42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Reconnaître une loi géométrique : rang du premier succès*

À retenir : Si l'on répète une épreuve de Bernoulli (succès nommé, de probabilité p) de façon identique et indépendante, alors le rang X du premier succès suit $\mathcal{G}(p)$: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ pour $k \geqslant 1$. Nombre de succès sur n essais fixés : loi binomiale. Nombre d'échecs avant le premier succès : $X-1$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : géométrique, binomiale ou aucune des deux ?** — Pour chaque situation, dis si X suit une loi géométrique, une loi binomiale ou aucune des deux. Justifie ta réponse et donne les paramètres de la loi quand il y en a une.

(a) Kenza lance 12 fois une pièce truquée qui tombe sur pile avec la probabilité 0,45. X est le nombre de piles obtenus.

(b) Kenza lance la même pièce jusqu'à obtenir pile. X est le rang du premier pile.

(c) Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. On tire sans remise jusqu'à obtenir une rouge. X est le rang de ce tirage.

(d) On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à obtenir 5 ou 6. X est le rang de ce lancer.

(e) Un archer tire au plus 5 flèches et s'arrête dès qu'il touche le centre. X est le nombre de flèches tirées.

(f) Malik repasse son permis jusqu'à l'obtenir. Sa probabilité de réussite augmente à chaque passage. X est le rang du passage réussi.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : fléchettes** — Noé lance des fléchettes. Chaque lancer manque la cible avec la probabilité 0,65, indépendamment des autres. Il lance jusqu'à toucher la cible. X est le rang du premier lancer qui touche la cible. Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.

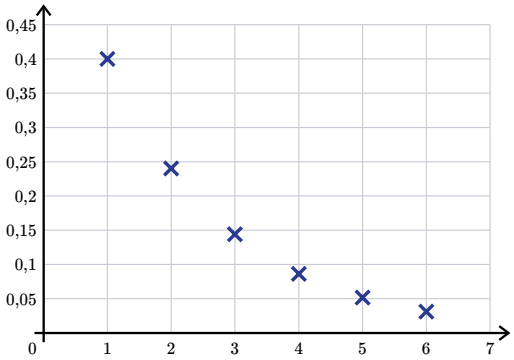
(b) X peut-il prendre la valeur 0 ? Donne l'ensemble des valeurs possibles de X.

(c) Calcule $P(X=1)$.

(d) Calcule $P(X=4)$.

(e) On note Y le nombre de lancers manqués avant le premier lancer qui touche la cible. Exprime Y en fonction de X, puis calcule $P(Y=2)$.

Ex. 3 ★☆☆ **Lire le diagramme d'une loi géométrique** — Dans un jeu vidéo, Hugo ouvre des coffres les uns après les autres. Chaque coffre contient une arme rare avec la même probabilité p, indépendamment des autres. X est le rang du premier coffre qui contient une arme rare. On admet que X suit $\mathcal{G}(p)$. Voici la représentation de la loi de X :



Donne des valeurs exactes.

(a) Lis $P(X=1)$ sur le graphique et déduis-en la valeur de p.

(b) Calcule $P(X=2)$, puis le quotient $\frac{P(X=2)}{P(X=1)}$. Comment passe-t-on d'un point au suivant ?

(c) Complète le tableau :

k	P(X = k)
3	…
4	…
5	…

(d) Quelle est la valeur la plus probable de X ? Justifie sans calcul supplémentaire.

Ex. 4 ★★☆ **Contrôle qualité : corriger la copie de Tom** — Dans une usine, 4 % des pièces produites sont défectueuses. Un contrôleur prélève les pièces une à une, de façon indépendante, jusqu'à trouver une pièce défectueuse. X est le rang de cette pièce. Tom écrit : « Succès : la pièce est conforme, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}96)$ et $P(X=5)=0{,}96^5\times 0{,}04$. » Arrondis au dix-millième.

(a) Repère l'erreur de Tom sur le succès, puis rédige correctement la justification de la loi de X.

(b) Repère l'erreur dans son calcul de $P(X=5)$, puis calcule correctement cette probabilité.

(c) Tom ajoute : « Le nombre Y de pièces conformes contrôlées avant la première défectueuse suit aussi $\mathcal{G}(0{,}04)$. » Calcule $P(Y=0)$ et montre qu'il se trompe.

Ex. 4 **(suite)**

(d) On contrôle maintenant un lot de 50 pièces. Z est le nombre de pièces défectueuses du lot. Quelle loi suit Z ? Explique ce qui la distingue de la loi de X.

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux : la partie de pêche** — Gaspard pêche au bord d'un lac. À chaque lancer de ligne, il attrape un poisson avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres lancers. Il lance jusqu'à attraper un poisson. X est le rang de ce lancer. Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) « X suit la loi géométrique de paramètre 0,85. »

(b) « La probabilité que Gaspard attrape son premier poisson au 6e lancer vaut environ 0,067 (au millième). »

(c) « $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1-0{,}85^3$. »

(d) « Gaspard a raté ses 4 premiers lancers : il a maintenant plus de chances d'attraper un poisson au 5$^{\text{e}}$ lancer. »

(e) « Les prises sont des truites avec la probabilité 0,05, d'autres poissons avec 0,10, et rien sinon. Le rang du premier lancer qui ramène une truite suit $\mathcal{G}(0{,}05)$. »

Ex. 6 ★★★ **La roue de la fête foraine** — À la fête d'Annecy, Lina tourne une roue à 8 secteurs de même taille : 3 rouges, 4 bleus et 1 doré. Les lancers sont indépendants. Elle tourne la roue jusqu'à tomber sur le doré ; X est le rang de ce lancer. Rappel : si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors $E(X)=\frac{1}{p}$. Arrondis les résultats au millième.

(a) Chaque lancer a trois issues possibles. Justifie quand même que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.

(b) Calcule la valeur exacte de $P(X=3)$, puis donne son arrondi.

(c) On note Y le nombre de lancers non dorés avant le premier lancer doré. Exprime Y en fonction de X, donne ses valeurs possibles, puis calcule $P(Y=0)$ et $E(Y)$.

(d) Le lendemain, Lina tourne la roue exactement 10 fois, et Z compte les secteurs dorés obtenus. Quelle loi suit Z ? Justifie, puis explique pourquoi $P(Z=0)=P(X>10)$ et calcule cette probabilité.

(e) Ben propose une autre règle : Lina s'arrête au premier secteur doré, et au plus tard après 5 lancers. T est le nombre de lancers effectués. T suit-elle une loi géométrique ? Justifie, puis calcule $P(T=5)$.

Ex. 7 ★★★ **Le trousseau de clés : avec ou sans remise ?** — À Rennes, Inès doit ouvrir un cadenas avec un trousseau de 6 clés ; une seule convient. Stratégie A : à chaque essai, elle prend une clé au hasard parmi les 6. Stratégie B : elle met de côté chaque clé essayée. X (stratégie A) et Y (stratégie B) sont les rangs de l'essai qui ouvre le cadenas. Rappel : si X suit $\mathcal{G}(p)$, alors $E(X)=\frac{1}{p}$. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre. Sa sœur Romane affirme qu'avec la stratégie A, X ne peut pas dépasser 6. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Calcule $P(X=2)$, puis la probabilité qu'Inès ouvre le cadenas en 3 essais au plus avec la stratégie A.

(c) Avec la stratégie B, calcule $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$ à l'aide de probabilités conditionnelles.

(d) Explique, avec deux arguments, pourquoi Y ne suit pas une loi géométrique.

(e) Calcule $E(X)$, puis $E(Y)$. Quelle stratégie conseilles-tu à Inès ? Justifie.

2. *Calculer $P(X=k)$*

À retenir : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\times p$: $k-1$ échecs puis un succès, donc $P(X=1)=p$. Les $P(X=k)$ décroissent (raison $1-p$). Ex. : $\mathcal{G}(0{,}4)$, $P(X=3)=0{,}6^2\times 0{,}4=0{,}144$. Attention : $P(X=k)\neq P(X\leqslant k)$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer $\mathbf{P(X=k)}$** — Dans chaque cas, X est le rang du premier succès et suit une loi géométrique. Donne la valeur exacte ou l'arrondi au millième.

(a) X suit $\mathcal{G}(0{,}3)$. Donne la probabilité que le premier succès ait lieu dès le premier essai.

(b) X suit $\mathcal{G}(0{,}3)$. Calcule $P(X=4)$.

(c) X suit une loi géométrique et chaque essai échoue avec la probabilité 0,85. Calcule $P(X=3)$.

(d) X suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. Donne $P(X=5)$ sous forme de fraction, puis son arrondi au millième.

(e) X suit $\mathcal{G}(0{,}9)$. Écris $P(X=3)$ comme le produit des probabilités le long du chemin échec, échec, succès, puis calcule-la.

(f) X suit $\mathcal{G}(0{,}05)$. Compare $P(X=1)$ et $P(X=10)$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : retrouver le paramètre p** — Dans chaque cas, X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p inconnu. Arrondis au millième si besoin.

(a) On sait que $P(X=1)=0{,}45$. Donne p.

(b) On sait que $P(X=4)=0{,}0384$ et $P(X=5)=0{,}01536$. Donne p.

(c) Les nombres $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)\ldots$ forment une suite géométrique de raison 0,75. Donne p.

Ex. 9 **(suite)**

(d) On sait que $P(X=2)=0{,}09$ et $P(X=3)=0{,}081$. Donne p, puis calcule $P(X=4)$.

(e) On sait que $P(X=1)=0{,}22$. Calcule $P(X=2)$.

Ex. 10 ★★☆ **Les coffres de Lina** — Dans un jeu vidéo, Lina ouvre des coffres les uns après les autres. Chaque coffre contient un objet rare avec la probabilité 0,08, indépendamment des autres. X est le rang du premier coffre qui contient un objet rare. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique dont tu donneras le paramètre.

(b) Vrai ou faux ? « $P(X=1)=0{,}92$. » Justifie.

(c) Lina écrit : « $P(X=3)=0{,}92^3\times 0{,}08$. » Explique son erreur, puis calcule $P(X=3)$.

(d) Calcule la probabilité que les quatre premiers coffres ne contiennent aucun objet rare et que le cinquième en contienne un.

(e) Vrai ou faux ? « Comme p est petit, la valeur la plus probable de X est un rang élevé. » Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Contrôle qualité d'ampoules** — Dans une usine de Clermont-Ferrand, Malik teste des ampoules une par une. Chaque ampoule est défectueuse avec la probabilité 0,12, indépendamment des autres. X est le rang de la première ampoule défectueuse. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique dont tu donneras le paramètre.

(b) Complète le tableau :

k	P(X = k)
1	…
2	…
3	…
4	…

(c) Calcule la probabilité que la première ampoule défectueuse soit la 2e, la 3e ou la 4e.

(d) Zoé écrit : « $P(X\leqslant 3)=P(X=3)$. » Corrige son erreur et calcule $P(X\leqslant 3)$.

Ex. 12 ★★☆ **Hugo à la pêche** — Au lac d'Annecy, Hugo lance sa ligne plusieurs fois de suite. Chaque lancer reste sans poisson avec la probabilité 0,62, indépendamment des autres. X est le rang du premier lancer où Hugo attrape un poisson. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.

(b) Décris le chemin de l'arbre qui réalise $\{X=4\}$, puis calcule $P(X=4)$.

(c) Représente la loi de X par les points $(k\,;P(X=k))$ pour k allant de 1 à 6.

Ex. 12 **(suite)**

(d) Un autre jour, Hugo fait exactement 12 lancers. Y est le nombre de poissons attrapés. Y suit-elle une loi géométrique ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Le tir à l'arc d'Inès : retrouver p** — À Nantes, Inès tire des flèches une à une jusqu'à toucher le centre de la cible. Les tirs sont indépendants. Chaque tir touche le centre avec la même probabilité p, avec $0<p<1$. X est le rang de la première flèche qui touche le centre. Son entraîneur a obtenu $P(X=2)=0{,}2275$ et $P(X=3)=0{,}147875$. Arrondis au millième si besoin.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique. Exprime $P(X=2)$ et $P(X=3)$ en fonction de p.

(b) Calcule le quotient $\dfrac{P(X=3)}{P(X=2)}$ et déduis-en la valeur de p.

(c) Calcule la probabilité qu'Inès touche le centre pour la première fois à la 5e flèche.

(d) Léo affirme : « Inès rate souvent le centre, donc la valeur la plus probable de X n'est pas 1. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Détermine le plus petit rang k tel que $P(X=k)<0{,}01$.

Ex. 14 ★★★ **Chamboule-tout : chemins, sommes et rangs pairs** — À la fête foraine de Lille, Chloé lance des balles une à une sur une pyramide de boîtes, jusqu'à toutes les faire tomber. Chaque lancer réussit avec la probabilité 0,7, indépendamment des autres. X est le rang du premier lancer réussi. Arrondis au millième si besoin.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique. Décris le chemin de l'arbre qui réalise $\{X=3\}$ et calcule $P(X=3)$.

(b) Bastien écrit : « $P(X=k)=0{,}7^{k-1}\times 0{,}3$, donc $P(X=1)=0{,}3$. » Repère et corrige son erreur.

(c) Calcule la probabilité que le premier lancer réussi ne soit pas le 1er mais arrive au plus tard au 3e.

(d) Montre que, pour tout entier $k\geqslant 1$, $P(X=k+2)=0{,}09\times P(X=k)$.

(e) Chloé n'a droit qu'à 6 lancers. Déduis-en la probabilité que son premier lancer réussi ait un rang pair (2, 4 ou 6).

3. *Calculer $P(X>k)$ et $P(X\leqslant k)$*

À retenir : $P(X>k)=(1-p)^k$: les k premiers essais sont des échecs. On en déduit $P(X\leqslant k)=1-(1-p)^k$ et $P(X\geqslant k)=(1-p)^{k-1}$. On a aussi $P(X<k)=P(X\leqslant k-1)$ et $P(a<X\leqslant b)=(1-p)^a-(1-p)^b$. Exemple avec $\mathcal{G}(0{,}5)$: $P(X\geqslant 3)=0{,}25$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : une loi, six événements** — X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}3)$. Donne les résultats arrondis au millième s'ils ne sont pas exacts.

(a) Calcule $P(X = 4)$.
(b) Calcule $P(X > 4)$.
(c) Calcule $P(X \leqslant 4)$.
(d) Calcule $P(X \geqslant 4)$.
(e) Calcule $P(X < 3)$.
(f) Calcule $P(2 < X \leqslant 5)$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : compléter le tableau** — X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}4)$. Complète le tableau suivant avec des valeurs exactes.

k	$P(X = k)$	$P(X > k)$	$P(X \leqslant k)$
1	0,4	…	…
2	…	…	…
3	…	…	…
4	…	…	…

(a) Calcule $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.
(b) Complète la colonne $P(X > k)$ pour k allant de 1 à 4.
(c) Complète la colonne $P(X \leqslant k)$ pour k allant de 1 à 4.
(d) Vérifie avec le tableau que $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = P(X \leqslant 3)$.
(e) Lis dans le tableau la valeur de $P(X \geqslant 3)$, en justifiant ton choix de case.

Ex. 17 ★★☆ **Attente au téléphone : les erreurs de Malo** — Malo appelle un service client. À chaque appel, la probabilité d'obtenir un conseiller est 0,2, indépendamment des autres appels. X est le rang du premier appel abouti. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.
(b) Malo écrit : « $P(X \geqslant 6) = 0{,}8^6$ ». A-t-il raison ? Justifie et donne la bonne valeur.
(c) Malo écrit : « $P(X < 4) = 1 - 0{,}8^4$ ». A-t-il raison ? Justifie et donne la bonne valeur.
(d) Malo écrit : « $P(1 < X \leqslant 6) = 0{,}8 - 0{,}8^6$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule cette probabilité.

Ex. 18 ★★☆ **Contrôle qualité : la formule par la somme géométrique** — Sur une chaîne, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. On contrôle les pièces une par une. X est le rang de la première pièce défectueuse : X suit $\mathcal{G}(0{,}1)$. n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Écris $P(X \leqslant n)$ comme une somme de n termes de la forme $P(X = k)$, puis exprime chaque terme en fonction de k.
(b) Démontre que $P(X \leqslant n) = 1 - 0{,}9^n$ en utilisant la somme $1 + q + \cdots + q^{n-1}$.
(c) Déduis-en $P(X > n)$. Retrouve ce résultat en décrivant l'événement $\{X > n\}$ par une phrase sur les n premières pièces.

Ex. 18 (suite)

(d) Calcule la probabilité que la première pièce défectueuse arrive strictement après la 10e pièce. Arrondis au millième.

Ex. 19 ★★☆ **Jeu vidéo : les coffres de Nora** — Dans un jeu vidéo, Nora ouvre des coffres un par un. Chaque coffre contient un objet rare avec la probabilité 0,12, indépendamment des autres. X est le rang du premier coffre qui contient un objet rare. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.
(b) Calcule la probabilité que Nora ouvre au plus 5 coffres pour obtenir son premier objet rare.
(c) Calcule la probabilité que Nora doive ouvrir au moins 8 coffres.
(d) Calcule la probabilité que Nora doive ouvrir strictement plus de 10 coffres.
(e) Calcule la probabilité que le premier objet rare soit dans le 4e, le 5e ou le 6e coffre.

Ex. 20 ★★★ **Crue cinquantennale à Saumur** — À Saumur, chaque année, la probabilité que la Loire dépasse la cote d'alerte est 0,02, indépendamment des autres années. On commence l'observation en 2027 (rang 1). X est le rang de la première année de crue. Arrondis les probabilités au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique, puis démontre que pour tout entier naturel k, $P(X > k) = 0{,}98^k$.
(b) Calcule la probabilité que la première crue survienne strictement après l'année 2056.
(c) Calcule la probabilité que la première crue survienne entre 2037 et 2056, ces deux années comprises.
(d) Détermine par le calcul avec ln le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}5$. Interprète-le avec une année.
(e) Un élu affirme : « La crue arrive en moyenne tous les 50 ans, donc on a plus d'une chance sur deux d'attendre au moins 50 ans. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Pannes d'un serveur à Lorient** — Dans une entreprise de Lorient, un serveur informatique tombe en panne un jour donné avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres jours. X est le rang du premier jour de panne. Arrondis les probabilités au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique, puis calcule la probabilité que la première panne ait lieu avant le 10e jour (strictement).
(b) Calcule la probabilité que la première panne ait lieu le 20e jour ou plus tard.

Ex. 21 **(suite)**

(c) Voici un programme Python. Explique ce que représente, dans ce contexte, la valeur affichée.

```
p = 0.04
n = 1
while 1 - (1 - p)**n < 0.75:
    n = n + 1
print(n)
```

(d) Sans utiliser ln, détermine par essais à la calculatrice la valeur affichée par ce programme.

(e) Y est le nombre de pannes sur les 30 premiers jours. Explique pourquoi Y ne suit pas une loi géométrique, puis calcule $P(Y = 0)$ à l'aide de X.

4. *Déterminer un seuil*

À retenir : Seuil : $1-(1-p)^n \geqslant s \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(1-s)}{\ln(1-p)}$, car $\ln(1-p) < 0$: le sens change. On arrondit à l'entier supérieur et on contrôle $n-1$ et n. Exemple : $0{,}9^n \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow n \geqslant 6{,}58$, donc $n = 7$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : résoudre une inéquation avec le logarithme** — Pour chaque inéquation, détermine le plus petit entier naturel n qui convient. Arrondis les quotients de logarithmes au centième et les puissances au millième.

(a) $0{,}7^n \leqslant 0{,}05$

(b) $0{,}95^n < 0{,}2$

(c) $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}99$

(d) $1 - 0{,}82^n > 0{,}6$

(e) Explique pourquoi l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0$ n'a pas de solution et pourquoi on ne peut pas y appliquer ln.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : seuil par essais** — Inès réussit chaque tir à trois points avec la probabilité 0,35, indépendamment des autres tirs. X est le rang de son premier tir réussi, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}35)$. La calculatrice donne les valeurs suivantes (exactes ou arrondies au dix-millième) :

k	P(X ⩽ k)
1	0,35
2	0,5775
3	0,7254
4	0,8215
5	0,8840
6	0,9246
7	0,9510
8	0,9681

(a) Inès veut au moins 80 % de chances de réussir un tir. Combien de tirs doit-elle prévoir au minimum ? Justifie avec le tableau.

Ex. 23 **(suite)**

(b) Écris à l'aide de X l'événement « Inès réussit au moins un de ses 5 premiers tirs », puis donne sa probabilité.

(c) Donne le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}5775$.

(d) Donne le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) > 0{,}5775$.

(e) Inès veut que la probabilité de rater tous ses tirs soit au plus 0,05. Combien de tirs doit-elle prévoir ?

Ex. 24 ★★☆ **Contrôle qualité : corrige l'erreur de Théo** — Dans une usine de Roubaix, chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,12, indépendamment des autres. Un contrôleur examine les pièces une par une. X est le rang de la première pièce défectueuse. Pour trouver le plus petit n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$, Théo écrit : « $0{,}88^n \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow n \leqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}88} \approx 18{,}01$, donc $n = 18$. »

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.

(b) Explique pourquoi $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$ équivaut à $0{,}88^n \leqslant 0{,}1$.

(c) Repère les deux erreurs de Théo, puis rédige la bonne résolution.

(d) Contrôle ta réponse en calculant $0{,}88^{18}$ et $0{,}88^{19}$ au dix-millième, puis interprète-la pour le contrôleur.

Ex. 25 ★★☆ **Jeu vidéo : un seuil en Python** — Dans un jeu vidéo, chaque coffre ouvert par Nora contient une épée rare avec la probabilité 0,08, indépendamment des autres coffres. X est le rang du premier coffre qui contient l'épée, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}08)$. Cette fonction doit renvoyer le plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant s$:

```
def seuil(s):
    k = 1
    while ........ :
        k = k + 1
    return k
```

(a) Complète la condition de la boucle `while` et explique pourquoi c'est la négation de la condition cherchée.

(b) Détermine par le calcul la valeur renvoyée par `seuil(0.75)`. Arrondis les puissances au dix-millième.

(c) Interprète ce résultat pour Nora.

(d) Explique pourquoi, en théorie, l'appel `seuil(1)` ne s'arrêterait jamais, et pourquoi le calcul avec ln échoue aussi pour $s = 1$.

Ex. 26 ★★☆ **Pêche au lac : deux pêcheurs, un même seuil** — Au bord du lac d'Annecy, à chaque lancer, Malo attrape un poisson avec la probabilité 0,1 et Zoé avec la probabilité 0,25. Les lancers sont indépendants. X est le rang du premier lancer avec prise de Malo et Y celui de Zoé, avec Y qui suit $\mathcal{G}(0{,}25)$. Arrondis les quotients de logarithmes au centième, les puissances au dix-millième et les probabilités au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique dont tu préciseras le paramètre.

Ex. 26 **(suite)**

(b) Détermine le plus petit nombre de lancers n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$.

(c) Fais de même pour Y, contrôle avec les deux entiers voisins (puissances au cent-millième), puis compare avec Malo.

(d) Malo dit : « En moyenne, il me faut 10 lancers, donc en 10 lancers je suis presque sûr d'attraper un poisson. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 27 ★★★ **Crue de la Loire : période de retour et seuil** — À Tours, chaque année, la Loire connaît une crue majeure avec la probabilité 0,02, indépendamment des autres années. On compte les années à partir de 2027 et on note X le rang de la première année de crue majeure. Arrondis les probabilités au dix-millième et les quotients de logarithmes au centième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique dont tu préciseras le paramètre. Calcule $E(X)$ et interprète-la comme une période de retour.

(b) Démontre que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(X \leqslant n) = 1 - 0{,}98^n$ en additionnant les $P(X = k)$ pour k allant de 1 à n.

(c) Détermine le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}5$. Contrôle avec $n-1$ et n, puis interprète n dans le contexte.

(d) Amandine affirme : « La période de retour est 50 ans, donc on a une chance sur deux de voir une crue majeure en 25 ans. » A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

(e) Détermine le plus petit nombre d'années n tel que la probabilité de ne connaître aucune crue majeure pendant ces n années soit inférieure à 0,1, puis la dernière année de cette période.

Ex. 28 ★★★ **Standard téléphonique : seuil large, seuil strict et programme** — Yanis appelle le standard de la mairie de Nantes. À chaque appel, il obtient un agent avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres appels. Il rappelle jusqu'à obtenir un agent. X est le rang du premier appel abouti. Arrondis les quotients de logarithmes au centième et les puissances au dix-millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique, puis calcule la valeur exacte de $P(X \leqslant 2)$.

(b) Détermine le plus petit n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}36$, puis le plus petit n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}36$. Explique pourquoi on trouve deux valeurs différentes.

(c) Combien d'appels Yanis doit-il prévoir pour joindre un agent avec une probabilité d'au moins 0,99 ? Justifie avec le logarithme et contrôle ton résultat.

Ex. 28 **(suite)**

(d) Lina a écrit ce programme pour retrouver le résultat précédent. Qu'affiche-t-il ? Explique l'erreur et corrige la ligne du while.

```
n = 1
while 1 - 0.8**n >= 0.99:
    n = n + 1
print(n)
```

(e) La mairie veut que la probabilité de joindre un agent en 10 appels au plus soit au moins 0,99. Quelle probabilité p de succès par appel faut-il au minimum ? Arrondis au centième par excès.

5. *Espérance, temps d'attente moyen et simulation*

À retenir : $E(X) = \frac{1}{p}$: c'est un temps d'attente MOYEN, pas un rang garanti (le rang le plus probable est 1). Nombre moyen d'échecs : $\frac{1}{p} - 1$; $E(aX+b) = \frac{a}{p} + b$. Exemple : $p = 0{,}2$ donne $E(X) = 5$, mais $P(X > 5) = 0{,}8^5 \approx 0{,}33$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : calculer et utiliser une espérance** — Dans chaque question, X suit une loi géométrique. Donne les valeurs exactes.

(a) X suit $\mathcal{G}(0{,}25)$. Calcule $E(X)$.

(b) X suit $\mathcal{G}(0{,}04)$. Calcule $E(X)$.

(c) X est le rang du premier jour où se produit un événement de probabilité quotidienne 0,4, les jours étant indépendants. Calcule $E(X)$ et interprète-la.

(d) X suit $\mathcal{G}(0{,}8)$. Un élève écrit : « $E(X) = \frac{1}{1-0{,}8} = 5$ ». Corrige son erreur.

(e) On sait que $E(X) = 16$. Détermine le paramètre p.

(f) On sait que $E(X) = 12{,}5$. Détermine le paramètre p.

(g) X suit $\mathcal{G}(0{,}3)$ et $Y = X - 1$ est le nombre d'échecs avant le premier succès. Calcule $E(Y)$.

(h) X suit $\mathcal{G}(0{,}5)$. Calcule $E(3X + 2)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur le temps d'attente** — Dans un jeu vidéo, Noé ouvre des coffres les uns après les autres. Chaque coffre contient une épée rare avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. X est le rang du premier coffre qui contient l'épée : X suit $\mathcal{G}(0{,}1)$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie. Arrondis au millième.

(a) « $E(X) = 0{,}1$. »

(b) « Noé obtiendra l'épée exactement au 10e coffre. »

(c) « La valeur de X la plus probable est 10. »

(d) « Comme 10 est la moyenne, $P(X > 10) = \frac{1}{2}$. »

(e) « En moyenne, Noé ouvre 9 coffres sans épée avant d'obtenir la première. »

Ex. 30 **(suite)**

(f) « Sur 10 000 parties simulées, la moyenne des rangs obtenus sera proche de 10. »

Ex. 31 ★★☆ **Le coût moyen d'une attente au téléphone** — Inès appelle un service client saturé et rappelle jusqu'à ce qu'un appel aboutisse. Chaque appel aboutit avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres. Chaque appel coûte 0,40 €, et l'opérateur ajoute 2 € de frais fixes. X est le nombre d'appels passés. Arrondis les probabilités au millième et les montants au centime.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et précise son paramètre.

(b) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(c) Exprime le coût total C en fonction de X, puis calcule $E(C)$.

(d) Inès affirme : « J'ai une chance sur deux de payer plus que $E(C)$. » Calcule $P(C > E(C))$ et conclus.

Ex. 32 ★★☆ **Corriger une simulation en Python** — Hugo lance un dé équilibré à 8 faces jusqu'à obtenir un 8. Il veut simuler le rang X du premier 8 avec le programme suivant :

```
from random import randint

def rang():
    k = 0
    while randint(1, 8) == 8:
        k = k + 1
    return k
```

Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et précise son paramètre.

(b) Repère les deux erreurs du programme d'Hugo, puis écris une version corrigée de `rang()`.

(c) Hugo écrit une fonction `moyenne(N)` qui renvoie la moyenne de N appels à `rang()` corrigée. De quelle valeur le résultat sera-t-il proche pour $N = 100\,000$? Justifie.

(d) Pour $N = 1\,000$, Hugo obtient 7,91 et conclut : « $E(X) = 7{,}91$ ». A-t-il raison ? Justifie.

(e) Sur ses simulations, la fréquence des parties où $X \leqslant 3$ vaut 0,322. Calcule $P(X \leqslant 3)$ et compare.

Ex. 33 ★★☆ **Période de retour d'une avalanche** — Dans une station des Alpes, un couloir connaît chaque hiver une grosse avalanche avec la probabilité 0,02, indépendamment des autres hivers. X est le rang du premier hiver avec une grosse avalanche, l'hiver prochain ayant le rang 1. Arrondis au millième.

(a) Justifie la loi de X, puis donne la période de retour de cette avalanche.

(b) Calcule la probabilité qu'une grosse avalanche se produise au cours des 10 prochains hivers.

Ex. 33 **(suite)**

(c) Un moniteur affirme : « Il y a une chance sur deux d'attendre plus que la période de retour. » Calcule $P(X > 50)$ et conclus.

(d) Une grosse avalanche vient de se produire cet hiver. Un skieur dit : « On est tranquilles pour 50 ans. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Un autre couloir a une période de retour de 80 ans. Détermine sa probabilité annuelle, puis la probabilité d'au moins une grosse avalanche dans ce couloir au cours des 10 prochains hivers.

Ex. 34 ★★★ **Contrôle qualité : du rang moyen au coût moyen** — Dans une usine d'Annecy, Maëlle contrôle une à une les pièces d'une machine jusqu'à la première pièce défectueuse. Chaque pièce est défectueuse avec la même probabilité p, indépendamment des autres. X est le rang de la première pièce défectueuse. Sur un grand nombre de séries de contrôles, il faut en moyenne 40 pièces pour trouver la première défectueuse. Arrondis les probabilités au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique, puis détermine la valeur de p.

(b) Un collègue affirme : « Une fois sur deux, il faut contrôler plus de 40 pièces. » Détermine le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}5$, puis réponds-lui.

(c) Maëlle pense que le rang le plus probable de la première pièce défectueuse est 40. Calcule $P(X = 1)$ et $P(X = 40)$, puis corrige son idée.

(d) Chaque contrôle coûte 1,20 € et la mise en route du contrôle coûte 15 €. Exprime le coût total C en fonction de X, puis calcule $E(C)$.

(e) Avec les mêmes tarifs, une machine plus ancienne donne un coût moyen de 39 €. Détermine la probabilité qu'une de ses pièces soit défectueuse.

Ex. 35 ★★★ **Simuler une partie de pêche** — Au lac de Vassivière, Samir pêche à la mouche. Chaque lancer donne une prise avec la probabilité 0,16, indépendamment des autres lancers. X est le rang du premier lancer avec une prise. Samir écrit le programme suivant :

```
from random import random

def sortie():
    k = 0
    prise = False
    while not prise:
        k = k + 1
        if random() < 0.16:
            prise = True
    return k

def frequence(N):
    c = 0
    for i in range(N):
        if sortie() > 10:
            c = c + 1
    return c / N
```

Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique. Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(b) Explique pourquoi `sortie()` renvoie une réalisation de X, alors que le compteur `k` commence à 0.

(c) Qu'estime l'appel `frequence(10000)` ? Calcule la valeur exacte de cette quantité.

(d) Samir exécute deux fois `frequence(10000)` et obtient 0,1731 puis 0,1768. Il en conclut que son programme est faux. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Ben calcule la moyenne de `sortie() - 1` sur 100 000 sorties. Que représente `sortie() - 1` ? De quelle valeur cette moyenne sera-t-elle proche ?

6. *Absence de mémoire*

À retenir : Si X suit $\mathcal{G}(p)$: $P_{X>m}(X > m+k) = \frac{P(X>m+k)}{P(X>m)} = (1-p)^k = P(X>k)$, car $X > m+k$ est inclus dans $X > m$. Je retire m : $P_{X>5}(X=7) = P(X=2)$. Le succès n'est jamais « dû ».

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : je retire m** — X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}3)$. Calcule chaque probabilité et donne sa valeur décimale exacte.

(a) $P_{X>4}(X>6)$ (b) $P_{X>3}(X=5)$

(c) $P_{X>10}(X>14)$ (d) $P_{X>8}(X\leqslant 9)$

(e) $P_{X>7}(X\geqslant 11)$ (f) $P_{X>6}(X=9)$

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?** — X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}15)$. Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie. Arrondis les valeurs au dix-millième.

(a) « $P_{X>20}(X>25) = P(X>25)$. »

(b) « $P_{X>3}(X>9) = P_{X>10}(X>16)$. »

Ex. 37 (suite)

(c) « $P_{X=5}(X>8) = P(X>3)$. »

(d) « $P(\{X>9\}\cap\{X>12\}) = P(X>9)\times P(X>12)$. »

Ex. 38 ★★☆ **Le 6 est-il « dû » ?** — Inès lance un dé équilibré à six faces jusqu'à obtenir un 6. On note X le rang du premier 6. Après 9 lancers sans 6, Lucas affirme : « Le 6 est dû, il a plus de chances de sortir au prochain lancer. » Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique et donne son paramètre.

(b) Calcule $P_{X>9}(X=10)$. Lucas a-t-il raison ? Justifie.

(c) Sachant que les 9 premiers lancers n'ont pas donné de 6, calcule la probabilité qu'Inès obtienne un 6 au plus tard au 12e lancer.

(d) En moyenne, combien de lancers supplémentaires Inès doit-elle prévoir ? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Appels au standard : l'erreur de Clara** — Chaque appel de Malik au standard de la mairie aboutit avec la probabilité 0,35, indépendamment des autres. X est le rang du premier appel qui aboutit, et on admet que $P(X>k) = 0{,}65^k$. Ses 4 premiers appels ont échoué. Clara écrit : « $P_{X>4}(X>7) = \frac{P(X>4)\times P(X>7)}{P(X>4)} = P(X>7)$ ». Arrondis au millième.

(a) Repère l'erreur de Clara et explique-la.

(b) Corrige son calcul et donne la valeur de $P_{X>4}(X>7)$.

(c) Démontre que, pour tous entiers naturels m et k, $P_{X>m}(X>m+k) = P(X>k)$.

(d) Calcule $P_{X>4}(X=7)$, puis interprète ce résultat dans le contexte.

Ex. 40 ★★☆ **Une loi sans mémoire est géométrique** — Dans un jeu vidéo, X est le rang de la première partie où Yanis gagne un trophée rare. On sait seulement que X prend les valeurs $1, 2, 3\ldots$, que $P(X=1) = 0{,}08$, que $P(X>m) > 0$ et que $P_{X>m}(X>m+1) = P(X>1)$ pour tout entier naturel m. On pose $u_n = P(X>n)$.

(a) Donne u_0 et u_1.

(b) Montre que $u_{m+1} = 0{,}92\,u_m$ pour tout entier naturel m, puis exprime u_n en fonction de n.

(c) Pour $k \geqslant 1$, calcule $P(X=k)$, puis reconnais la loi de X.

(d) Combien de parties Yanis joue-t-il en moyenne pour gagner le trophée ?

(e) Zoé ouvre un à un, dans un ordre au hasard, 8 coffres dont un seul est gagnant. Le rang T du coffre gagnant vérifie $P(T=k) = \frac{1}{8}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 8$. T suit-elle une loi géométrique ? Justifie par un calcul.

Ex. 41 ★★★ **Pêche au lac : l'attente recommence** — Nora pêche au lac d'Annecy. À chaque lancer, elle prend un poisson avec la probabilité 0,12, indépendamment des autres lancers. On note X le rang du premier lancer où elle prend un poisson. Arrondis au dix-millième si besoin.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique. Donne son paramètre et $E(X)$.

(b) Les 8 premiers lancers sont sans prise. Traduis cet événement avec X et explique pourquoi ce n'est pas $X = 8$.

(c) Sachant ces 8 lancers sans prise, calcule la probabilité que la première prise ait lieu au 10e lancer.

(d) Après ces 8 échecs, Nora pense qu'il lui reste en moyenne moins de lancers à faire qu'au départ. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Après ces 8 échecs, trouve le plus petit nombre n de lancers supplémentaires tel que la probabilité de prendre au moins un poisson pendant ces lancers soit supérieure ou égale à 0,9.

Ex. 42 ★★★ **Avec ou sans remise : qui a de la mémoire ?** — Un sac contient 8 jetons, dont 2 rouges. Hugo tire un jeton au hasard, encore et encore, jusqu'à obtenir un rouge. Protocole A : il remet chaque jeton tiré dans le sac, et X est le rang du premier rouge. Protocole B : il ne remet pas les jetons, et Y est le rang du premier rouge. Donne les résultats sous forme exacte.

(a) Justifie que X suit une loi géométrique. Calcule $P(X > 1)$ et $P_{X>3}(X > 4)$ par un quotient, en justifiant l'intersection.

(b) En enchaînant des probabilités conditionnelles, calcule $P(Y > k)$ sous forme de fraction pour $k = 1, 2, 3, 4$.

(c) Calcule $P_{Y>3}(Y > 4)$ et compare avec $P(Y > 1)$. Y peut-elle suivre une loi géométrique ? Justifie.

(d) Après 3 tirages perdants, Hugo affirme : « Quel que soit le protocole, le rouge a maintenant plus de chances de sortir au tirage suivant qu'au premier tirage. » A-t-il raison ? Justifie par le calcul.

(e) Protocole B : après 3 tirages perdants, on note Z le nombre de tirages encore nécessaires, rouge compris. Calcule $E(Z)$ et compare avec le protocole A.