Terminale maths complémentaires / Lois à densité : uniforme et exponentielle — corrigé

benprof
particulier.fr

1. *Densité : une probabilité est une aire*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : est-ce une densité ?**

(a) f_1 est continue (affine) et $0{,}5t \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$. De plus, $\displaystyle\int_0^2 0{,}5t\,\mathrm{d}t = \left[0{,}25t^2\right]_0^2 = 1$. C'est donc une densité.

(b) Non, Léo a tort. f_2 est continue et positive, et l'aire du rectangle vaut $4 \times 0{,}25 = 1$. C'est une densité : $f_2(t)$ est une hauteur, pas une probabilité, et elle peut dépasser 1.

(c) f_3 est continue et positive, mais l'aire vaut $0{,}2 \times 4 = 0{,}8 \neq 1$. Ce n'est pas une densité.

(d) f_4 est continue (polynôme). Sur $[0\,;1]$, on a $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$, donc $f_4 \geqslant 0$. Enfin, $\displaystyle\int_0^1 (6t - 6t^2)\,\mathrm{d}t = \left[3t^2 - 2t^3\right]_0^1 = 1$. C'est une densité.

(e) $\displaystyle\int_0^1 (4t - 1)\,\mathrm{d}t = \left[2t^2 - t\right]_0^1 = 1$. Pourtant $f_5(0) = -1 < 0$: f_5 n'est pas positive sur $[0\,;1]$. Ce n'est donc pas une densité.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : une probabilité est une aire**

(a) $f(2) = 0{,}375 \times 4 = 1{,}5$. Ce n'est pas une probabilité (elle dépasse 1) : c'est la hauteur de la courbe. Seule une aire est une probabilité.

(b) $P(X \leqslant 1) = \left[0{,}125t^3\right]_0^1 = 0{,}125$.

(c) $P(X < 1{,}6) = P(X \leqslant 1{,}6) = 0{,}125 \times 1{,}6^3 = 0{,}512$.

(d) $P(X = 1{,}6) = \displaystyle\int_{1{,}6}^{1{,}6} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(e) $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}6) = G(1{,}6) - G(1) = 0{,}512 - 0{,}125 = 0{,}387$.

(f) $P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

(g) X ne dépasse pas 2, donc on coupe à I : $P(1{,}6 \leqslant X \leqslant 3) = P(1{,}6 \leqslant X \leqslant 2) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

Ex. 3 ★☆☆ **Automatismes : des trapèzes sans intégrale**

(a) $f(0) = 0{,}1$ et $f(5) = 0{,}3$. f est affine et croissante, donc $f(t) \geqslant f(0) = 0{,}1 > 0$ sur $[0\,;5]$.

Ex. 3 (suite)

(b) On a un trapèze de bases 0,1 et 0,3, de hauteur 5 : $\frac{0{,}1+0{,}3}{2} \times 5 = 1$. Comme f est aussi continue et positive, c'est bien une densité.

(c) $f(2) = 0{,}18$, donc $P(X \leqslant 2) = \frac{0{,}1+0{,}18}{2} \times 2 = 0{,}28$.

(d) $f(4) = 0{,}26$, donc $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{0{,}18+0{,}26}{2} \times 2 = 0{,}44$.

(e) $f(3) = 0{,}22$, donc $P(X \leqslant 3) = \frac{0{,}1+0{,}22}{2} \times 3 = 0{,}48$. Ainsi, $P(X > 3) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Ex. 4 ★★☆ **Trouver la constante qui fait une densité**

(a) Pour $0 \leqslant t \leqslant 3$, on a $t^2 \leqslant 9$, donc $9 - t^2 \geqslant 0$. f est donc positive sur $[0\,;3]$ si et seulement si $k \geqslant 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^3 k(9 - t^2)\,\mathrm{d}t = k\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^3 = k(27 - 9) = 18k$. L'équation $18k = 1$ donne $k = \frac{1}{18}$ (qui est bien positif).

(c) $P(X < 1) = \frac{1}{18}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{18} \times \frac{26}{3} = \frac{13}{27} \approx 0{,}481$. Il y a environ 48,1 % de chances qu'Inès trouve en moins d'une minute.

(d) $P(X \leqslant 2) = \frac{1}{18}\left(18 - \frac{8}{3}\right) = \frac{23}{27}$, donc $P(X > 2) = 1 - \frac{23}{27} = \frac{4}{27} \approx 0{,}148$.

(e) Comme $X \geqslant 0$, on coupe à I : $P(-1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = P(0 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = \frac{1}{18}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{1{,}5} = \frac{1}{18}\left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{18} \times \frac{99}{8} = \frac{11}{16} = 0{,}6875 \approx 0{,}688$. Il y a environ 68,8 % de chances qu'Inès passe au plus 1,5 minute sur l'énigme.

Ex. 5 ★★☆ **Corriger les erreurs de calcul**

(a) f est affine, donc continue. De plus, $0{,}5 - 0{,}125t \geqslant 0 \iff t \leqslant 4$, donc $f \geqslant 0$ sur $[0\,;4]$. Une primitive est $G(t) = 0{,}5t - 0{,}0625t^2$, et $G(4) - G(0) = 2 - 1 = 1$. f est donc une densité.

(b) Nathan s'est trompé de primitive : la primitive de $0{,}125t$ est $0{,}0625t^2$, et non $0{,}125t^2$. Correction : $G(2) - G(1) = 0{,}75 - 0{,}4375 = 0{,}3125$. On a donc $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}3125$.

(c) Clara a inversé les bornes : il faut intégrer de 3 à 4. $P(X \geqslant 3) = G(4) - G(3) = 1 - 0{,}9375 = 0{,}0625$. Une probabilité ne peut pas être négative : un tel résultat signale toujours une erreur.

Ex. 6 ★★★ **Une famille de fonctions : lesquelles sont des densités ?**

(a) $\int_0^2 (mt^2+c)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{mt^3}{3}+ct\right]_0^2 = \frac{8m}{3}+2c$. L'équation $\frac{8m}{3}+2c=1$ donne $c=\frac{1}{2}-\frac{4m}{3}$.

(b) Avec $m=-0{,}25$, on trouve $c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, donc $f_m(2)=-0{,}25\times 4+\frac{5}{6}=-\frac{1}{6}<0$. La fonction n'est pas positive sur $[0\,;2]$: ce n'est pas une densité, même si son intégrale vaut 1. Malo a tort.

(c) f_m est continue (c'est un polynôme) et son intégrale vaut 1 grâce au choix de c. Il reste la positivité. Si $m\geqslant 0$, f_m est croissante sur $[0\,;2]$ et son minimum est $f_m(0)=\frac{1}{2}-\frac{4m}{3}$, qui est $\geqslant 0$ si et seulement si $m\leqslant\frac{3}{8}$. Si $m<0$, f_m est décroissante et son minimum est $f_m(2)=4m+\frac{1}{2}-\frac{4m}{3}=\frac{8m}{3}+\frac{1}{2}$, qui est $\geqslant 0$ si et seulement si $m\geqslant -\frac{3}{16}$.
Donc f_m est une densité si et seulement si $m\in\left[-\frac{3}{16}\,;\frac{3}{8}\right]$.

(d) $c=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\times 0{,}3=0{,}1$, donc $f_m(t)=0{,}3t^2+0{,}1$ et $f_m(2)=1{,}3$. Une probabilité ne peut pas dépasser 1 : $f_m(2)$ est une hauteur. En fait $P(X=2)=\int_2^2 f_m(t)\,\mathrm{d}t=0$. Malo a tort.

(e) Une primitive est $F(t)=0{,}1t^3+0{,}1t$. Comme $P(X=1{,}5)=0$, $P(X>1{,}5)=F(2)-F(1{,}5)=1-0{,}4875=0{,}5125$. On a $X\leqslant 2$: on coupe à I, donc $P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(1\leqslant X\leqslant 2)=F(2)-F(1)=1-0{,}2=0{,}8$.

Ex. 7 ★★★ **Attente du bateau : triangle, trapèze et intégrale**

(a) Le domaine sous la courbe est un triangle de base 5 et de hauteur $f(0)$. Son aire vaut 1 : $\frac{5\times f(0)}{2}=1$, donc $f(0)=0{,}4$. Le coefficient directeur vaut $\frac{0-0{,}4}{5-0}=-0{,}08$, donc $f(t)=0{,}4-0{,}08t$. Pour $t\leqslant 5$, $0{,}08t\leqslant 0{,}4$, donc $f(t)\geqslant 0$ sur $[0\,;5]$.

(b) $f(1)=0{,}32$ et $f(3)=0{,}16$. Le trapèze a pour bases 0,32 et 0,16 et pour hauteur 2 : $P(1\leqslant X\leqslant 3)=\frac{0{,}32+0{,}16}{2}\times 2=0{,}48$.

(c) Une primitive de f est $G(t)=0{,}4t-0{,}04t^2$. Comme $P(X=2)=0$, on a $P(X<2)=P(X\leqslant 2)=G(2)-G(0)=0{,}8-0{,}16=0{,}64$.

(d) $P(X\geqslant 2)=1-P(X<2)=1-0{,}64=0{,}36$. Comme $P(X=2)=0$, on a aussi $P(X>2)=P(X\geqslant 2)=0{,}36$.

Ex. 7 (suite)

(e) $P(X>d)$ est l'aire du triangle de base $5-d$ et de hauteur $f(d)=0{,}08(5-d)$. Elle vaut donc $\frac{(5-d)\times 0{,}08(5-d)}{2}=0{,}04(5-d)^2$. L'équation $0{,}04(5-d)^2=0{,}16$ donne $(5-d)^2=4$. Comme $5-d\geqslant 0$, on a $5-d=2$, donc $d=3$ minutes.

2. *Fonction de répartition*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer et utiliser F**

(a) $F(x)=\left[\frac{t^2}{36}\right]_0^x=\frac{x^2}{36}$. Contrôle : $F(0)=0$ et $F(6)=\frac{36}{36}=1$.

(b) Pour $x<0$: $F(x)=0$ (Yanis n'attend jamais un temps négatif). Pour $x>6$: $F(x)=1$
(il attend toujours au plus 6 min).

(c) $P(X\leqslant 3)=F(3)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

(d) $P(2<X\leqslant 4)=F(4)-F(2)=\frac{16}{36}-\frac{4}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

(e) $P(X>5)=1-F(5)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de valeurs de F**

(a) $P(X\leqslant 4)=F(4)=0{,}55$.

(b) $P(X>2)=1-F(2)=1-0{,}3=0{,}7$.

(c) $P(2<X\leqslant 6)=F(6)-F(2)=0{,}8-0{,}3=0{,}5$.

(d) $P(X=6)=0$, donc $P(X<6)=P(X\leqslant 6)=F(6)=0{,}8$.

(e) -1 est avant $[0\,;8]$: $F(-1)=0$. 9 est après : $F(9)=1$.

(f) Non : F est croissante, donc $F(5)\leqslant F(6)=0{,}8<0{,}85$.

Ex. 10 ★☆☆ **Loi exponentielle : F, médiane et quantile**

(a) D'après le cours, pour $t\geqslant 0$: $F(t)=1-e^{-0{,}125t}$.

(b) $P(X\leqslant 4)=1-e^{-0{,}5}\approx 0{,}393$.

(c) $P(X>12)=1-F(12)=e^{-1{,}5}\approx 0{,}223$.

(d) $P(4<X\leqslant 12)=F(12)-F(4)=e^{-0{,}5}-e^{-1{,}5}\approx 0{,}383$
.

(e) $1-e^{-0{,}125m}=0{,}5 \iff e^{-0{,}125m}=0{,}5 \iff -0{,}125m=\ln 0{,}5 \iff m=\frac{\ln 2}{0{,}125}=8\ln 2\approx 5{,}545$ ans.

(f) $e^{-0{,}125t}=0{,}1 \iff -0{,}125t=\ln 0{,}1 \iff t=\frac{\ln 10}{0{,}125}=8\ln 10\approx 18{,}421$ ans.

Ex. 11 ★★☆ **Retrouver la densité à partir de F**

(a) $F(1) = \frac{1-1}{8} = 0$ et $F(3) = \frac{9-1}{8} = 1$. Aucune réparation ne dure moins d'1 h et toutes durent au plus 3 h.

(b) $f = F'$, donc $f(x) = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$. Sur $[1\,;3]$, $x > 0$, donc $f(x) > 0$. La densité est $f(x) = \frac{x}{4}$.

(c) Léa confond f et F : $f(2)$ n'est pas une probabilité. On a $P(X \leqslant 2) = F(2) = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

(d) $P(X > 2{,}5) = 1 - F(2{,}5) = 1 - \frac{6{,}25-1}{8} = 1 - 0{,}65625 = 0{,}34375$. Une réparation sur trois environ dure plus de 2 h 30.

(e) $\frac{m^2-1}{8} = \frac{1}{2} \iff m^2 = 5 \iff m = \sqrt{5}$ (car $m \in [1\,;3]$). Donc $m = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ h : une réparation sur deux dure moins de 2,24 h environ.

Ex. 12 ★★☆ **Constante, F et quantile**

(a) $\int_0^3 kt^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{kt^3}{3}\right]_0^3 = 9k$. Comme cette intégrale vaut 1, on a $k = \frac{1}{9}$.

(b) $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{9}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$. Contrôle : $F(0) = 0$ et $F(3) = 1$.

(c) $F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = \frac{x^3}{27}$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$; $F(x) = 1$ si $x > 3$.

(d) $P(1 < X \leqslant 2) = F(2) - F(1) = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} \approx 0{,}259$.

(e) $P(X > x) = 0{,}1 \iff 1 - \frac{x^3}{27} = 0{,}1 \iff x^3 = 24{,}3 \iff x = \sqrt[3]{24{,}3} \approx 2{,}896$. Chloé met plus de 2,896 min environ dans 10 % des cas.

Ex. 13 ★★★ **Densité affine à reconstituer**

(a) Pour $x \in [0\,;2]$: $F(x) = \int_0^x (at + b)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_0^x = \frac{a}{2}x^2 + bx$. X ne prend que des valeurs de $[0\,;2]$, donc $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(x) = 1$ pour $x > 2$.

(b) $F(2) = 1$ donne $2a + 2b = 1$, soit $a + b = 0{,}5$. $F(1) = 0{,}375$ donne $\frac{a}{2} + b = 0{,}375$. Par soustraction, $\frac{a}{2} = 0{,}125$, donc $a = 0{,}25$ et $b = 0{,}25$. Alors $f(t) = \frac{t+1}{4}$, qui est positive sur $[0\,;2]$ puisque $t + 1 > 0$.
Donc $F(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$ sur $[0\,;2]$.

(c) On résout $F(m) = \frac{1}{2}$: $\frac{m^2}{8} + \frac{m}{4} = \frac{1}{2}$, soit $m^2 + 2m - 4 = 0$. $\Delta = 4 + 16 = 20$, et la seule racine dans $[0\,;2]$ est $m = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}236$. Il y a donc une chance sur deux que la visite de Nora dure moins de 1,236 h
(environ 1 h 14 min).

Ex. 13 (suite)

(d) Non : $f(1{,}6) = \frac{2{,}6}{4} = 0{,}65$ est la valeur de la densité en 1,6, pas une probabilité. Il faut F : $P(X > 1{,}6) = 1 - F(1{,}6) = 1 - \left(\frac{2{,}56}{8} + \frac{1{,}6}{4}\right) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$. Hugo trouverait $1 - 0{,}65 = 0{,}35$: c'est faux.

(e) $E(X) = \int_0^2 t \times \frac{t+1}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{8}\right]_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \approx 1{,}167$. $\int_0^2 t^2 \times \frac{t+1}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{16} + \frac{t^3}{12}\right]_0^2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, donc $V(X) = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$. La durée moyenne vaut environ 1,167 h : elle est légèrement inférieure à la médiane
($\approx 1{,}236$ h).

Ex. 14 ★★★ **Attente au centre d'appels : de F au seuil**

(a) Pour $x \geqslant 0$: $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$. $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} = f(x) > 0$, donc F est croissante. Comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc $F(x) \to 1$.

(b) $P(X > 3) = 1 - F(3) = e^{-3\lambda} = 0{,}5$, donc $-3\lambda = \ln 0{,}5 = -\ln 2$ et $\lambda = \frac{\ln 2}{3} \approx 0{,}231$.

(c) $3\lambda = \ln 2$, donc $e^{-3\lambda} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$, $e^{-6\lambda} = e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}$ et $e^{-9\lambda} = e^{-3\ln 2} = \frac{1}{8}$. D'où $F(3) = \frac{1}{2}$, $F(6) = \frac{3}{4}$, $F(9) = \frac{7}{8}$. Alors $P(3 < X \leqslant 9) = F(9) - F(3) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$: 37,5 % des clients attendent entre 3 et 9 minutes.

(d) On résout $P(X > t_0) = 0{,}1$: $e^{-\lambda t_0} = 0{,}1$, donc $-\lambda t_0 = -\ln 10$ et $t_0 = \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{3\ln 10}{\ln 2} \approx 9{,}966$ min. Seuls 10 % des clients attendent plus d'environ 9 min 58 s.

(e) Ligne 2 : `lam = math.log(2) / 3` (valeur de λ trouvée à l'item 2). Ligne 4 : `while math.exp(-lam * n) >= 0.05 :` (la boucle continue tant que $P(X > n) \geqslant 0{,}05$). Pour $n = 12$: $P(X > 12) = e^{-4\ln 2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \geqslant 0{,}05$; pour $n = 13$: $P(X > 13) = e^{-\frac{13\ln 2}{3}} \approx 0{,}0496 < 0{,}05$. Le programme affiche donc 13.

3. *Loi uniforme sur [a ; b]*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : calculs directs avec la loi uniforme**

(a) $f(x) = \frac{1}{12-2} = \frac{1}{10}$ pour tout x de $[2\,;12]$ (et non 10).

(b) $P(4 \leqslant X \leqslant 9) = \frac{9-4}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

(c) X ne dépasse pas 12 : on coupe. $P(8 \leqslant X \leqslant 20) = P(8 \leqslant X \leqslant 12) = \frac{12-8}{10} = 0{,}4$.

(d) $P(X > 10{,}5) = \frac{12-10{,}5}{10} = \frac{1{,}5}{10} = 0{,}15$.

Ex. 15 (suite)

(e) $E(X) = \frac{2+12}{2} = 7$: c'est le milieu de $[2\,;12]$.

(f) $V(X) = \frac{(12-2)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$.

Ex. 16 ★☆☆ Automatismes : vrai ou faux sur une loi uniforme

(a) Faux : la densité vaut $\frac{1}{5-(-3)} = \frac{1}{8}$, pas 8 (sinon l'aire totale vaudrait 64, pas 1).

(b) Faux : $E(Y) = \frac{-3+5}{2} = 1$. La valeur 4 correspond à $\frac{b-a}{2}$, ce qui est une erreur.

(c) Vrai : $P(Y = 1) = 0$, donc $P(Y < 1) = P(Y \leqslant 1) = \frac{1-(-3)}{8} = 0{,}5$.

(d) Faux : Y ne prend pas de valeur avant -3. On coupe : $P(-3 \leqslant Y \leqslant 0) = \frac{0-(-3)}{8} = \frac{3}{8}$.

(e) Vrai : $F(3) = P(Y \leqslant 3) = \frac{3-(-3)}{8} = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

(f) Vrai : $V(Y) = \frac{8^2}{12} = \frac{16}{3}$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$.

Ex. 17 ★★☆ Arriver à l'heure au lycée

(a) De 7 h 40 à 8 h 10, il y a 30 min : T suit $\mathcal{U}([0\,;30])$. 8 h correspond à $T = 20$, d'où $P(T \leqslant 20) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Malik arrive avant 8 h avec une probabilité d'environ 0,667.

(b) 7 h 52 correspond à $T = 12$ et 8 h 03 à $T = 23$. Donc $P(12 \leqslant T \leqslant 23) = \frac{23-12}{30} = \frac{11}{30} \approx 0{,}367$.

(c) $E(T) = \frac{0+30}{2} = 15$: en moyenne, Malik arrive à 7 h 55. $V(T) = \frac{30^2}{12} = 75$, d'où $\sigma(T) = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}660$ min.

(d) 7 h 45 correspond à $T = 5$. $P_{T>5}(T < 20) = \frac{P(5<T<20)}{P(T>5)} = \frac{15/30}{25/30} = \frac{15}{25} = 0{,}6$. C'est le rapport des longueurs dans l'intervalle qui reste, $[5\,;30]$. La probabilité vaut 0,6.

Ex. 18 ★★☆ L'attente du bus à Grenoble

(a) La densité vaut $\frac{1}{12}$ sur $[0\,;12]$. $E(W) = \frac{0+12}{2} = 6$: Léna attend en moyenne 6 minutes.

(b) Hugo a calculé $P(W \leqslant 5)$. En fait, la longueur favorable est celle de $[5\,;12]$: $P(W > 5) = \frac{12-5}{12} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$.

(c) Les deux événements sont incompatibles : $P(W < 2) + P(W > 9) = \frac{2}{12} + \frac{12-9}{12} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$. La probabilité vaut $\frac{5}{12}$, soit environ 0,417.

(d) $P(W \leqslant m) = \frac{m}{12} = 0{,}9$ donne $m = 10{,}8$ min, soit 10 min 48 s. Dans 90 % des cas, Léna attend au plus 10 min 48 s.

Ex. 19 ★★☆ Lire et corriger une simulation Python

(a) `random()` suit la loi uniforme sur $[0\,;1[$, donc `4 + 6*random()` suit la loi uniforme sur $[4\,;10[$, c'est-à-dire $\mathcal{U}([4\,;10])$ ($a = 4$ et $b - a = 6$).

(b) `c` compte les tirages pour lesquels `x` dépasse 8,5. Donc `simul(10000)` renvoie la fréquence de ces tirages sur 10 000 essais : c'est une estimation de $P(X > 8{,}5)$ avec X qui suit $\mathcal{U}([4\,;10])$.

(c) $P(X > 8{,}5) = \frac{10-8{,}5}{10-4} = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$. La fréquence affichée doit être proche de 0,25.

(d) `3*random() - 2` est uniforme sur $[-2\,;1[$: Zoé a pris 3 au lieu de la longueur $b - a = 3 - (-2) = 5$. Il faut écrire `x = -2 + 5*random()`.

Ex. 20 ★★★ Retrouver l'intervalle d'une livraison

(a) $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 12$ donc $(b-a)^2 = 144$, et comme $b - a > 0$, $b - a = 12$. Puis $E(X) = \frac{a+b}{2} = 25$ donne $a + b = 50$. En additionnant et en soustrayant : $2b = 62$ et $2a = 38$.
Donc $a = 19$ et $b = 31$: X suit la loi $\mathcal{U}([19\,;31])$.

(b) X ne dépasse jamais 31 : on coupe $[20\,;35]$ à $[20\,;31]$. $P(20 \leqslant X \leqslant 35) = \frac{31-20}{12} = \frac{11}{12} \approx 0{,}917$. Pour une loi à densité, la probabilité d'une valeur isolée est nulle : $P(X = 25) = 0$.

(c) On cherche $P_{X>23}(X < 28) = \frac{P(23<X<28)}{P(X>23)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{5}{8} = 0{,}625$. C'est le rapport de longueurs dans l'intervalle restant $[23\,;31]$. La probabilité que la livraison de Margaux dure moins de 28 minutes au total est 0,625.

(d) Avec $19 \leqslant d \leqslant 31$: $P(X > d) = \frac{31-d}{12} = 0{,}05$, donc $31 - d = 0{,}6$ et $d = 30{,}4$. Le repas est offert si la livraison dure plus de 30,4 minutes, soit 30 min 24 s.

Ex. 21 ★★★ Un jeu à base d'équation du second degré

(a) Le discriminant vaut $\Delta = X^2 - 4$. Il y a au moins une solution réelle si $\Delta \geqslant 0$, c'est-à-dire $X^2 \geqslant 4$, soit $X \leqslant -2$ ou $X \geqslant 2$. Or $X \geqslant -1$: le cas $X \leqslant -2$ est impossible (probabilité nulle).
Donc $P(\text{gagner}) = P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{5-2}{5-(-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Le joueur gagne avec la probabilité 0,5.

Ex. 21 (suite)

(b) On complète par `x = -1 + 6*random()` : c'est $a + (b-a)\times$ `random()` avec $a=-1$ et $b-a=6$, donc `x` suit la loi uniforme sur $[-1\,;5[$. D'après la question précédente, on gagne si $\Delta \geqslant 0$: `if x**2 - 4 >= 0:` (ou `if x >= 2:`). `jeu()` renvoie 1 en cas de victoire et 0 sinon, donc `frequence(10000)` renvoie la fréquence des victoires sur 10 000 parties. Elle estime la probabilité de gagner, $\frac{1}{2}$.

(c) $E(X) = \frac{-1+5}{2} = 2$ et $V(X) = \frac{(5-(-1))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$, donc $\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$. L'intervalle $[2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}] \approx [0{,}268\,;3{,}732]$ est inclus dans $[-1\,;5]$, donc la probabilité vaut $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$.

(d) Gagner revient à $X \geqslant 2$.
Donc $P_{X\geqslant 2}(X \geqslant 4) = \frac{P(X\geqslant 4)}{P(X\geqslant 2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$. C'est le rapport de longueurs $\frac{5-4}{5-2}$ dans l'intervalle restant $[2\,;5]$.

4. *Loi exponentielle : calculer des probabilités*

Ex. 22 ★☆☆ Automatismes : probabilités avec la loi exponentielle

(a) $P(X \leqslant 4) = 1 - e^{-0{,}25\times 4} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

(b) $P(X > 8) = e^{-0{,}25\times 8} = e^{-2} \approx 0{,}135$.

(c) $P(2 \leqslant X \leqslant 6) = e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} \approx 0{,}383$.

(d) $E(X) = \frac{1}{0{,}25} = 4$.

(e) $P(X=3) = 0$: pour une loi à densité, la probabilité d'une valeur isolée est nulle.

Ex. 23 ★☆☆ Automatismes : retrouver le paramètre λ

(a) $\lambda = \frac{1}{2\,500} = 0{,}0004$.

(b) $\lambda = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$.

(c) $e^{-5\lambda} = 0{,}8$, donc $-5\lambda = \ln 0{,}8$ et $\lambda = \frac{-\ln 0{,}8}{5} \approx 0{,}045$ (positif, car $\ln 0{,}8 < 0$).

(d) Attention : $1 - e^{-2\lambda} = 0{,}3$, donc $e^{-2\lambda} = 0{,}7$ et $\lambda = \frac{-\ln 0{,}7}{2} \approx 0{,}178$.

(e) En moyenne, il arrive un client toutes les $\frac{60}{3} = 20$ minutes, donc $E(X) = 20$ min et $\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ par minute.

Ex. 24 ★★☆ Trouver l'erreur de Lucas

(a) $e^{-1{,}5} - 1 \approx -0{,}777$. Une probabilité ne peut pas être négative : il y a une erreur de signe.

(b) $G(t) = -e^{-0{,}3t}$ convient, car $G'(t) = -(-0{,}3)e^{-0{,}3t} = 0{,}3e^{-0{,}3t}$. Lucas a oublié le signe $-$.

Ex. 24 (suite)

(c) $P(X \leqslant 5) = \left[-e^{-0{,}3t}\right]_0^5 = -e^{-1{,}5} + 1 = 1 - e^{-1{,}5} \approx 0{,}777$.

(d) $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = \int_3^6 0{,}3e^{-0{,}3t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-0{,}3t}\right]_3^6 = -e^{-1{,}8} + e^{-0{,}9} = e^{-0{,}9} - e^{-1{,}8} \approx 0{,}241$. On retrouve la formule $e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Ex. 25 ★★☆ Durée de vie d'une ampoule LED

(a) $\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{16\,000} = 6{,}25 \times 10^{-5}$ par heure.

(b) $P(X > 16\,000) = e^{-\frac{16\,000}{16\,000}} = e^{-1} \approx 0{,}368$. C'est environ 37 % et non 50 % : Mélissa a tort.

(c) $1 - e^{-\lambda m} = 0{,}5$, donc $e^{-\lambda m} = 0{,}5$ et $m = \frac{\ln 2}{\lambda} = 16\,000 \ln 2 \approx 11\,090$ h. La médiane est d'environ 11 090 h.

(d) 2 ans font 17 520 h (même unité que λ). $P(X > 17\,520) = e^{-\frac{17\,520}{16\,000}} = e^{-1{,}095} \approx 0{,}335$. Environ 33,5 % des ampoules dépassent 2 ans.

Ex. 26 ★★☆ Désintégration d'un noyau radioactif

(a) $1 - e^{-30\lambda} = 0{,}5$, donc $e^{-30\lambda} = 0{,}5$ et $-30\lambda = \ln 0{,}5 = -\ln 2$. Ainsi $\lambda = \frac{\ln 2}{30} \approx 0{,}0231$.

(b) $P(X > 60) = e^{-60\times\frac{\ln 2}{30}} = e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}$. Un noyau sur quatre dure plus de 60 ans.

(c) $1 - e^{-\lambda t} \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow -\lambda t \leqslant \ln 0{,}1 \Leftrightarrow t \geqslant \frac{-\ln 0{,}1}{\lambda} \approx 99{,}66$ (le sens change quand on divise par $-\lambda < 0$). Le plus petit entier est $t = 100$ ans.

(d) Ligne 4 : `while 1 - exp(-lam*t) < 0.9:`. La boucle continue tant que $P(X \leqslant t) < 0{,}9$, et le programme affiche 100.

Ex. 27 ★★★ Temps d'attente dans un centre d'appels

(a) $P(X > 2) = 0{,}6$, donc $e^{-2\lambda} = 0{,}6$, puis $-2\lambda = \ln 0{,}6$ et $\lambda = \frac{-\ln 0{,}6}{2} = \frac{\ln(5/3)}{2}$. Comme $\ln 0{,}6 < 0$, on a bien $\lambda > 0$. Donc $\lambda \approx 0{,}255$.

(b) $P(1 \leqslant X \leqslant 5) = e^{-\lambda} - e^{-5\lambda}$. Or $e^{-\lambda} = e^{\frac{\ln 0{,}6}{2}} = \sqrt{0{,}6}$ et $e^{-5\lambda} = 0{,}6^{2{,}5} = 0{,}36\sqrt{0{,}6}$.
Donc $P(1 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}64\sqrt{0{,}6} \approx 0{,}496$. Environ la moitié des appelants attend entre 1 et 5 minutes.

(c) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\ln(5/3)} \approx 3{,}915$ min. Or $0{,}915 \times 60 \approx 54{,}9$ s. L'attente moyenne est d'environ 3 min 55 s (et non 3 min 92 s).

Ex. 27 (suite)

(d) On veut $1 - e^{-5\mu} \geqslant 0{,}8$, donc $e^{-5\mu} \leqslant 0{,}2$ et $-5\mu \leqslant \ln 0{,}2$. On divise par $-5 < 0$, ce qui change le sens : $\mu \geqslant \frac{-\ln 0{,}2}{5} = \frac{\ln 5}{5} \approx 0{,}322$. L'attente moyenne $\frac{1}{\mu}$ doit être au plus $\frac{5}{\ln 5} \approx 3{,}107$ min, soit environ 3 min 6 s, contre 3 min 55 s aujourd'hui.

Ex. 28 ★★★ Garantie d'un capteur de station météo

(a) La fonction $F(x) = -e^{-\lambda x}$ a pour dérivée $F'(x) = -(-\lambda)e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} = f(x)$.
Donc $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = 1 - e^{-\lambda t}$.

(b) $\lambda = 0{,}000025 \times 8\,000 = 0{,}2$ panne par an : λ et X sont maintenant tous les deux en années. La durée de vie moyenne vaut $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$ ans.

(c) La troisième année correspond à $2 \leqslant X \leqslant 3$.
Donc $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = e^{-0{,}2\times 2} - e^{-0{,}2\times 3} = e^{-0{,}4} - e^{-0{,}6} \approx 0{,}122$. Environ 12,2 % des capteurs tombent en panne pendant la troisième année.

(d) Soit d la durée de garantie en années. On veut $P(X \leqslant d) \leqslant 0{,}1$, donc $1 - e^{-0{,}2d} \leqslant 0{,}1$, puis $e^{-0{,}2d} \geqslant 0{,}9$ et $-0{,}2d \geqslant \ln 0{,}9$.
Donc $d \leqslant -5\ln 0{,}9 \approx 0{,}527$ an, soit environ $0{,}527 \times 12 \approx 6{,}32$ mois. La garantie peut durer au plus 6 mois.

5. *Espérance et variance*

Ex. 29 ★☆☆ Automatismes : espérance par une intégrale

(a) $E(X) = \displaystyle\int_0^1 x \times 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

(b) Lou a intégré f seule, et l'intégrale d'une densité vaut toujours 1. Il faut multiplier par x : $E(X) = \displaystyle\int_0^2 \frac{3}{8}x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$.

(c) $E(X) = \displaystyle\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}\right]_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, qui est bien dans $[0\,;4]$.

(d) X prend ses valeurs dans $[0\,;1]$, donc sa moyenne aussi : 1,2 est impossible. $E(X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{3}{2}(x - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

(e) $E(X) = \displaystyle\int_2^7 \frac{x}{5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{10}\right]_2^7 = \frac{49-4}{10} = 4{,}5$, et $\frac{2+7}{2} = 4{,}5$: on retrouve la formule de la loi uniforme.

Ex. 30 ★★☆ Automatismes : lois uniforme et exponentielle

(a) $E(X) = \frac{3+11}{2} = 7$ et $V(X) = \frac{(11-3)^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$.

(b) $\sigma(X) = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$ (on prend la racine de la variance).

(c) $E(2X + 5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 7 + 5 = 19$.

(d) $E(Y) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

(e) On note T cette durée de vie. $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 50$, donc $\lambda = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

(f) Faux. $E(Z) = E(W) = 3$, mais $V(Z) = \frac{36}{12} = 3$ et $V(W) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$: les variances diffèrent.

Ex. 31 ★★☆ Les erreurs de Noa

(a) $\displaystyle\int_1^7 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^7 = \frac{49-1}{2} = 24$. Or X prend ses valeurs dans $[1\,;7]$: sa moyenne ne peut pas valoir 24.
Noa a oublié la densité : $E(X) = \displaystyle\int_1^7 \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{12}\right]_1^7 = \frac{49-1}{12} = 4$, qui est bien dans $[1\,;7]$.

(b) $\displaystyle\int_1^7 \frac{x^2}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{18}\right]_1^7 = \frac{343-1}{18} = 19$, donc $V(X) = 19 - 4^2 = 3$.

(c) $\displaystyle\int_1^7 (x^2 - 16)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 16x\right]_1^7 = 114 - 96 = 18 \neq 3$.
Noa a oublié la densité f : on intègre $x^2 f(x)$, puis on retire $E(X)^2$ après l'intégrale.

(d) $\frac{1+7}{2} = 4$ et $\frac{(7-1)^2}{12} = 3$: c'est cohérent. $\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ min. Sur un grand nombre de jours, on attend la navette 4 minutes en moyenne.

Ex. 32 ★★☆ Durée des appels : deux centres

(a) $E(X) = \displaystyle\int_0^6 \frac{6x - x^2}{18}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{108-72}{18} = 2$. Sur un grand nombre d'appels, un appel dure en moyenne 2 minutes.

(b) $\displaystyle\int_0^6 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = \frac{432-324}{18} = 6$, donc $V(X) = 6 - 2^2 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ min.

(c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{6-t}{18}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{36}$ (contrôle : $F(0) = 0$, $F(6) = 1$). $F(m) = \frac{1}{2}$ donne $m^2 - 12m + 18 = 0$, d'où $m = 6 \pm 3\sqrt{2}$; dans $[0\,;6]$, $m = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1{,}757$. Ainsi $m < E(X) = 2$: la densité n'est pas symétrique, les appels longs tirent la moyenne vers le haut.

Ex. 32 (suite)

(d) $E(Y) = \frac{0+4}{2} = 2 = E(X)$ et $V(Y) = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333 < 2$. La durée moyenne est la même, mais la variance est plus petite à Rennes : les durées y sont plus régulières.

Ex. 33 ★★☆ Batteries de trottinettes

(a) $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 4$ (résultat admis), donc $\lambda = 0{,}25$.

(b) $P(T > m) = e^{-0{,}25m} = 0{,}5$ donne $-0{,}25m = \ln 0{,}5$, soit $m = \frac{\ln 2}{0{,}25} = 4 \ln 2 \approx 2{,}77$ ans.

(c) $P(T > 4) = e^{-0{,}25 \times 4} = e^{-1} \approx 0{,}368 < 0{,}5$. Inès a tort : seulement 36,8 % environ des batteries dépassent 4 ans ; ici la médiane est inférieure à l'espérance.

(d) Par linéarité, $E(C) = 180 + 12E(T) = 180 + 12 \times 4 = 228$. Sur un grand nombre de batteries, le coût total moyen est de 228 €.

Ex. 34 ★★★ Randonnées guidées à Chamonix

(a) Pour $k > 0$, f est continue et positive sur $[1\,;3]$. On veut $\int_1^3 kx\,\mathrm{d}x = 1$. Or $\int_1^3 kx\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = k\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4k$.
Donc $4k = 1$ et $k = \frac{1}{4}$.

(b) Pour $x \in [1\,;3]$: $F(x) = \int_1^x \frac{t}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{8}\right]_1^x = \frac{x^2-1}{8}$.
Contrôle : $F(1) = 0$ et $F(3) = \frac{8}{8} = 1$. Pour la médiane, on résout $F(m) = 0{,}5$: $m^2 - 1 = 4$, donc $m^2 = 5$ et $m = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ (car $m \in [1\,;3]$). Une randonnée sur deux dure moins de $\sqrt{5}$ h, soit environ 2 h 14 min.

(c) On multiplie par x avant d'intégrer : $E(X) = \int_1^3 x \times \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$. On a bien $1 \leqslant \frac{13}{6} \leqslant 3$. Sur un grand nombre de randonnées, la durée moyenne est de $\frac{13}{6}$ h, soit 2 h 10 min. On a $E(X) \approx 2{,}17 < m \approx 2{,}24$: la densité est croissante, donc non symétrique, et l'espérance n'est pas égale à la médiane.

(d) $\int_1^3 x^2 \times \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81}{16} - \frac{1}{16} = 5$.
Donc $V(X) = 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = 5 - \frac{169}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$. Ensuite $\sigma(X) = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0{,}55$ h. En minutes : $60 \times 0{,}5528 \approx 33$ min.

(e) Le prix est $P = 30X + 20$. Par linéarité, $E(P) = 30E(X) + 20 = 30 \times \frac{13}{6} + 20 = 65 + 20 = 85$. Sur un grand nombre de randonnées, le prix moyen est de 85 €.

Ex. 35 ★★★ Deux lignes de bus à Nantes

(a) $E(X) = \frac{2+14}{2} = 8$ et $V(X) = \frac{(14-2)^2}{12} = \frac{144}{12} = 12$. En moyenne, Lina attend 8 minutes à la ligne 1.

(b) $\sigma(X) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$. L'intervalle $\left[8 - 2\sqrt{3}\,;8 + 2\sqrt{3}\right] \approx [4{,}54\,;11{,}46]$ est inclus dans $[2\,;14]$.
Donc la probabilité vaut $\frac{2 \times 2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$: environ 58 % des attentes s'écartent de la moyenne de moins d'un écart type.

(c) $P(Y > 10) = e^{-10\lambda} = 0{,}25$, donc $-10\lambda = \ln(0{,}25) = -\ln 4$ et $\lambda = \frac{\ln 4}{10} \approx 0{,}14$. Avec le résultat admis du cours, $E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{\ln 4} \approx 7{,}21$. Sur un grand nombre de passages, Lina attend en moyenne environ 7,21 minutes à la ligne 2.

(d) La médiane m vérifie $P(Y \leqslant m) = 1 - e^{-\lambda m} = 0{,}5$, donc $e^{-\lambda m} = 0{,}5$ et $m = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{10 \ln 2}{\ln 4} = \frac{10 \ln 2}{2 \ln 2} = 5$. On a $m = 5 < E(Y) \approx 7{,}21$: la densité exponentielle n'est pas symétrique, et de rares attentes très longues font monter la moyenne. La loi uniforme est symétrique autour de 8, donc pour X la médiane et l'espérance valent toutes les deux 8.

(e) $P(X > 12) = \frac{14-12}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ et $P(Y > 12) = e^{-12\lambda} = e^{-1{,}2 \ln 4} \approx 0{,}19$. En moyenne, la ligne 2 est plus rapide ($7{,}21 < 8$). Pourtant, le risque d'attendre plus de 12 minutes y est plus grand. Pour ne pas dépasser sa marge, Lina a intérêt à prendre la ligne 1.

6. *Absence de mémoire*

Ex. 36 ★☆☆ Automatismes : sachant que l'appareil fonctionne encore

(a) $P_{X>5}(X > 12) = P(X > 7) = e^{-0{,}1 \times 7} = e^{-0{,}7} \approx 0{,}497$.

(b) $P_{X>4}(X \leqslant 9) = 1 - P_{X>4}(X > 9) = 1 - P(X > 5) = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}393$.

(c) Elles sont égales : toutes les deux valent $P(X > 8) = e^{-0{,}8}$. Le résultat ne dépend pas de la durée déjà écoulée.

(d) $P_{X>6}(X > 6 + h) = P(X > h) = e^{-0{,}1h}$.

(e) Sans mémoire, la durée restante suit encore $\mathcal{E}(0{,}1)$: sa moyenne est $\frac{1}{0{,}1} = 10$ ans.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur un composant électronique**

(a) Faux. Par absence de mémoire, $P_{X>1000}(X>1500) = P(X>500) = e^{-0,4} \approx 0,670$, alors que $P(X>1500) = e^{-1,2} \approx 0,301$. Sachant $X>1000$, seules les 500 h restantes comptent.

(b) Vrai. Par absence de mémoire, $P_{X>1000}(X \leqslant 1000+t) = 1-P(X>t) = 1-e^{-0,0008t}$. Avec $t = \frac{\ln 2}{0,0008} \approx 866$ h : $1-e^{-\ln 2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) Faux. $P_{X>1000}(X \leqslant 1500) = 1-e^{-0,0008\times 500} = 1-e^{-0,4} \approx 0,330 = P(X \leqslant 500)$: le risque est le même que pour un composant neuf. Il n'y a pas de vieillissement.

(d) Faux. Sachant $X>2000$, la durée totale dépasse 2 000 h. C'est la durée restante qui suit $\mathcal{E}(0,0008)$, de moyenne $\frac{1}{0,0008} = 1\,250$ h. La durée totale moyenne vaut donc $2\,000+1\,250 = 3\,250$ h.

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur d'Inès à la boulangerie**

(a) $e^{-1,5}-e^{-0,6} \approx -0,326$. Ce nombre est négatif, donc ce n'est pas une probabilité : Inès a fait une différence au lieu d'un quotient.

(b) Si $X>5$, alors $X>2$: l'événement $\{X>5\}$ est inclus dans $\{X>2\}$. Leur intersection est donc $\{X>5\}$.

(c) $P_{X>2}(X>5) = \frac{P(X>5)}{P(X>2)} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-0,6}} = e^{-0,9} \approx 0,407$. La probabilité cherchée est d'environ 0,407.

(d) $P(X>3) = e^{-0,3\times 3} = e^{-0,9}$: c'est la même valeur. Avoir déjà attendu 2 minutes sans client ne change rien. La probabilité d'attendre encore plus de 3 minutes reste la même.

Ex. 39 ★★☆ **Le phosphore 32 au laboratoire de Grenoble**

(a) La demi-vie est $\frac{\ln 2}{\lambda} = 14$, donc $\lambda = \frac{\ln 2}{14} \approx 0,0495$ par jour.

(b) $P_{X>30}(X>72) = P(X>42) = e^{-42\times\frac{\ln 2}{14}} = e^{-3\ln 2} = \frac{1}{8}$. La probabilité vaut 0,125.

(c) $P_{X>30}(X \leqslant 37) = 1-P(X>7) = 1-e^{-\frac{\ln 2}{2}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,293$. La probabilité est d'environ 0,293.

(d) $56 = 4\times 14$: l'échantillon passe par 4 demi-vies. Il reste $64\,000\times e^{-4\ln 2} = \frac{64\,000}{16} = 4\,000$ noyaux environ.

Ex. 40 ★★☆ **Le tram de Camille et les voitures de la route**

(a) $P(T>4) = \frac{12-4}{12} = \frac{2}{3}$. Et $P_{T>6}(T>10) = \frac{P(T>10)}{P(T>6)} = \frac{2/12}{6/12} = \frac{1}{3}$. Les deux probabilités sont différentes.

Ex. 40 (suite)

(b) $P(X>4) = e^{-0,25\times 4} = e^{-1} \approx 0,368$. Et $P_{X>6}(X>10) = \frac{e^{-2,5}}{e^{-1,5}} = e^{-1} \approx 0,368$. Les deux probabilités sont égales.

(c) Seule la loi exponentielle est sans mémoire. Pour Camille, après 6 minutes, la probabilité d'attendre encore plus de 4 minutes passe de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$: le tram devient plus probable à mesure qu'elle attend.

(d) Pour le pneu, non : il s'use, donc un pneu ancien a plus de risques de lâcher qu'un neuf. Pour le noyau, oui : il ne vieillit pas, et la désintégration est le modèle type de la loi exponentielle.

Ex. 41 ★★★ **Les serveurs d'un centre de données à Lille**

(a) Si $X>s+t$, alors $X>s$ puisque $s+t \geqslant s$: $\{X>s+t\} \subset \{X>s\}$, donc $\{X>s+t\} \cap \{X>s\} = \{X>s+t\}$. Comme $P(X>s) = e^{-\lambda s} \neq 0$: $P_{X>s}(X>s+t) = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda s-\lambda t+\lambda s} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$. Le résultat ne dépend pas de s.

(b) Pour une loi exponentielle, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, donc $\frac{1}{\lambda} = 2\,500$ et $\lambda = \frac{1}{2\,500} = 0,0004$.

(c) $P_{X>3000}(X \leqslant 3600) = 1-P_{X>3000}(X>3000+600) = 1-P(X>600) = 1-e^{-0,0004\times 600} = 1-e^{-0,24} \approx 0,213$. C'est exactement $P(X \leqslant 600)$: un serveur neuf a le même risque de tomber en panne pendant ses 600 premières heures. La loi exponentielle ne modélise pas l'usure. Remplacer le serveur ne réduit donc pas le risque : l'idée de Hugo est inutile.

(d) D'après la question 1, sachant $X>3000$, on a $P(X-3000>h) = e^{-0,0004h}$ pour tout $h \geqslant 0$: la durée restante $X-3000$ suit la loi $\mathcal{E}(0,0004)$. Son espérance vaut $\frac{1}{0,0004} = 2\,500$. Le serveur fonctionnera encore 2 500 h en moyenne, comme un serveur neuf.

(e) $P_{X>3000}(X>3000+t) = e^{-0,0004t} = 0,9$, donc $-0,0004t = \ln 0,9$ et $t = -\frac{\ln 0,9}{0,0004} = 2\,500\ln\left(\frac{10}{9}\right) \approx 263$. Avec une probabilité de 0,9, le serveur tiendra encore au moins 263 h environ.

Ex. 42 ★★★ **L'hélice et la carte du drone de Lucie**

(a) Pour $4 \leqslant s \leqslant 16$, on a $s+4 \leqslant 20$, donc $P(Y>s+4) = \frac{20-(s+4)}{20-4} = \frac{16-s}{16}$ et $P(Y>s) = \frac{20-s}{16} \neq 0$. Comme $\{Y>s+4\} \subset \{Y>s\}$: $g(s) = \frac{P(Y>s+4)}{P(Y>s)} = \frac{16-s}{20-s}$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) $g'(s) = \frac{-(20-s)+(16-s)}{(20-s)^2} = \frac{-4}{(20-s)^2} < 0$: g est décroissante sur $[4\,;16]$. Plus l'hélice a servi, moins elle a de chances de tenir encore 4 mois : c'est l'usure. Par exemple, $g(4) = \frac{3}{4}$ mais $g(8) = \frac{2}{3}$. La probabilité dépend de s, donc l'hélice n'a pas la propriété d'absence de mémoire.

(c) $\frac{16-s}{20-s} = \frac{1}{2} \iff 32 - 2s = 20 - s \iff s = 12$, qui est bien dans $[4\,;16]$. Une hélice qui a déjà servi 12 mois n'a plus qu'une chance sur deux de tenir encore 4 mois.

(d) $P_{X>s}(X > s+4) = \frac{e^{-0{,}05(s+4)}}{e^{-0{,}05s}} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$: cette probabilité ne dépend pas de s. Comme g est décroissante, $g(s) \leqslant g(4) = 0{,}75 < 0{,}819$. À tout âge s de $[4\,;16]$, la carte a donc plus de chances que l'hélice de tenir encore 4 mois.