Terminale maths complémentaires / Loi géométrique — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Reconnaître une loi géométrique : rang du premier succès*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : géométrique, binomiale ou aucune des deux ?**

(a) Loi binomiale $\mathcal{B}(12\,;0{,}45)$: le nombre de lancers est fixé à 12 et on compte les succès (succès = pile), qui sont identiques et indépendants. X prend les valeurs 0 à 12.

(b) Loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}45)$: on répète une épreuve de Bernoulli (succès = pile, $p = 0{,}45$) de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès.

(c) Aucune des deux : sans remise, les tirages ne sont pas indépendants et la probabilité de tirer une rouge change d'un tirage à l'autre. De plus, $X \leqslant 8$ forcément.

(d) Loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$: le dé a six issues, mais on les ramène à succès = « obtenir 5 ou 6 », de probabilité $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, et échec. Les lancers sont identiques et indépendants, et X est le rang du premier succès.

(e) Aucune des deux : le nombre d'essais est limité à 5, donc X ne prend que les valeurs 1 à 5, et $X = 5$ regroupe « centre à la 5e flèche » et « jamais le centre ». Ce n'est pas le rang du premier succès dans une répétition sans fin.

(f) Aucune des deux : la probabilité de succès change à chaque passage, donc les épreuves ne sont pas identiques. Ce n'est pas une loi géométrique.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : fléchettes**

(a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli : succès = « toucher la cible », de probabilité $p = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$ (et non 0,65, qui est la probabilité de l'échec). Les lancers sont identiques et indépendants, et X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}35)$.

(b) Non : il y a toujours au moins un lancer, donc $X \geqslant 1$. X prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$, sans limite fixée à l'avance.

(c) $P(X = 1) = p = 0{,}35$: Noé touche la cible dès son premier lancer.

(d) Il faut trois échecs puis un succès : $P(X = 4) = 0{,}65^3 \times 0{,}35 \approx 0{,}096$.

(e) $Y = X - 1$.
Donc $P(Y = 2) = P(X = 3) = 0{,}65^2 \times 0{,}35 \approx 0{,}148$.

Ex. 3 ★★☆ **Lire le diagramme d'une loi géométrique**

(a) On lit $P(X = 1) = 0{,}4$. Comme $P(X = 1) = p$, on a $p = 0{,}4$.

(b) $P(X = 2) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$ et $\frac{0{,}24}{0{,}4} = 0{,}6 = 1 - p$. On passe d'un point au suivant en multipliant par 0,6 : les probabilités forment une suite géométrique de raison 0,6.

(c) $P(X = 3) = 0{,}6^2 \times 0{,}4 = 0{,}144$; $P(X = 4) = 0{,}6^3 \times 0{,}4 = 0{,}0864$; $P(X = 5) = 0{,}6^4 \times 0{,}4 = 0{,}05184$.

k	P(X = k)
3	0,144
4	0,0864
5	0,05184

(d) Chaque probabilité vaut 0,6 fois la précédente, avec $0 < 0{,}6 < 1$, donc la suite est décroissante : la valeur la plus probable est $k = 1$, avec $P(X = 1) = 0{,}4$.

Ex. 4 ★★☆ **Contrôle qualité : corriger la copie de Tom**

(a) X est le rang de la première pièce défectueuse : le succès doit donc être « la pièce est défectueuse », de probabilité $p = 0{,}04$, et non « conforme ». Rédaction : on répète une épreuve de Bernoulli (succès = pièce défectueuse, $p = 0{,}04$) de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}04)$.

(b) Tom a mis l'exposant 5 au lieu de $k - 1 = 4$: avant la 5e pièce, il n'y a que 4 pièces conformes. $P(X = 5) = 0{,}96^4 \times 0{,}04 \approx 0{,}0340$. La probabilité que la première pièce défectueuse soit la 5e vaut environ 0,0340.

(c) Avant la première pièce défectueuse (rang X), il y a $X - 1$ pièces conformes, donc $Y = X - 1$ et $P(Y = 0) = P(X = 1) = 0{,}04$. Or une variable de loi géométrique prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$: elle vaut 0 avec une probabilité nulle. Comme $P(Y = 0) = 0{,}04 \neq 0$, Y ne suit pas $\mathcal{G}(0{,}04)$: Tom se trompe.

Ex. 4 **(suite)**

(d) Le nombre de pièces est fixé ($n = 50$) et on compte les succès, qui sont indépendants et ont la même probabilité : Z suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}04)$ et prend les valeurs 0 à 50. X, lui, est un rang, sans nombre d'essais fixé, et prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux : la partie de pêche**

(a) Faux. Le succès est « attraper un poisson », de probabilité $p = 0{,}15$; 0,85 est la probabilité de l'échec. Les lancers sont identiques et indépendants et X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}15)$.

(b) Vrai. $P(X = 6) = 0{,}85^5 \times 0{,}15 \approx 0{,}067$: cinq échecs, puis un succès.

(c) Vrai. $0{,}15 + 0{,}85 \times 0{,}15 + 0{,}85^2 \times 0{,}15 = 0{,}15 \times \frac{1-0{,}85^3}{1-0{,}85} = 1 - 0{,}85^3$, avec la somme des termes d'une suite géométrique de raison 0,85. On trouve 0,385875 dans les deux cas.

(d) Faux. Les lancers sont indépendants : même après 4 lancers ratés, la probabilité d'attraper un poisson au 5^{e} lancer vaut toujours 0,15. Les échecs passés ne changent pas la probabilité du succès, et c'est pour cela que chaque épreuve est identique.

(e) Vrai. Chaque lancer a trois issues, qu'on ramène à succès = « truite », de probabilité $p = 0{,}05$, et échec = « autre poisson ou rien », de probabilité 0,95. Les lancers sont identiques et indépendants, et on regarde le rang du premier succès : c'est la loi $\mathcal{G}(0{,}05)$.

Ex. 6 ★★★ **La roue de la fête foraine**

(a) On regroupe les issues en deux : succès = « secteur doré », échec = « rouge ou bleu ». Les secteurs ont la même taille, donc $p = \frac{1}{8}$. On répète cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès.
Donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{8}\right)$. Attention : le paramètre est la probabilité du succès, $\frac{1}{8}$, et non celle de l'échec, $\frac{7}{8}$.

(b) $\{X = 3\}$ veut dire : deux échecs, puis un succès.
Donc $P(X = 3) = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{49}{512} \approx 0{,}096$. La probabilité que le premier secteur doré sorte au 3^{e} lancer est d'environ 0,096.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Avant le succès obtenu au rang X, il y a eu $X - 1$ échecs, donc $Y = X - 1$. Comme X prend les valeurs $1, 2, 3 \ldots$, Y prend les valeurs $0, 1, 2 \ldots$ (c'est pour cela que Y n'est pas X). On a $P(Y = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Ensuite, $E(X) = \frac{1}{1/8} = 8$, donc $E(Y) = E(X) - 1 = 7$. En moyenne, Lina obtient 7 lancers non dorés avant le premier lancer doré.

(d) Le nombre de lancers est fixé : $n = 10$. Les lancers sont identiques et indépendants, avec un succès « doré » de probabilité $\frac{1}{8}$. Z compte les succès, donc Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10\,;\frac{1}{8}\right)$. Ce n'est pas une loi géométrique : on ne cherche pas un rang. $\{Z = 0\}$ veut dire « aucun doré sur les 10 premiers lancers ». C'est aussi $\{X > 10\}$, car le premier doré arrive alors après le 10^{e} lancer. On obtient 10 échecs indépendants : $P(Z = 0) = P(X > 10) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} \approx 0{,}263$.

(e) Non : le nombre d'essais est limité, donc T ne prend que les valeurs 1 à 5 et $P(T = 6) = 0$, alors qu'une loi géométrique donne une probabilité non nulle à tout entier $k \geqslant 1$. De plus, $\{T = 5\}$ veut dire « aucun doré sur les 4 premiers lancers » : le 5^{e} lancer est fait de toute façon, qu'il soit doré ou non.
Donc $P(T = 5) = P(X > 4) = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096} \approx 0{,}586$.

Ex. 7 ★★★ **Le trousseau de clés : avec ou sans remise ?**

(a) Chaque essai est une épreuve de Bernoulli : succès = « la clé choisie ouvre le cadenas », de probabilité $p = \frac{1}{6}$, car la clé est prise au hasard parmi les 6. Les essais sont identiques et indépendants, puisque la clé est reprise parmi les 6 à chaque fois. X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. Romane a tort : Inès peut reprendre une mauvaise clé déjà essayée, donc X peut dépasser 6. Par exemple, $P(X = 7) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}056 \neq 0$.

(b) $P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$ (un échec, puis un succès). L'événement contraire de $\{X \leqslant 3\}$ est $\{X > 3\}$: trois échecs indépendants.
Donc $P(X \leqslant 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$.
Avec la stratégie A, Inès ouvre en 3 essais au plus avec une probabilité d'environ 0,421.

(c) On note E_i l'événement « le i-ème essai échoue ».
$P(Y = 1) = \frac{1}{6}$. Après un échec, il reste 5 clés, dont la bonne : $P(Y = 2) = P(E_1) \times P_{E_1}(\overline{E_2}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. De même, $P(Y = 3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Les trois probabilités valent $\frac{1}{6}$.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Premier argument : les essais ne sont ni indépendants ni identiques. La probabilité de succès passe de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{5}$, puis à $\frac{1}{4}$… car les clés ne sont pas remises. Deuxième argument : $Y \leqslant 6$, donc $P(Y = 7) = 0$, alors qu'une loi géométrique donne une probabilité non nulle à tout entier $k \geqslant 1$. On peut aussi le voir par le calcul : si Y suivait $\mathcal{G}(p)$, on aurait $p = P(Y = 1) = \frac{1}{6}$, puis $P(Y = 2) = \frac{5}{36}$. Or $P(Y = 2) = \frac{1}{6}$.
Donc Y ne suit pas une loi géométrique.

(e) X suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$, donc $E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$. Pour Y, le même calcul qu'à la question 3 donne $P(Y = k) = \frac{1}{6}$ pour $k = 1, \ldots, 6$.
Donc $E(Y) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$. Il vaut mieux choisir la stratégie B : il faut en moyenne 3,5 essais au lieu de 6, et Inès est sûre d'ouvrir en 6 essais au plus.
Avec la stratégie A, $P(X > 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335$.

2. *Calculer $P(X = k)$*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : calculer P(X = k)**

(a) $P(X = 1) = p = 0{,}3$: aucun échec avant le succès.

(b) $P(X = 4) = 0{,}7^3 \times 0{,}3 = 0{,}343 \times 0{,}3 = 0{,}1029 \approx 0{,}103$ (exposant $4 - 1 = 3$).

(c) Un succès a la probabilité $p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$. $P(X = 3) = 0{,}85^2 \times 0{,}15 = 0{,}108375 \approx 0{,}108$.

(d) $P(X = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} = \frac{625}{7776} \approx 0{,}080$.

(e) Deux échecs de probabilité 0,1, puis un succès de probabilité 0,9 : $P(X = 3) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}009$.

(f) $P(X = 1) = 0{,}05$ et $P(X = 10) = 0{,}95^9 \times 0{,}05 \approx 0{,}032$. Donc $P(X = 1) > P(X = 10)$: les $P(X = k)$ décroissent, même quand p est petit.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : retrouver le paramètre p**

(a) $P(X = 1) = p$, donc $p = 0{,}45$.

(b) $\frac{P(X=5)}{P(X=4)} = 1 - p$, soit $\frac{0{,}01536}{0{,}0384} = 0{,}4 = 1 - p$, donc $p = 0{,}6$.

(c) La raison vaut $1 - p = 0{,}75$, donc $p = 0{,}25$.

(d) $1 - p = \frac{0{,}081}{0{,}09} = 0{,}9$, donc $p = 0{,}1$. Puis $P(X = 4) = 0{,}9^3 \times 0{,}1 = 0{,}0729$.

(e) $p = 0{,}22$, donc $P(X = 2) = 0{,}78 \times 0{,}22 = 0{,}1716 \approx 0{,}172$.

Ex. 10 ★★☆ **Les coffres de Lina**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « le coffre contient un objet rare », de probabilité $p = 0{,}08$) de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}08)$.

(b) Faux : $P(X = 1) = p = 0{,}08$. La valeur 0,92 est la probabilité d'un échec : p et $1 - p$ ont été inversés.

(c) L'exposant doit être $3 - 1 = 2$: deux échecs, puis un succès. $P(X = 3) = 0{,}92^2 \times 0{,}08 = 0{,}8464 \times 0{,}08 = 0{,}067712 \approx 0{,}068$.

(d) Cet événement est $\{X = 5\}$: quatre échecs, puis un succès. $P(X = 5) = 0{,}92^4 \times 0{,}08 = 0{,}0573114368 \approx 0{,}057$. La probabilité est d'environ 0,057.

(e) Faux : chaque probabilité vaut 0,92 fois la précédente, donc les $P(X = k)$ décroissent. La valeur la plus probable est 1, avec $P(X = 1) = 0{,}08 > P(X = 2) = 0{,}0736$.

Ex. 11 ★★☆ **Contrôle qualité d'ampoules**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « l'ampoule est défectueuse », de probabilité $p = 0{,}12$) de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès : X suit $\mathcal{G}(0{,}12)$.

(b) $P(X = k) = 0{,}88^{k-1} \times 0{,}12$.

k	P(X = k)
1	0,120
2	0,106
3	0,093
4	0,082

Valeurs exactes : 0,12 ; 0,1056 ; 0,092928 ; 0,08177664.

(c) $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}1056 + 0{,}092928 + 0{,}08177664 = 0{,}28030464 \approx 0{,}280$. La probabilité est d'environ 0,280.

(d) $P(X \leqslant 3)$ ne vaut pas $P(X = 3)$: il faut additionner les cas $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. $P(X \leqslant 3) = 0{,}12 + 0{,}1056 + 0{,}092928 = 0{,}318528 \approx 0{,}319$.

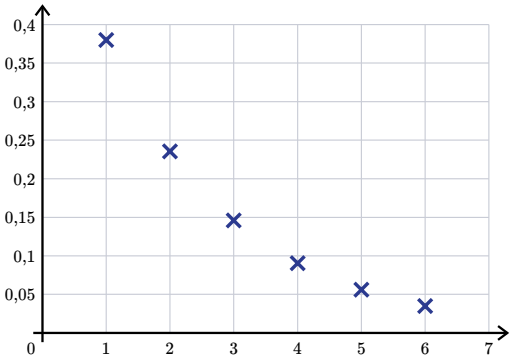
Ex. 12 ★★☆ **Hugo à la pêche**

(a) Le succès est « le lancer ramène un poisson », de probabilité $p = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$ (et non 0,62, qui est la probabilité d'un échec). On répète cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès : X suit $\mathcal{G}(0{,}38)$.

Ex. 12 **(suite)**

(b) Le chemin est : échec, échec, échec, puis succès. On multiplie les probabilités le long du chemin : $P(X = 4) = 0{,}62^3 \times 0{,}38 = 0{,}238328 \times 0{,}38 = 0{,}09056464 \approx 0{,}091$.

(c) $P(X = k) = 0{,}62^{k-1} \times 0{,}38$ donne environ 0,380 ; 0,236 ; 0,146 ; 0,091 ; 0,056 ; 0,035.



Chaque point vaut 0,62 fois le précédent : la représentation décroît.

(d) Non : le nombre de lancers est fixé (12) et on compte les succès. Y prend les valeurs 0 à 12 et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12\,;0{,}38)$. Ce n'est pas le rang d'un premier succès.

Ex. 13 ★★★ **Le tir à l'arc d'Inès : retrouver p**

(a) Chaque tir est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « la flèche touche le centre », de probabilité p. Les tirs sont identiques et indépendants, et X est le rang du premier succès : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On a donc $P(X = 2) = (1 - p) \times p$ (un échec, puis un succès) et $P(X = 3) = (1 - p)^2 \times p$ (deux échecs, puis un succès).

(b) $\frac{P(X=3)}{P(X=2)} = \frac{(1-p)^2 p}{(1-p)p} = 1 - p$. Or $\frac{0{,}147875}{0{,}2275} = 0{,}65$, donc $1 - p = 0{,}65$ et $p = 0{,}35$. Vérification : $0{,}65 \times 0{,}35 = 0{,}2275$. La probabilité de toucher le centre est 0,35.

(c) $P(X = 5) = 0{,}65^4 \times 0{,}35 = 0{,}17850625 \times 0{,}35 \approx 0{,}062$. L'exposant est $4 = 5 - 1$: quatre échecs, puis un succès. La probabilité est d'environ 0,062.

(d) Faux. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $P(X = k + 1) = 0{,}65 \times P(X = k) < P(X = k)$. Les probabilités décroissent donc quand k augmente. La valeur la plus probable est $k = 1$, avec $P(X = 1) = p = 0{,}35$. Elle dépasse par exemple $P(X = 2) = 0{,}2275$ et $P(X = 3) \approx 0{,}148$. Une petite valeur de p ne change rien à cela.

Ex. 13 **(suite)**

(e) $P(X = k) = 0{,}65^{k-1} \times 0{,}35$ décroît quand k augmente. Par essais : $P(X = 9) = 0{,}65^8 \times 0{,}35 \approx 0{,}0112 > 0{,}01$ et $P(X = 10) = 0{,}65^9 \times 0{,}35 \approx 0{,}0072 < 0{,}01$. Comme la suite décroît, le plus petit rang est $k = 10$.

Ex. 14 ★★★ **Chamboule-tout : chemins, sommes et rangs pairs**

(a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « les boîtes tombent », de probabilité $p = 0{,}7$. Les lancers sont identiques et indépendants, et X est le rang du premier succès : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}7)$. L'événement $\{X = 3\}$ correspond au seul chemin échec, échec, succès. On multiplie le long de ce chemin : $P(X = 3) = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}063$.

(b) Bastien a inversé p et $1 - p$. Les $k - 1$ échecs ont chacun la probabilité 0,3, et le succès final a la probabilité 0,7. La bonne formule est donc $P(X = k) = 0{,}3^{k-1} \times 0{,}7$. Ainsi $P(X = 1) = p = 0{,}7$: la probabilité de réussir dès le premier lancer est 0,7.

(c) L'événement est $\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$, réunion de $\{X = 2\}$ et $\{X = 3\}$. $P(X = 2) = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$ et $P(X = 3) = 0{,}063$. On additionne : $0{,}21 + 0{,}063 = 0{,}273$. La probabilité est 0,273.

(d) Pour tout $k \geqslant 1$: $P(X = k + 2) = 0{,}3^{k+1} \times 0{,}7 = 0{,}3^2 \times 0{,}3^{k-1} \times 0{,}7 = 0{,}09 \times P(X = k)$.

(e) La probabilité cherchée est $P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6)$. D'après la question précédente, ces trois termes forment une suite géométrique de premier terme 0,21 et de raison 0,09. La somme vaut $0{,}21 \times (1 + 0{,}09 + 0{,}09^2) = 0{,}21 \times \frac{1-0{,}09^3}{1-0{,}09} = 0{,}230601 \approx 0{,}231$. Vérification directe : $0{,}21 + 0{,}0189 + 0{,}001701 = 0{,}230601$. La probabilité est d'environ 0,231.

3. *Calculer $P(X > k)$ et $P(X \leqslant k)$*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : une loi, six événements**

(a) $P(X = 4) = 0{,}7^3 \times 0{,}3 = 0{,}1029 \approx 0{,}103$.

(b) $P(X > 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401 \approx 0{,}240$: les 4 premiers essais sont des échecs.

(c) $P(X \leqslant 4) = 1 - 0{,}7^4 = 0{,}7599 \approx 0{,}760$.

(d) $P(X \geqslant 4) = P(X > 3) = 0{,}7^3 = 0{,}343$. Ici, ce n'est pas $0{,}7^4$: seuls les 3 premiers essais sont des échecs.

(e) $P(X < 3) = P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}7^2 = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$.

Ex. 15 **(suite)**

(f) $P(2 < X \leqslant 5) = P(X > 2) - P(X > 5) = 0{,}7^2 - 0{,}7^5 = 0{,}49 - 0{,}16807 = 0{,}32193 \approx 0{,}322$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : compléter le tableau**

(a) $P(X = 2) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$; $P(X = 3) = 0{,}6^2 \times 0{,}4 = 0{,}144$; $P(X = 4) = 0{,}6^3 \times 0{,}4 = 0{,}0864$.

(b) $P(X > k) = 0{,}6^k$, donc on trouve : 0,6 ; 0,36 ; 0,216 ; 0,1296.

(c) $P(X \leqslant k) = 1 - 0{,}6^k$, donc on trouve : 0,4 ; 0,64 ; 0,784 ; 0,8704.

(d) $0{,}4 + 0{,}24 + 0{,}144 = 0{,}784$, et c'est bien la valeur de $P(X \leqslant 3)$ dans le tableau.

(e) $P(X \geqslant 3) = P(X > 2) = 0{,}36$: c'est la case de la ligne $k = 2$, colonne $P(X > k)$, et non celle de la ligne $k = 3$.

Ex. 17 ★★☆ **Attente au téléphone : les erreurs de Malo**

(a) On répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli : un appel, dont le succès est « obtenir un conseiller », de probabilité $p = 0{,}2$. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}2)$.

(b) Non. $X \geqslant 6$ signifie que les 5 premiers appels échouent, donc $P(X \geqslant 6) = P(X > 5) = 0{,}8^5 = 0{,}32768 \approx 0{,}328$. La probabilité d'avoir besoin d'au moins 6 appels est d'environ 0,328.

(c) Non. $X < 4$ équivaut à $X \leqslant 3$, donc $P(X < 4) = 1 - 0{,}8^3 = 0{,}488$. La probabilité d'aboutir en moins de 4 appels est 0,488.

(d) Oui : $P(1 < X \leqslant 6) = P(X > 1) - P(X > 6) = 0{,}8 - 0{,}8^6 = 0{,}8 - 0{,}262144 = 0{,}537856 \approx 0{,}538$. La probabilité que le premier succès arrive entre le 2e et le 6e appel est d'environ 0,538.

Ex. 18 ★★☆ **Contrôle qualité : la formule par la somme géométrique**

(a) $P(X \leqslant n) = P(X = 1) + \cdots + P(X = n)$, avec $P(X = k) = 0{,}9^{k-1} \times 0{,}1$. Ce sont les termes d'une suite géométrique de raison 0,9.

(b) $P(X \leqslant n) = 0{,}1 \times (1 + 0{,}9 + \cdots + 0{,}9^{n-1}) = 0{,}1 \times \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} = 0{,}1 \times \frac{1-0{,}9^n}{0{,}1} = 1 - 0{,}9^n$. La somme a bien n termes.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $P(X > n) = 1 - P(X \leqslant n) = 0{,}9^n$. On retrouve ce résultat directement : $X > n$ signifie que les n premières pièces sont conformes, chacune avec la probabilité 0,9. Par indépendance, la probabilité est $0{,}9^n$.

(d) $P(X > 10) = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$. La probabilité que les 10 premières pièces soient toutes conformes est d'environ 0,349.

Ex. 19 ★★☆ **Jeu vidéo : les coffres de Nora**

(a) On répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli : ouvrir un coffre, dont le succès est « objet rare », de probabilité $p = 0{,}12$. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}12)$.

(b) $P(X \leqslant 5) = 1 - 0{,}88^5 \approx 1 - 0{,}5277 \approx 0{,}472$. Nora a environ 47,2 % de chances d'obtenir un objet rare en 5 coffres au plus.

(c) $P(X \geqslant 8) = P(X > 7) = 0{,}88^7 \approx 0{,}409$: les 7 premiers coffres ne contiennent pas d'objet rare. La probabilité est d'environ 0,409.

(d) $P(X > 10) = 0{,}88^{10} \approx 0{,}279$. Nora a environ 27,9 % de risque de devoir ouvrir plus de 10 coffres.

(e) $P(4 \leqslant X \leqslant 6) = P(X > 3) - P(X > 6) = 0{,}88^3 - 0{,}88^6 \approx 0{,}6815 - 0{,}4644 \approx 0{,}217$. La probabilité est d'environ 0,217.

Ex. 20 ★★★ **Crue cinquantennale à Saumur**

(a) Chaque année est une épreuve de Bernoulli (succès = « crue », de probabilité $p = 0{,}02$). Elle se répète de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}02)$. L'événement $\{X > k\}$ signifie que les k premières années sont sans crue. Chacune a la probabilité 0,98 et les années sont indépendantes, donc $P(X > k) = 0{,}98 \times \cdots \times 0{,}98 = 0{,}98^k$ (et pour $k = 0$, $P(X > 0) = 1 = 0{,}98^0$).

(b) 2056 est l'année de rang 30.
Donc $P(X > 30) = 0{,}98^{30} \approx 0{,}545$. Il y a environ 54,5 % de chances qu'il n'y ait aucune crue de 2027 à 2056.

(c) 2037 a le rang 11 et 2056 le rang 30.
Donc $P(11 \leqslant X \leqslant 30) = P(10 < X \leqslant 30) = P(X > 10) - P(X > 30) = 0{,}98^{10} - 0{,}98^{30} \approx 0{,}8171 - 0{,}5455 \approx 0{,}272$. La probabilité vaut environ 0,272.

Ex. 20 **(suite)**

(d) $1-0{,}98^n \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}98^n \leqslant 0{,}5 \iff n\ln 0{,}98 \leqslant \ln 0{,}5 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98} \approx 34{,}31$. On a changé le sens de l'inégalité car $\ln 0{,}98 < 0$. Contrôle : $0{,}98^{34} \approx 0{,}5031$, trop grand, et $0{,}98^{35} \approx 0{,}4931$.
Donc $n = 35$. L'année de rang 35 est $2027 + 34 = 2061$: on a au moins une chance sur deux que la première crue soit arrivée au plus tard en 2061.

(e) Le temps d'attente moyen est bien $E(X) = \frac{1}{0{,}02} = 50$ ans. Mais « au moins 50 ans », c'est $X \geqslant 50$, soit $X > 49$: $P(X \geqslant 50) = 0{,}98^{49} \approx 0{,}372 < 0{,}5$. L'affirmation est donc fausse : une moyenne de 50 ans ne veut pas dire qu'on a une chance sur deux d'attendre au moins 50 ans.

Ex. 21 ★★★ **Pannes d'un serveur à Lorient**

(a) Chaque jour est une épreuve de Bernoulli (succès = « panne », de probabilité $p = 0{,}04$). Elle se répète de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}04)$. « Avant le 10e jour », c'est $X < 10$, soit $X \leqslant 9$: $P(X \leqslant 9) = 1 - 0{,}96^9 \approx 1 - 0{,}6925 \approx 0{,}307$. La probabilité vaut environ 0,307.

(b) « Le 20e jour ou plus tard », c'est $X \geqslant 20$, soit $X > 19$: les 19 premiers jours sont sans panne. $P(X \geqslant 20) = 0{,}96^{19} \approx 0{,}460$. La probabilité vaut environ 0,460.

(c) La boucle augmente n tant que $1 - 0{,}96^n$, c'est-à-dire $P(X \leqslant n)$, est strictement inférieur à 0,75. Le programme affiche donc le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}75$: le nombre de jours au bout duquel la première panne a eu lieu avec une probabilité d'au moins 75 %.

(d) On cherche le plus petit n tel que $1 - 0{,}96^n \geqslant 0{,}75$. Pour $n = 33$: $1 - 0{,}96^{33} \approx 0{,}7400 < 0{,}75$. Pour $n = 34$: $1 - 0{,}96^{34} \approx 0{,}7504 \geqslant 0{,}75$. Comme $P(X \leqslant n)$ augmente avec n, le programme affiche 34.

(e) Y compte le nombre de succès sur un nombre fixé de jours (30), alors qu'une loi géométrique donne le rang du premier succès. Y ne suit donc pas une loi géométrique (c'est une loi binomiale). « Aucune panne sur les 30 premiers jours », c'est $\{X > 30\}$: $P(Y = 0) = P(X > 30) = 0{,}96^{30} \approx 0{,}294$.

4. *Déterminer un seuil*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : résoudre une inéquation avec le logarithme**

(a) $n\ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}05$. Comme $\ln 0{,}7 < 0$, le sens change : $n \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} \approx 8{,}40$. On prend l'entier supérieur : $n = 9$. Contrôle : $0{,}7^8 \approx 0{,}058$ et $0{,}7^9 \approx 0{,}040$.

(b) $n\ln 0{,}95 < \ln 0{,}2$. Comme $\ln 0{,}95 < 0$, on obtient $n > \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}95} \approx 31{,}38$, donc $n = 32$. Contrôle : $0{,}95^{31} \approx 0{,}204$ et $0{,}95^{32} \approx 0{,}194$.

(c) L'inéquation équivaut à $0{,}6^n \leqslant 0{,}01$, puis $n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \approx 9{,}02$, car $\ln 0{,}6 < 0$.
Donc $n = 10$. Contrôle : $0{,}6^9 \approx 0{,}0101 > 0{,}01$. Au millième, on lirait 0,010 : il faut une décimale de plus pour voir que 9 ne convient pas. Et $0{,}6^{10} \approx 0{,}006$.

(d) L'inéquation équivaut à $0{,}82^n < 0{,}4$, puis $n > \frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}82} \approx 4{,}62$, car $\ln 0{,}82 < 0$.
Donc $n = 5$. Contrôle : $0{,}82^4 \approx 0{,}452$ et $0{,}82^5 \approx 0{,}371$.

(e) Pour tout n, on a $0{,}7^n > 0$: l'inéquation n'a donc aucune solution. De plus, $\ln 0$ n'existe pas, donc on ne peut pas passer au logarithme.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : seuil par essais**

(a) On cherche le plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}8$. Or $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}7254 < 0{,}8$ et $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}8215 \geqslant 0{,}8$. Donc $k = 4$: Inès doit prévoir 4 tirs.

(b) C'est l'événement $\{X \leqslant 5\}$, et $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}8840$.

(c) $P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}65^2 = 0{,}5775$ exactement. L'inégalité est large, donc $k = 2$ convient. Comme $P(X \leqslant 1) = 0{,}35$ est trop petit, $k = 2$.

(d) L'inégalité est stricte : $P(X \leqslant 2) = 0{,}5775$ ne convient plus. $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}7254 > 0{,}5775$, donc $k = 3$.

(e) Rater ses k premiers tirs, c'est l'événement $\{X > k\}$. Comme $P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$, $P(X > k) \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$. Or $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}9246$ et $P(X \leqslant 7) \approx 0{,}9510$, donc Inès doit prévoir 7 tirs.

Ex. 24 ★★☆ **Contrôle qualité : corrige l'erreur de Théo**

(a) On répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli : on examine une pièce, avec succès = « la pièce est défectueuse », de probabilité $p = 0{,}12$. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}12)$.

(b) $P(X \leqslant n) = 1 - (1 - 0{,}12)^n = 1 - 0{,}88^n$.
Donc $1 - 0{,}88^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}88^n \geqslant -0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}88^n \leqslant 0{,}1$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Première erreur : $\ln 0{,}88 < 0$, donc diviser par $\ln 0{,}88$ change le sens de l'inégalité. Deuxième erreur : on cherche le plus petit entier, donc on arrondit à l'entier supérieur. Bonne résolution : $n \ln 0{,}88 \leqslant \ln 0{,}1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}88} \approx 18{,}01$, donc $n = 19$.

(d) $0{,}88^{18} \approx 0{,}1002 > 0{,}1$, donc $n = 18$ ne convient pas. $0{,}88^{19} \approx 0{,}0881 \leqslant 0{,}1$, donc $n = 19$ convient. Le contrôleur doit prévoir d'examiner 19 pièces pour avoir au moins 90 % de chances de trouver une pièce défectueuse.

Ex. 25 ★★☆ **Jeu vidéo : un seuil en Python**

(a) La condition est `1 - 0.92**k < s`, car $P(X \leqslant k) = 1 - 0{,}92^k$. La boucle doit continuer tant que la condition cherchée $P(X \leqslant k) \geqslant s$ n'est pas réalisée, c'est-à-dire tant que $P(X \leqslant k) < s$.

(b) $1 - 0{,}92^k \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}92^k \leqslant 0{,}25 \Leftrightarrow k \geqslant \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}92} \approx 16{,}63$, car $\ln 0{,}92 < 0$. Contrôle : $0{,}92^{16} \approx 0{,}2634 > 0{,}25$ et $0{,}92^{17} \approx 0{,}2423 \leqslant 0{,}25$. La fonction renvoie donc 17.

(c) Nora doit prévoir d'ouvrir 17 coffres pour avoir au moins 75 % de chances d'obtenir l'épée rare.

(d) Pour tout k, $0{,}92^k > 0$, donc $1 - 0{,}92^k < 1$: en théorie, la condition de la boucle reste toujours vraie et la boucle ne s'arrête pas. En pratique, l'ordinateur arrondit et finit par calculer $1 - 0{,}92^k = 1$: il renvoie alors un entier qui n'a aucun sens. Avec ln, il faudrait résoudre $0{,}92^k \leqslant 0$, donc calculer $\ln 0$, qui n'existe pas.

Ex. 26 ★★☆ **Pêche au lac : deux pêcheurs, un même seuil**

(a) On répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli : un lancer de Malo, avec succès = « il attrape un poisson », de probabilité $p = 0{,}1$. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}1)$.

(b) $1 - 0{,}9^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx 43{,}71$, car $\ln 0{,}9 < 0$. Contrôle : $0{,}9^{43} \approx 0{,}0108$ et $0{,}9^{44} \approx 0{,}0097$. Malo doit prévoir 44 lancers.

(c) $1 - 0{,}75^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}75^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}75} \approx 16{,}01$. Contrôle : $0{,}75^{16} \approx 0{,}01002 > 0{,}01$, donc 16 ne convient pas, et $0{,}75^{17} \approx 0{,}00752$. Zoé doit prévoir 17 lancers, soit 27 de moins que Malo.

(d) Il se trompe. $E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10$ est un nombre moyen de lancers, mais $P(X \leqslant 10) = 1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}651$. En 10 lancers, Malo n'a qu'environ 65 % de chances d'attraper un poisson : il est loin d'en être presque sûr.

Ex. 27 ★★★ **Crue de la Loire : période de retour et seuil**

(a) On répète chaque année la même épreuve de Bernoulli (succès = « crue majeure », de probabilité $p = 0{,}02$), de façon identique et indépendante. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}02)$. $E(X) = \frac{1}{0{,}02} = 50$: en moyenne, il faut attendre 50 ans avant la première crue majeure. C'est la période de retour de cette crue.

(b) Pour $k \geqslant 1$, $P(X = k) = 0{,}98^{k-1} \times 0{,}02$. Donc $P(X \leqslant n) = 0{,}02 \times (1 + 0{,}98 + \cdots + 0{,}98^{n-1}) = 0{,}02 \times \frac{1-0{,}98^n}{1-0{,}98} = 0{,}02 \times \frac{1-0{,}98^n}{0{,}02} = 1 - 0{,}98^n$.

(c) $1 - 0{,}98^n > 0{,}5 \Longleftrightarrow 0{,}98^n < 0{,}5 \Longleftrightarrow n \ln 0{,}98 < \ln 0{,}5 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98} \approx 34{,}31$. Le sens change parce que $\ln 0{,}98 < 0$. Contrôle : $P(X \leqslant 34) = 1 - 0{,}98^{34} \approx 1 - 0{,}5031 = 0{,}4969$, qui ne convient pas, et $P(X \leqslant 35) = 1 - 0{,}98^{35} \approx 1 - 0{,}4931 = 0{,}5069$, qui convient. Donc $n = 35$: au bout de 35 ans (d'ici fin 2061), il y a plus d'une chance sur deux d'avoir connu au moins une crue majeure.

(d) $P(X \leqslant 25) = 1 - 0{,}98^{25} \approx 1 - 0{,}6035 = 0{,}3965$. Cette probabilité est inférieure à 0,5, donc Amandine a tort. D'après la question précédente, il faut 35 ans, et non 25, pour dépasser une chance sur deux.

(e) « Aucune crue pendant les n premières années », c'est n échecs consécutifs, donc l'événement $\{X > n\}$, de probabilité $0{,}98^n$. $0{,}98^n < 0{,}1 \Longleftrightarrow n \ln 0{,}98 < \ln 0{,}1 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}98} \approx 113{,}97$ (sens changé car $\ln 0{,}98 < 0$). Contrôle : $0{,}98^{113} \approx 0{,}1020 > 0{,}1$ et $0{,}98^{114} \approx 0{,}0999 < 0{,}1$.
Donc $n = 114$: la période va de 2027 à 2140.

Ex. 28 ★★★ **Standard téléphonique : seuil large, seuil strict et programme**

(a) On répète la même épreuve de Bernoulli (succès = « joindre un agent », de probabilité $p = 0{,}2$), de façon identique et indépendante. X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}2)$. $P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

(b) $P(X \leqslant n) = 1 - 0{,}8^n$ augmente avec n. $P(X \leqslant 1) = 0{,}2$ et $P(X \leqslant 2) = 0{,}36$: la condition large $\geqslant 0{,}36$ est vérifiée pour la première fois quand $n = 2$. Mais $0{,}36 > 0{,}36$ est faux. Comme $P(X \leqslant 3) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488 > 0{,}36$, le seuil strict vaut $n = 3$. L'écart vient de l'égalité $P(X \leqslant 2) = 0{,}36$: elle convient pour « $\geqslant$ », pas pour « $>$ ».

Ex. 28 **(suite)**

(c) $1-0{,}8^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$. Le sens change car $\ln 0{,}8 < 0$. Contrôle : $0{,}8^{20} \approx 0{,}0115 > 0{,}01$, donc 20 ne convient pas, et $0{,}8^{21} \approx 0{,}0092 \leqslant 0{,}01$, donc 21 convient. Yanis doit prévoir 21 appels.

(d) Pour $n=1$, $1-0{,}8 = 0{,}2 \geqslant 0{,}99$ est faux. La boucle ne s'exécute donc jamais et le programme affiche 1. L'erreur : la boucle doit continuer tant que la condition cherchée n'est pas atteinte, donc sa condition doit être la négation de $1-0{,}8^n \geqslant 0{,}99$. On corrige en `while 1 - 0.8**n < 0.99:`, et le programme affiche alors 21.

(e) Avec X de loi $\mathcal{G}(p)$: $1-(1-p)^{10} \geqslant 0{,}99 \iff (1-p)^{10} \leqslant 0{,}01 \iff 10\ln(1-p) \leqslant \ln 0{,}01 \iff \ln(1-p) \leqslant \frac{\ln 0{,}01}{10}$. Ici, on divise par $10>0$: le sens ne change pas. Comme exp est croissante, $1-p \leqslant e^{\frac{\ln 0{,}01}{10}} \approx 0{,}6310$, donc $p \geqslant 0{,}3690$ environ. Au centième par excès, $p = 0{,}37$. Contrôle : $1-0{,}63^{10} \approx 0{,}9902 \geqslant 0{,}99$, mais $1-0{,}64^{10} \approx 0{,}9885 < 0{,}99$. Avec $p=0{,}2$, le standard de Yanis est loin du compte.

5. *Espérance, temps d'attente moyen et simulation*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : calculer et utiliser une espérance**

(a) $E(X) = \frac{1}{0{,}25} = 4$.

(b) $E(X) = \frac{1}{0{,}04} = 25$.

(c) $E(X) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$: sur un grand nombre de répétitions, l'événement se produit pour la première fois au bout de 2,5 jours en moyenne.

(d) L'espérance vaut $\frac{1}{p}$, et non $\frac{1}{1-p}$: $E(X) = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$. C'est cohérent : avec $p=0{,}8$, le succès arrive très souvent dès le premier essai.

(e) $\frac{1}{p} = 16$, donc $p = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

(f) $\frac{1}{p} = 12{,}5$, donc $p = \frac{1}{12{,}5} = 0{,}08$.

(g) $E(Y) = E(X) - 1 = \frac{1}{0{,}3} - 1 = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$.

(h) $E(X) = \frac{1}{0{,}5} = 2$, donc par linéarité $E(3X+2) = 3 \times 2 + 2 = 8$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur le temps d'attente**

(a) Faux : $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}1} = 10$.

(b) Faux : 10 est une moyenne, pas un rang certain. D'ailleurs $P(X=10) = 0{,}9^9 \times 0{,}1 \approx 0{,}039$.

Ex. 30 **(suite)**

(c) Faux : $P(X=k) = 0{,}9^{k-1} \times 0{,}1$ diminue quand k augmente. La plus grande valeur est donc $P(X=1) = 0{,}1$, et la valeur la plus probable est 1.

(d) Faux : $P(X>10) = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$, ce qui est différent de 0,5.

(e) Vrai : le nombre d'échecs est $Y = X - 1$, donc $E(Y) = 10 - 1 = 9$.

(f) Vrai : sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des rangs est proche de $E(X) = 10$, sans lui être forcément égale.

Ex. 31 ★★☆ **Le coût moyen d'une attente au téléphone**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « l'appel aboutit », de probabilité 0,15) de façon identique et indépendante. X est le RANG du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}15)$.

(b) $E(X) = \frac{1}{0{,}15} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$. En moyenne, l'appel d'Inès aboutit au bout d'environ 6,67 appels. C'est une moyenne sur un grand nombre de répétitions, pas un nombre garanti.

(c) $C = 0{,}4X + 2$. Par linéarité, $E(C) = 0{,}4 \times \frac{20}{3} + 2 = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$ €. En moyenne, Inès dépense environ 4,67 €.

(d) $C > \frac{14}{3} \iff 0{,}4X > \frac{8}{3} \iff X > \frac{20}{3}$. Comme X est un entier, cela revient à $X \geqslant 7$, c'est-à-dire $X > 6$. Donc $P(C > E(C)) = P(X>6) = 0{,}85^6 \approx 0{,}377$. Inès a tort : elle a environ 38 % de risque, et non 50 %.

Ex. 32 ★★☆ **Corriger une simulation en Python**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « obtenir 8 », de probabilité $\frac{1}{8}$) de façon identique et indépendante. X est le RANG du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{8}\right)$.

(b) Première erreur : la boucle doit tourner TANT QUE le lancer est un échec, donc le test doit être `randint(1, 8) != 8`. Deuxième erreur : le compteur doit partir de 1, car le lancer gagnant compte aussi. Version corrigée :

```
from random import randint

def rang():
    k = 1
    while randint(1, 8) != 8:
        k = k + 1
    return k
```

(c) Sur un grand nombre de simulations, la moyenne des rangs est proche de $E(X) = \frac{1}{1/8} = 8$.

Ex. 32 **(suite)**

(d) Non. 7,91 est une moyenne simulée, qui varie d'une série de simulations à l'autre. La valeur exacte est $E(X) = 8$, et 7,91 en est seulement une estimation.

(e) $P(X \leqslant 3) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{169}{512} \approx 0{,}330$. La fréquence 0,322 est proche de cette valeur, sans lui être égale : une fréquence simulée n'est pas une probabilité exacte.

Ex. 33 ★★☆ **Période de retour d'une avalanche**

(a) Chaque hiver est une épreuve de Bernoulli (succès = « grosse avalanche », de probabilité 0,02), répétée de façon identique et indépendante. X est le RANG du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}02)$. La période de retour vaut $E(X) = \frac{1}{0{,}02} = 50$ ans.

(b) $P(X \leqslant 10) = 1 - 0{,}98^{10} \approx 0{,}183$. Il y a environ 18 % de risque d'avoir une grosse avalanche dans les 10 prochains hivers.

(c) $P(X > 50) = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364$. Le moniteur a tort : la probabilité d'attendre plus de 50 hivers est d'environ 36 %, et non de 50 %.

(d) Non. Les hivers sont indépendants : l'hiver prochain, la probabilité d'une grosse avalanche est encore 0,02. Une période de retour de 50 ans est une moyenne, pas une régularité : deux avalanches peuvent arriver deux hivers de suite.

(e) $\frac{1}{p'} = 80$, donc $p' = \frac{1}{80} = 0{,}0125$. Le rang X' du premier hiver avec avalanche suit $\mathcal{G}(0{,}0125)$, d'où $P(X' \leqslant 10) = 1 - 0{,}9875^{10} \approx 0{,}118$. Ce couloir est moins exposé : environ 12 % de risque en 10 hivers.

Ex. 34 ★★★ **Contrôle qualité : du rang moyen au coût moyen**

(a) On répète l'épreuve « contrôler une pièce ». C'est une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », de probabilité p. Elle est répétée de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès.
Donc X suit $\mathcal{G}(p)$ et $E(X) = \frac{1}{p}$. Le nombre moyen de pièces est $E(X) = 40$, donc $\frac{1}{p} = 40$ et $p = \frac{1}{40} = 0{,}025$.

Ex. 34 **(suite)**

(b) $P(X \leqslant n) = 1 - 0{,}975^n \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}975^n \leqslant 0{,}5 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}975} \approx 27{,}38$ (on divise par $\ln 0{,}975 < 0$).
Donc $n = 28$: $P(X \leqslant 27) \approx 0{,}495$ et $P(X \leqslant 28) \approx 0{,}508$. Une fois sur deux, la première pièce défectueuse arrive au plus tard au rang 28, et $P(X > 40) = 0{,}975^{40} \approx 0{,}363$. Le collègue a tort : $E(X) = 40$ est une moyenne, pas une valeur qui partage les cas en deux moitiés.

(c) $P(X = 1) = 0{,}025$ et $P(X = 40) = 0{,}975^{39} \times 0{,}025 \approx 0{,}009$. Plus généralement, $P(X = k+1) = 0{,}975 \times P(X = k) < P(X = k)$: les probabilités diminuent quand k augmente. Le rang le plus probable est donc 1. Le nombre 40 est seulement le rang moyen.

(d) Le coût total est $C = 1{,}2X + 15$. Par linéarité, $E(C) = 1{,}2 \times E(X) + 15 = 1{,}2 \times 40 + 15 = 63$. Sur un grand nombre de séries, le coût moyen est de 63 €.

(e) Pour l'ancienne machine, le rang X' suit $\mathcal{G}(p')$, donc $E(1{,}2X' + 15) = \frac{1{,}2}{p'} + 15$. On résout $\frac{1{,}2}{p'} + 15 = 39$, soit $\frac{1{,}2}{p'} = 24$, donc $p' = \frac{1{,}2}{24} = 0{,}05$. Pour cette machine, une pièce est défectueuse avec la probabilité 0,05.

Ex. 35 ★★★ **Simuler une partie de pêche**

(a) On répète l'épreuve « un lancer ». C'est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir une prise », de probabilité 0,16. Elle est répétée de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès.
Donc X suit $\mathcal{G}(0{,}16)$ et $E(X) = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25$. Sur un grand nombre de sorties, Samir attend en moyenne 6,25 lancers pour sa première prise. Ce n'est pas un nombre garanti à chaque sortie.

(b) Le compteur `k` passe à 1 avant le premier lancer, puis augmente de 1 avant chaque nouveau lancer : il compte donc les lancers. Le test `random() < 0.16` est vrai avec la probabilité 0,16 : il simule une prise. La boucle s'arrête au premier succès. À ce moment, `k` est le rang de ce succès : c'est une réalisation de X.

(c) `frequence(10000)` simule 10 000 sorties. Elle renvoie la fréquence des sorties où la première prise arrive après le 10^e lancer : elle estime donc $P(X > 10)$. L'événement $X > 10$ signifie « aucune prise lors des 10 premiers lancers », donc $P(X > 10) = 0{,}84^{10} \approx 0{,}175$.

Ex. 35 **(suite)**

(d) Il a tort. Une fréquence simulée change d'une simulation à l'autre et n'est pas égale à la probabilité exacte. Elle en est seulement proche quand N est grand. Ici, 0,1731 et 0,1768 sont toutes deux à moins de 0,002 de 0,175 : les deux résultats sont cohérents avec le calcul exact.

(e) `sortie() - 1` simule $Y = X - 1$: c'est le nombre de lancers sans prise avant la première prise. On a $E(Y) = E(X) - 1 = 6{,}25 - 1 = 5{,}25$. La moyenne obtenue sera donc proche de 5,25.

6. *Absence de mémoire*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : je retire m**

(a) $P_{X>4}(X > 6) = P(X > 2) = 0{,}7^2 = 0{,}49$.

(b) $P_{X>3}(X = 5) = P(X = 2) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$.

(c) $P_{X>10}(X > 14) = P(X > 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

(d) $P_{X>8}(X \leqslant 9) = 1 - P_{X>8}(X > 9) = 1 - P(X > 1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

(e) $X \geqslant 11$ équivaut à $X > 10$, donc $P_{X>7}(X \geqslant 11) = P(X > 3) = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

(f) $P_{X>6}(X = 9) = P(X = 3) = 0{,}7^2 \times 0{,}3 = 0{,}147$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux ?**

(a) Faux. Par absence de mémoire, $P_{X>20}(X > 25) = P(X > 5) = 0{,}85^5 \approx 0{,}4437$, alors que $P(X > 25) = 0{,}85^{25} \approx 0{,}0172$.

(b) Vrai. Les deux valent $P(X > 6) = 0{,}85^6 \approx 0{,}3771$: le résultat ne dépend pas de m.

(c) Faux. On conditionne ici par « $X = 5$ », pas par « $X > 5$ ». Sachant $X = 5$, l'événement $X > 8$ est impossible, donc la probabilité vaut 0, alors que $P(X > 3) = 0{,}85^3 \approx 0{,}6141$.

(d) Faux. $X > 12$ est inclus dans $X > 9$, donc l'intersection est $X > 12$ et sa probabilité vaut $0{,}85^{12} \approx 0{,}1422$. Le produit vaut $0{,}85^{21} \approx 0{,}0329$: ces deux événements ne sont pas indépendants.

Ex. 38 ★★☆ **Le 6 est-il « dû » ?**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « obtenir 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$) de façon identique et indépendante, et X est le rang du premier succès. Donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

Ex. 38 **(suite)**

(b) Par absence de mémoire, $P_{X>9}(X = 10) = P(X = 1) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Lucas a tort : le 10e lancer donne un 6 avec la même probabilité que le premier, car le dé n'a pas de mémoire.

(c) $P_{X>9}(X \leqslant 12) = 1 - P_{X>9}(X > 12) = 1 - P(X > 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$. Sachant les 9 échecs, la probabilité d'obtenir un 6 au plus tard au 12e lancer est d'environ 0,421.

(d) Sachant $X > 9$, le nombre de lancers restants $X - 9$ suit la même loi que X au départ. Il vaut donc en moyenne $E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$. Inès doit prévoir en moyenne 6 lancers supplémentaires, comme au tout début.

Ex. 39 ★★☆ **Appels au standard : l'erreur de Clara**

(a) Clara remplace $P(\{X > 4\} \cap \{X > 7\})$ par un produit, comme si les deux événements étaient indépendants. Or $X > 7$ est inclus dans $X > 4$, donc leur intersection est simplement $X > 7$.

(b) $P_{X>4}(X > 7) = \frac{P(X>7)}{P(X>4)} = \frac{0{,}65^7}{0{,}65^4} = 0{,}65^3 \approx 0{,}275$. La probabilité que Malik ait besoin de plus de 3 nouveaux appels est d'environ 0,275.

(c) $\{X > m + k\}$ est inclus dans $\{X > m\}$, donc leur intersection est $\{X > m + k\}$. Alors $P_{X>m}(X > m + k) = \frac{P(X>m+k)}{P(X>m)} = \frac{0{,}65^{m+k}}{0{,}65^m} = 0{,}65^k = P(X > k)$. Le résultat ne dépend pas de m.

(d) $P_{X>4}(X = 7) = P(X = 3) = 0{,}65^2 \times 0{,}35 \approx 0{,}148$. Sachant les 4 échecs, la probabilité que le 7e appel soit le premier à aboutir est d'environ 0,148, comme la probabilité qu'un appelant qui commence réussisse pour la première fois au 3e appel.

Ex. 40 ★★☆ **Une loi sans mémoire est géométrique**

(a) $u_0 = P(X > 0) = 1$, car $X \geqslant 1$, et $u_1 = 1 - P(X = 1) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

(b) $X > m + 1$ est inclus dans $X > m$, donc $P_{X>m}(X > m + 1) = \frac{u_{m+1}}{u_m}$. Comme cette probabilité vaut u_1, on a $u_{m+1} = 0{,}92\, u_m$. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $u_0 = 1$, donc $u_n = 0{,}92^n$.

(c) $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k) = 0{,}92^{k-1} - 0{,}92^k = 0{,}92^{k-1} \times 0{,}08$.
Donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}08)$.

(d) $E(X) = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$. Yanis joue en moyenne 12,5 parties pour gagner le trophée.

Ex. 40 **(suite)**

(e) $P(T>1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, mais $P_{T>6}(T>7) = \frac{P(T>7)}{P(T>6)} = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} \neq \frac{7}{8}$, T n'est pas sans mémoire : les coffres déjà ouverts rapprochent du bon. T ne suit donc pas une loi géométrique.

Ex. 41 ★★★ **Pêche au lac : l'attente recommence**

(a) On répète une épreuve de Bernoulli (succès = « Nora prend un poisson », de probabilité $p = 0{,}12$) de façon identique et indépendante. X est le rang du premier succès, donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}12)$. Alors $E(X) = \frac{1}{0{,}12} = \frac{25}{3} \approx 8{,}3333$. En moyenne, Nora attend environ 8,33 lancers pour sa première prise.

(b) « Les 8 premiers lancers sont sans prise » s'écrit $X > 8$: la première prise a lieu après le 8e lancer. L'événement $X = 8$ voudrait dire que la première prise a lieu exactement au 8e lancer, donc que le 8e lancer est réussi. C'est le contraire de ce qu'on sait.

(c) D'après l'absence de mémoire, $P_{X>8}(X = 10) = P(X = 2) = 0{,}88 \times 0{,}12 = 0{,}1056$. Sachant les 8 premiers lancers ratés, la première prise a lieu au 10e lancer avec la probabilité 0,1056.

(d) Non. Sachant $X > 8$, le nombre de lancers restants $X - 8$ a la même loi que X au départ : c'est l'absence de mémoire. Son espérance est donc encore $\frac{1}{0{,}12} \approx 8{,}3333$. Les échecs passés ne rapprochent pas Nora de la prise : il lui reste en moyenne environ 8,33 lancers, comme au départ.

(e) On cherche $P_{X>8}(X \leqslant 8 + n) = 1 - P_{X>8}(X > 8 + n) = 1 - 0{,}88^n \geqslant 0{,}9$, soit $0{,}88^n \leqslant 0{,}1$. La fonction ln est croissante, donc $n \ln(0{,}88) \leqslant \ln(0{,}1)$. Comme $\ln(0{,}88) < 0$, on obtient $n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}88)} \approx 18{,}0124$. Vérification : $0{,}88^{18} \approx 0{,}1002 > 0{,}1$ et $0{,}88^{19} \approx 0{,}0881 \leqslant 0{,}1$. Le plus petit nombre de lancers supplémentaires est donc $n = 19$.

Ex. 42 ★★★ **Avec ou sans remise : qui a de la mémoire ?**

(a) Avec remise, on répète une épreuve de Bernoulli (succès = « tirer un rouge », de probabilité $p = \frac{2}{8} = 0{,}25$) de façon identique et indépendante. X est le rang du premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(0{,}25)$. On a $P(X > 1) = 0{,}75$. Si $X > 4$, alors $X > 3$, donc l'intersection des deux événements est $\{X > 4\}$. D'où $P_{X>3}(X > 4) = \frac{P(X>4)}{P(X>3)} = \frac{0{,}75^4}{0{,}75^3} = 0{,}75$. On retrouve $P(X > 1)$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) $Y > k$ signifie que les k premiers jetons tirés sont non rouges. Sans remise, il reste un jeton de moins à chaque tirage. $P(Y > 1) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. $P(Y > 2) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$. $P(Y > 3) = \frac{15}{28} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{14}$. $P(Y > 4) = \frac{5}{14} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{14}$.

(c) Comme $\{Y > 4\} \subset \{Y > 3\}$, on a $P_{Y>3}(Y > 4) = \frac{3/14}{5/14} = \frac{3}{5}$. Or $P(Y > 1) = \frac{3}{4}$, et $\frac{3}{5} \neq \frac{3}{4}$. Y n'a donc pas la propriété d'absence de mémoire. Une loi géométrique a cette propriété, donc Y ne suit pas une loi géométrique.

(d) Il a raison seulement pour le protocole B. Protocole A : $P_{X>3}(X = 4) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$, sans changement : le rouge n'est pas « dû ». Protocole B : $P(Y = 4) = P(Y > 3) - P(Y > 4) = \frac{5}{14} - \frac{3}{14} = \frac{1}{7}$, donc $P_{Y>3}(Y = 4) = \frac{1/7}{5/14} = \frac{2}{5}$. Et $\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$: sans remise, il reste 2 rouges parmi 5 jetons. L'affirmation est donc fausse « quel que soit le protocole ».

(e) Il reste 5 jetons, dont 2 rouges. $P(Z = 1) = \frac{2}{5}$, $P(Z = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $P(Z = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ et $P(Z = 4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.
Donc $E(Z) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$.
Dans le protocole A, par absence de mémoire, $X - 3$ a la même loi que X, donc il reste en moyenne $E(X) = \frac{1}{0{,}25} = 4$ tirages. Sans remise, l'attente moyenne a diminué. Avec remise, elle est la même qu'au départ.