indiqué. Donne les valeurs exactes.

(a) $f(x) = 2x$ sur $[0\,;1]$. Calcule $E(X)$.

(b) $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ sur $[0\,;2]$. Lou écrit $E(X) = \displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x$. Corrige son erreur et calcule $E(X)$.

(c) $f(x) = \frac{4-x}{8}$ sur $[0\,;4]$. Calcule $E(X)$ et vérifie que le résultat est dans $[0\,;4]$.

(d) $f(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)$ sur $[0\,;1]$. Un élève trouve $E(X) = 1{,}2$. Explique sans calcul pourquoi c'est impossible, puis calcule $E(X)$.

(e) $f(x) = \frac{1}{5}$ sur $[2\,;7]$: X suit la loi $\mathcal{U}([2\,;7])$. Calcule $E(X)$ par une intégrale, puis compare avec la formule du cours.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : lois uniforme et exponentielle** — Utilise les formules du cours, sans calculer d'intégrale.

(a) X suit la loi $\mathcal{U}([3\,;11])$. Donne $E(X)$ et $V(X)$.

(b) X suit la loi $\mathcal{U}([3\,;11])$. Calcule $\sigma(X)$: valeur exacte, puis arrondi au centième.

Ex. 30 (suite)

(c) X suit la loi $\mathcal{U}([3\,;11])$. Calcule $E(2X+5)$.

(d) Y suit la loi $\mathcal{E}(0{,}4)$. Donne $E(Y)$.

(e) La durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle de moyenne 50 heures. Détermine λ.

(f) Z suit $\mathcal{U}([0\,;6])$ et W suit $\mathcal{U}([2\,;4])$. Vrai ou faux : Z et W ont même espérance et même variance ? Justifie.

Ex. 31 ★★☆ **Les erreurs de Noa** — Le temps d'attente X (en minutes) d'une navette à Annecy suit la loi $\mathcal{U}([1\,;7])$, de densité $f(x)=\frac{1}{6}$ sur $[1\,;7]$.

(a) Noa écrit $E(X)=\displaystyle\int_1^7 x\,\mathrm{d}x$. Calcule cette intégrale, explique pourquoi elle ne peut pas valoir $E(X)$, puis calcule $E(X)$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_1^7 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $V(X)$.

(c) Noa propose $V(X)=\displaystyle\int_1^7 \left(x^2-E(X)^2\right)\mathrm{d}x$. Calcule cette intégrale et explique pourquoi elle est fausse.

(d) Vérifie $E(X)$ et $V(X)$ avec les formules de la loi uniforme, donne $\sigma(X)$ au millième et interprète $E(X)$.

Ex. 32 ★★☆ **Durée des appels : deux centres** — La durée X (en minutes) d'un appel reçu par un centre d'assistance de Lille a pour densité $f(x)=\frac{6-x}{18}$ sur $[0\,;6]$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(b) Calcule $V(X)$, puis $\sigma(X)$.

(c) Détermine la fonction de répartition F sur $[0\,;6]$, puis la médiane m de X. Compare m et $E(X)$.

(d) À Rennes, la durée Y d'un appel suit la loi $\mathcal{U}([0\,;4])$. Compare $E(Y)$ et $V(Y)$ avec ceux de X. Quel centre a les durées les plus régulières ?

Ex. 33 ★★☆ **Batteries de trottinettes** — La durée de vie T (en années) d'une batterie de trottinette fabriquée à Grenoble suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Le fabricant annonce une durée de vie moyenne de 4 ans.

(a) Détermine λ.

(b) Calcule la médiane m de T : valeur exacte, puis arrondi au centième.

(c) Inès affirme : « La moitié des batteries durent plus de 4 ans, puisque c'est la moyenne. » Vrai ou faux ? Justifie par un calcul de probabilité arrondi au millième.

(d) Une batterie coûte 180 €, plus 12 € d'assurance par année de fonctionnement : son coût total est $C=180+12T$. Calcule $E(C)$ et interprète.

Ex. 34 ★★★ **Randonnées guidées à Chamonix** — La durée X (en heures) d'une randonnée guidée au départ de Chamonix est une variable aléatoire de densité $f(x)=kx$ sur $[1\,;3]$, où k est un réel. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Détermine k pour que f soit une densité de probabilité sur $[1\,;3]$.

(b) Détermine la fonction de répartition F sur $[1\,;3]$, puis la médiane m de X.

(c) Calcule $E(X)$. Vérifie que $E(X)$ appartient à $[1\,;3]$, puis compare $E(X)$ et m. Explique pourquoi ils diffèrent.

(d) Calcule $V(X)$, puis l'écart type $\sigma(X)$. Convertis $\sigma(X)$ en minutes.

(e) Le guide facture 30 € par heure, plus un forfait de 20 €. Sans calculer de nouvelle intégrale, détermine le prix moyen d'une randonnée.

Ex. 35 ★★★ **Deux lignes de bus à Nantes** — À Nantes, Lina peut prendre la ligne 1 ou la ligne 2. Son temps d'attente X (en minutes) à la ligne 1 suit la loi $\mathcal{U}([2\,;14])$. Son temps d'attente Y (en minutes) à la ligne 2 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $P(Y>10)=0{,}25$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Donne $E(X)$ et $V(X)$ à l'aide des formules du cours.

(b) Calcule $\sigma(X)$, puis $P\left(E(X)-\sigma(X)\leqslant X\leqslant E(X)+\sigma(X)\right)$.

(c) Détermine λ, puis $E(Y)$. Interprète $E(Y)$.

(d) Détermine la médiane de Y et compare-la à $E(Y)$. Explique pourquoi elles diffèrent, alors que pour X elles sont égales.

(e) Lina dispose de 12 minutes de marge. Compare $P(X>12)$ et $P(Y>12)$. Quelle ligne lui conseilles-tu ? Justifie en tenant aussi compte de $E(X)$ et de $E(Y)$.

6. *Absence de mémoire*

À retenir : Loi $\mathcal{E}(\lambda)$: $P_{X>s}(X>s+t)=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=e^{-\lambda t}$ (quotient, jamais différence), ex. $P_{X>3}(X>5)=e^{-2\lambda}$; durée de vie restante moyenne $\frac{1}{\lambda}$. Faux pour une loi uniforme ou avec usure.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : sachant que l'appareil fonctionne encore** — La durée de vie X, en années, d'un appareil suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(0{,}1)$. Donne la valeur exacte, puis l'arrondi au millième si besoin.

(a) Calcule $P_{X>5}(X>12)$.

(b) Calcule $P_{X>4}(X\leqslant 9)$.

(c) Sans calcul, compare $P_{X>3}(X>11)$ et $P_{X>50}(X>58)$.

(d) Pour $h\geqslant 0$, exprime $P_{X>6}(X>6+h)$ en fonction de h.

(e) L'appareil fonctionne encore au bout de 15 ans. Quelle est sa durée de vie restante moyenne ?

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur un composant électronique** — La durée de vie X, en heures, d'un composant suit la loi $\mathcal{E}(0{,}0008)$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) « $P_{X>1000}(X > 1500) = P(X > 1500)$. »

(b) « Un composant qui fonctionne encore après 1 000 h a une chance sur deux de tomber en panne dans les $\frac{\ln 2}{0{,}0008}$ heures qui suivent. »

(c) « Un composant qui a déjà fonctionné 1 000 h va bientôt tomber en panne : il a plus de risques de lâcher dans les 500 h suivantes qu'un composant neuf. »

(d) « Sachant que le composant fonctionne encore au bout de 2 000 h, sa durée de vie totale moyenne est de 1 250 h. »

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur d'Inès à la boulangerie** — Dans une boulangerie de Rennes, la durée X, en minutes, entre deux arrivées de clients suit la loi $\mathcal{E}(0{,}3)$. Pour calculer $P_{X>2}(X > 5)$, Inès écrit : $P(X > 5) - P(X > 2) = e^{-1{,}5} - e^{-0{,}6}$.

(a) Calcule l'arrondi au millième du résultat d'Inès. Pourquoi ne peut-il pas être une probabilité ?

(b) Justifie que $\{X > 5\} \cap \{X > 2\} = \{X > 5\}$.

(c) Calcule correctement $P_{X>2}(X > 5)$: donne la valeur exacte, puis l'arrondi au millième.

(d) Compare avec $P(X > 3)$. Interprète ce résultat pour la boulangère.

Ex. 39 ★★☆ **Le phosphore 32 au laboratoire de Grenoble** — Dans un laboratoire de Grenoble, la durée de vie X, en jours, d'un noyau de phosphore 32 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On prend 14 jours pour sa demi-vie.

(a) Détermine λ : donne la valeur exacte avec ln, puis l'arrondi à 10^{-4}.

(b) Un noyau n'est pas désintégré au bout de 30 jours. Calcule la probabilité exacte qu'il ne le soit toujours pas au bout de 72 jours.

(c) Ce noyau est intact au bout de 30 jours. Calcule la probabilité qu'il se désintègre dans les 7 jours suivants : valeur exacte, puis arrondi au millième.

(d) Un échantillon contient 64 000 noyaux. Combien en reste-t-il environ au bout de 56 jours ?

Ex. 40 ★★☆ **Le tram de Camille et les voitures de la route** — À Nantes, Camille arrive à l'arrêt au hasard. Son temps d'attente T, en minutes, suit la loi $\mathcal{U}([0\,;12])$. Sur une route de campagne, la durée X, en minutes, entre deux passages de voitures suit la loi $\mathcal{E}(0{,}25)$.

(a) Calcule $P(T > 4)$ et $P_{T>6}(T > 10)$.

(b) Calcule $P(X > 4)$ et $P_{X>6}(X > 10)$: donne les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(c) Laquelle des deux lois est sans mémoire ? Explique ce qui change pour Camille après 6 minutes d'attente.

Ex. 40 (suite)

(d) La loi exponentielle est-elle adaptée à la durée de vie d'un pneu, qui s'use ? Et à la durée avant la désintégration d'un noyau ? Justifie.

Ex. 41 ★★★ **Les serveurs d'un centre de données à Lille** — Dans un centre de données à Lille, la durée X, en heures, de fonctionnement d'un serveur avant une panne accidentelle suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $E(X) = 2\,500$. On rappelle que $P(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geqslant 0$. Donne d'abord les valeurs exactes, puis les arrondis demandés.

(a) Soit $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$. Justifie que l'événement $\{X > s + t\}$ est inclus dans $\{X > s\}$, puis démontre que $P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$.

(b) Détermine la valeur de λ.

(c) Hugo, le technicien, veut remplacer chaque serveur dès 3 000 h, « avant qu'il ne lâche ». Calcule $P_{X>3000}(X \leqslant 3600)$ au millième près. Son idée réduit-elle le risque de panne ? Justifie.

(d) En moyenne, combien d'heures fonctionnera encore un serveur qui a déjà tourné 3 000 h ? Justifie.

(e) Un serveur a déjà tourné 3 000 h. Détermine la durée t, arrondie à l'heure, telle que $P_{X>3000}(X > 3000 + t) = 0{,}9$.

Ex. 42 ★★★ **L'hélice et la carte du drone de Lucie** — À Toulouse, Lucie entretient un drone. La durée de vie Y, en mois, d'une hélice, qui s'use, suit la loi $\mathcal{U}([4\,;20])$. La durée de vie X, en mois, de sa carte électronique, qui ne tombe en panne que par accident, suit la loi $\mathcal{E}(0{,}05)$. Donne d'abord les valeurs exactes, puis les arrondis au millième.

(a) Pour $4 \leqslant s \leqslant 16$, on pose $g(s) = P_{Y>s}(Y > s + 4)$. Montre que $g(s) = \frac{16-s}{20-s}$.

(b) Étudie le sens de variation de g sur $[4\,;16]$. L'hélice a-t-elle la propriété d'absence de mémoire ? Justifie.

(c) Détermine s tel que $g(s) = \frac{1}{2}$, puis interprète ce résultat pour Lucie.

(d) Montre que $P_{X>s}(X > s + 4)$ ne dépend pas de s. Après s mois ($4 \leqslant s \leqslant 16$), qui a le plus de chances de tenir encore 4 mois : l'hélice ou la carte ?