Terminale spécialité / Loi binomiale

49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Épreuve et schéma de Bernoulli, arbre pondéré*

À retenir : Le succès S est ce que l'on compte, de probabilité p ; loi de Bernoulli : $E = p$, $V = p(1-p)$. Épreuves indépendantes : chemin = produit. Piège : $P(S\,;S\,;\overline{S}) = p^2(1-p)$, mais « exactement 2 succès sur 3 » vaut $3p^2(1-p)$.

Ex. 1 ★☆☆ **Loi de Bernoulli en calcul mental** — Dans chaque question, X vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

(a) On lance un dé équilibré à six faces. Le succès est « obtenir un diviseur de 6 ». Donne p.

(b) Un archer rate la cible avec la probabilité 0,15. X vaut 1 s'il rate. Donne $P(X=1)$ et $P(X=0)$.

(c) X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,35. Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(d) X suit une loi de Bernoulli avec $V(X) = 0{,}21$ et $p > 0{,}5$. Donne p.

(e) X suit une loi de Bernoulli avec $P(X=0) = 0{,}64$. Calcule $V(X)$.

(f) X suit une loi de Bernoulli avec $E(X) = 0{,}2$. Calcule $\sigma(X)$.

Ex. 2 ★☆☆ **Chemins d'un arbre décrit en mots** — Une appli de quiz pose 3 questions. Inès répond juste (J) à chacune avec la probabilité 0,8, sinon elle répond faux (F). Ses réponses sont indépendantes les unes des autres.

(a) Combien l'arbre pondéré compte-t-il d'issues ?

(b) Calcule $P(J\,;J\,;J)$.

(c) Calcule $P(J\,;J\,;F)$.

(d) Combien de chemins comportent exactement 2 réponses justes ? Écris-les.

(e) Calcule la probabilité qu'Inès donne exactement 2 réponses justes.

(f) Calcule $P(F\,;F\,;F)$.

Ex. 3 ★★☆ **Schéma de Bernoulli ou pas ?** — Pour chaque situation, dis si X suit une loi binomiale. Si oui, rédige la justification et donne les paramètres. Sinon, explique ce qui bloque.

(a) 6 % des capteurs d'une usine sont défectueux. On prélève 25 capteurs dans un stock assez important et X compte les capteurs défectueux.

Ex. 3 (suite)

(b) Une trousse contient 5 stylos, dont 2 vides. Hugo en prend 3, l'un après l'autre et sans remise. X compte les stylos vides.

(c) Léna lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X compte les lancers effectués.

(d) On lance 10 fois un dé équilibré. X est la somme des faces obtenues.

Ex. 4 ★★☆ **Lancers francs : corrige les erreurs** — Yanis tire 4 lancers francs. Il réussit chaque lancer (R) avec la probabilité 0,75, indépendamment des autres lancers. On représente l'expérience par un arbre pondéré à 4 niveaux. Arrondis à 10^{-3}.

(a) Calcule la probabilité du chemin $(R\,;R\,;R\,;\overline{R})$.

(b) Zoé affirme : « La probabilité que Yanis réussisse exactement 1 lancer vaut environ 0,012. » A-t-elle raison ? Justifie et corrige si besoin.

(c) Lucas note Y le nombre de lancers ratés et écrit $P(Y=0) = 0{,}25^4$. Trouve son erreur et donne la bonne valeur.

(d) Calcule la probabilité que Yanis rate au moins un lancer.

Ex. 5 ★★★ **Contrôle qualité : des gourdes défectueuses** — Une usine fabrique des gourdes sur deux machines. La machine A produit 70 % des gourdes, et 4 % d'entre elles sont défectueuses. La machine B produit les autres, et 9 % d'entre elles sont défectueuses. On prélève 3 gourdes dans un stock assez important. X compte les gourdes défectueuses. Arrondis les résultats à 10^{-4}.

(a) On choisit une gourde au hasard. Décris en mots l'arbre pondéré, puis calcule la probabilité de l'événement D « la gourde est défectueuse ».

(b) Une gourde prélevée est défectueuse. Calcule la probabilité qu'elle provienne de la machine B.

(c) Montre que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres.

(d) Calcule la probabilité qu'exactement 2 des 3 gourdes soient défectueuses.

Ex. 6 ★★★ **Bonbons : avec remise, sans remise, grand stock** — Un bocal contient 2 bonbons au citron et 4 bonbons à la menthe, impossibles à distinguer au toucher. Lina pioche deux bonbons au hasard. Le succès est « le bonbon est au citron ». Donne les valeurs exactes, sauf mention contraire.

(a) Z vaut 1 si le premier bonbon est au citron, et 0 sinon. Donne la loi de Z, puis $E(Z)$ et $V(Z)$.

Ex. 6 **(suite)**

(b) Lina pioche avec remise, et X compte les bonbons au citron. Justifie la loi de X, puis calcule $P(X = 1)$.

(c) Lina pioche maintenant sans remise. On note C_1 et C_2 les événements « le 1er (le 2e) bonbon est au citron ». Calcule $P_{C_1}(C_2)$, puis $P(C_2)$.

(d) Noé affirme : « Sans remise, la 2e pioche n'a pas la même probabilité de succès que la 1re : c'est pour cela que ce n'est pas un schéma de Bernoulli. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Un grand stock contient 2 000 bonbons au citron et 4 000 bonbons à la menthe. Calcule $P_{C_1}(C_2)$ à 10^{-4} près, puis commente.

Ex. 7 ★★★ **Manches d'un jeu en ligne : chemins et vrai ou faux** — Chloé joue 4 manches d'un jeu en ligne. Elle gagne chaque manche (G) avec la probabilité 0,6, sinon elle perd ($\overline{G}$). Les manches sont indépendantes les unes des autres. X compte les manches gagnées.

(a) Liste les chemins de l'arbre pondéré qui comportent exactement 2 manches gagnées. Combien y en a-t-il ?

(b) Vrai ou faux ? « $P(X = 2) = 0{,}6^2 \times 0{,}4^2$ ». Justifie, puis calcule $P(X = 2)$.

(c) Vrai ou faux ? « Chloé a autant de chances de gagner exactement 1 manche que d'en gagner exactement 3. » Justifie par le calcul.

(d) Y compte les manches perdues. Nomme le succès associé à Y, donne la loi de Y, puis calcule $P(Y \leqslant 1)$.

2. *Coefficients binomiaux et triangle de Pascal*

À retenir : $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins à k succès dans un arbre à n épreuves : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Piège : $\binom{10}{3} = 120$, ni 30 ni 1 000.

Ex. 8 ★☆☆ **Valeurs particulières et symétrie** — Calcule sans calculatrice. Tu peux utiliser $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(a) $\binom{14}{0}$ (b) $\binom{14}{1}$ (c) $\binom{14}{13}$

(d) $\binom{14}{2}$ (e) $\binom{15}{13}$ (f) $\binom{40}{40}$

Ex. 9 ★☆☆ **La formule factorielle** — On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Calcule sans calculatrice.

(a) $\binom{7}{3}$ avec la formule factorielle.

(b) $\binom{9}{4}$ avec la formule factorielle.

Ex. 9 **(suite)**

(c) $\binom{20}{3}$, puis compare ce résultat à 20×3 et à 20^3.

(d) Le nombre de chemins à exactement 9 succès dans un arbre à 11 épreuves.

(e) Noé écrit $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!} = 360$. Repère son erreur et corrige-la.

(f) Vrai ou faux : $\binom{16}{3} = \binom{16}{13}$? Justifie avec la formule factorielle.

Ex. 10 ★★☆ **Compléter le triangle de Pascal** — On admet la relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Dans le tableau, la case de la ligne n et de la colonne k contient $\binom{n}{k}$.

k	0	1	2	3	4	5
n = 4	1	4	6	4	1	–
n = 5	1	…	…	…	…	1

(a) Complète la ligne $n = 5$ à l'aide de la relation de Pascal.

(b) Déduis-en la ligne $n = 6$, pour k allant de 0 à 6.

(c) Calcule la somme des termes de chacune des lignes $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$. Quelle conjecture fais-tu ?

(d) Lis dans ta ligne $n = 6$ le nombre de chemins à exactement 2 succès d'un arbre à 6 épreuves, puis vérifie-le avec $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(e) Écris $\binom{6}{4} + \binom{6}{5}$ sous la forme d'un seul coefficient binomial, puis donne sa valeur.

Ex. 11 ★★☆ **Une ligne du triangle en Python** — Arrondis les probabilités à 10^{-3}.

```
from math import comb
n = 8
ligne = []
for k in range(n + 1):
    ligne.append(comb(n, k))
print(ligne)
print(sum(ligne))
```

(a) Qu'affiche la première instruction `print` ?

(b) Qu'affiche la seconde ? Explique ce résultat à l'aide d'un arbre.

(c) Un élève remplace `range(n + 1)` par `range(n)`. Que devient le second affichage ? Pourquoi ?

(d) Un archer tire 8 flèches ; X, le nombre de flèches en plein centre, suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}3)$. Clara écrit $P(X = 3) = 0{,}3^3 \times 0{,}7^5$. Corrige son calcul.

Ex. 12 ★★★ **Compter tous les chemins** — On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Chaque issue de l'arbre est un chemin, noté par une suite de n lettres S ou $\overline{S}$. On note X le nombre de succès.

(a) Combien l'arbre compte-t-il de chemins au total ? Justifie.

(b) Déduis-en que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$, en classant les chemins selon leur nombre de succès.

(c) Pour $n = 9$, Inès affirme : « il y a $9^3 = 729$ chemins à exactement 3 succès ». Explique pourquoi c'est impossible, puis donne le bon nombre avec la formule factorielle.

(d) Pour $n = 9$, combien de chemins comportent au plus 6 succès ? Utilise la symétrie des coefficients binomiaux.

(e) Pour $n = 9$, on suppose $p = \frac{1}{2}$. Calcule $P(X \leqslant 6)$ en valeur exacte, puis arrondie à 10^{-3}.

Ex. 13 ★★★ **La relation de Pascal par les chemins** — On considère un arbre de $n + 1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec $n \geqslant 1$, et un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$. On classe les chemins à $k + 1$ succès selon l'issue de la première épreuve.

(a) Combien de chemins à $k + 1$ succès commencent par S ? Justifie.

(b) Combien de chemins à $k + 1$ succès commencent par $\overline{S}$? Déduis-en la relation de Pascal.

(c) Voici le début de la ligne $n = 10$ du triangle de Pascal :

k	0	1	2	3	4
ligne 10	1	10	45	120	210

Déduis-en $\binom{11}{3}$, $\binom{11}{4}$ puis $\binom{11}{8}$ sans calculatrice.

(d) Le programme ci-dessous construit les lignes successives du triangle de Pascal. Complète l'instruction `nouvelle.append(…)` à l'aide de la relation de Pascal.

```
ligne = [1]
for n in range(13):
    nouvelle = [1]
    for k in range(len(ligne) - 1):
        nouvelle.append(…)
    nouvelle.append(1)
    ligne = nouvelle
print(ligne[3], sum(ligne))
```

(e) Qu'affiche le programme complété ? Justifie sans l'exécuter.

Ex. 14 ★★★ **Un QCM au hasard** — Un QCM compte 12 questions. Chacune a 4 réponses, dont une seule est juste. Yanis répond à chaque question au hasard, indépendamment des autres. On note X le nombre de bonnes réponses. Donne les valeurs exactes, puis des arrondis à 10^{-3}.

(a) Montre que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

Ex. 14 (suite)

(b) Calcule $\binom{12}{2}$ sans calculatrice, puis $P(X = 2)$.

(c) Malo écrit : « $\binom{12}{10} = \binom{12}{2}$, donc $P(X = 10) = P(X = 2)$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis calcule $P(X = 10)$.

(d) Lucas écrit : « $\binom{12}{3} = 12 \times 3 = 36$ ». Corrige-le avec la formule factorielle, puis calcule $P(X = 3)$.

3. *Reconnaître une loi binomiale : rédaction*

À retenir : Pour justifier X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$: je nomme le succès, p est la probabilité de ce que X compte, et je cite n épreuves identiques et indépendantes (avec remise ou grand stock). Ex. : 7 % de défauts, X compte les bonnes pièces : $p = 0{,}93$.

Ex. 15 ★☆☆ **Lire n et p dans l'énoncé** — Dans chaque situation, les épreuves sont identiques et indépendantes, et X suit une loi binomiale.

(a) Un QCM compte 12 questions, chacune avec 4 réponses dont une seule juste. Noé répond au hasard et X compte ses bonnes réponses. Donne n et p.

(b) Dans une très grande série de billets de tombola, 0,4 % sont gagnants. Lou en achète 30 et X compte ses billets gagnants. Donne n et p.

(c) Une basketteuse réussit 85 % de ses lancers francs. Elle en tire 16 et X compte ses lancers manqués. Donne n et p.

(d) On lance 14 fois deux dés équilibrés à 6 faces. X compte les lancers où la somme vaut 7. Donne n et p.

(e) Une graine germe avec la probabilité 0,7. Un jardinier sème 3 rangées de 18 graines et X compte les graines qui germent. Donne n et p.

(f) Dans une grande population, une personne sur 40 est gauchère. On choisit 50 personnes et X compte les gauchers. Donne n et p.

Ex. 16 ★☆☆ **Binomiale ou pas ?** — Pour chaque situation, justifie ta réponse : si oui, cite toutes les hypothèses du schéma de Bernoulli ; si non, cite celle qui manque.

(a) Une urne contient 5 boules blanches et 7 noires. Lina tire 3 boules sans remise et X compte les blanches. X suit-elle une loi binomiale ?

(b) Tom lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6, et X compte les lancers effectués. X suit-elle une loi binomiale ?

Ex. 16 **(suite)**

(c) Un archer tire 10 flèches. Il touche la cible avec la probabilité 0,6 au premier tir, puis cette probabilité augmente de 0,02 à chaque tir. X compte les tirs réussis. Loi binomiale ?

(d) On lance 15 fois une pièce équilibrée. On gagne 2 € par Pile et on perd 1 € par Face, et G est le gain total. G suit-elle une loi binomiale ?

(e) Dans une ville de 80 000 habitants, 23 % sont vaccinés. On interroge 40 habitants au hasard et X compte les vaccinés. X suit-elle une loi binomiale ?

(f) On lance 9 fois un dé équilibré à 6 faces et X compte les résultats supérieurs ou égaux à 5. X suit-elle une loi binomiale ?

Ex. 17 ★★☆ **Deux machines, un contrôle qualité** — Une usine fabrique des pièces sur deux machines. La machine A produit 65 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses. La machine B produit les autres, dont 6 % sont défectueuses. On note D : « la pièce est défectueuse ». Arrondis à 10^{-3}.

(a) Calcule la probabilité $P(D)$ qu'une pièce prise au hasard dans la production soit défectueuse.

(b) On prélève 30 pièces dans un stock assez important pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. X compte les pièces défectueuses. Montre que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres.

(c) Calcule $P(X = 0)$ et interprète ce résultat.

(d) Calcule la probabilité qu'au moins deux pièces du prélèvement soient défectueuses.

Ex. 18 ★★☆ **La rédaction d'Inès** — Une enseigne annonce que 72 % de ses clients sont satisfaits. On interroge au hasard 20 clients parmi plusieurs milliers, et X compte les clients non satisfaits. Inès écrit : « On répète 20 fois l'expérience, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}72)$. »

(a) Quelle erreur Inès commet-elle sur le paramètre p ? Corrige-la.

(b) Cite deux hypothèses du schéma de Bernoulli qu'Inès n'a pas mentionnées. Explique pourquoi l'indépendance est vérifiée ici.

(c) Rédige la justification complète attendue au bac.

(d) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

Ex. 19 ★★★ **Dépistage en série** — Dans une région, 4 % des habitants sont porteurs d'un virus. Le test de dépistage est positif chez 95 % des porteurs et chez 3 % des non-porteurs. On teste 25 habitants choisis au hasard dans cette région très peuplée, et X compte les tests positifs. Arrondis les probabilités à 10^{-3}.

(a) Décris en mots l'arbre pondéré associé à une personne testée, puis calcule la probabilité p que son test soit positif.

(b) Montre que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

Ex. 19 **(suite)**

(c) Calcule la probabilité qu'exactement deux tests soient positifs.

(d) Calcule la probabilité qu'au moins un test soit positif.

(e) Calcule $E(X)$. Nour affirme que $E(X)$ est le nombre moyen de porteurs du virus parmi les 25 personnes. Est-ce exact ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Centres, gain et échecs au stand de fléchettes** — À un stand, chaque fléchette atteint le centre avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres lancers. Mila lance 10 fléchettes. Elle gagne 4 € par centre et perd 1 € par fléchette hors du centre. X compte ses centres et G est son gain algébrique, en euros. Extrait de table de la loi de X :

k	0	1	2	3
P(X ⩽ k)	0,197	0,544	0,820	0,950

(a) Montre que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

(b) Exprime G en fonction de X. Théo affirme que G suit aussi une loi binomiale. A-t-il raison ? Justifie.

(c) À l'aide de l'extrait de table, calcule la probabilité que Mila gagne de l'argent.

(d) Calcule $E(G)$ et interprète ce résultat pour Mila.

(e) Z compte les fléchettes de Mila hors du centre. Donne la loi de Z, puis calcule $P(Z \geqslant 9)$ à l'aide de l'extrait de table.

Ex. 21 ★★★ **Sans remise : petit sachet ou grand stock ?** — Un horticulteur possède un stock de 5 000 bulbes de tulipes, dont 300 ne fleuriront pas. Les bulbes sont toujours pris au hasard et sans remise. Sauf mention contraire, arrondis les probabilités à 10^{-3}.

(a) Un client prend 2 bulbes dans le stock. Calcule la probabilité qu'aucun ne fleurisse (à 10^{-6} près), puis compare-la à $0{,}06^2$.

(b) Un autre client pioche 2 bulbes dans un sachet de 50, dont 3 ne fleuriront pas. Reprends la question précédente. Que conclus-tu ?

(c) Un client prend 40 bulbes dans le stock, et Y compte ceux qui fleurissent. Justifie que Y suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

(d) Traduis par un événement portant sur Y : « au plus 2 bulbes ne fleurissent pas ». Calcule ensuite sa probabilité.

(e) Calcule $E(Y)$ et interprète ce résultat.

4. Calculer $P(X = k)$

À retenir : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$: sans $\binom{n}{k}$, on n'a qu'un chemin ; l'exposant de p compte les succès. $P(X=0)=(1-p)^n$ et $P(X=n)=p^n$. Ex. : $\mathcal{B}(3\,;0{,}2)$, $P(X=1)=3\times 0{,}2\times 0{,}8^2=0{,}384$.

Ex. 22 ★☆☆ **Formule en ligne, valeurs exactes** — Dans chaque cas, écris la formule complète puis donne la valeur exacte, sous forme décimale ou de fraction.

(a) X suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$. Calcule $P(X=1)$.

(b) On répète 6 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,2. Calcule la probabilité de n'obtenir aucun succès.

(c) X suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}9)$. Calcule la probabilité que les 5 épreuves soient toutes des succès.

(d) X suit $\mathcal{B}\left(7\,;\frac{1}{3}\right)$. Calcule $P(X=2)$ sous forme de fraction irréductible.

(e) X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}4)$. Écris $P(X=10)$ sous forme d'une puissance, puis donne sa valeur décimale exacte.

(f) Une épreuve réussit avec la probabilité 0,1. On la répète 9 fois de façon identique et indépendante. Calcule la probabilité d'obtenir exactement un succès.

Ex. 23 ★☆☆ **Un chemin ou tous les chemins ?** — On répète 5 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès S avec $p=0{,}4$. X compte les succès. Donne les valeurs exactes.

(a) Calcule la probabilité du chemin $SS\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$.

(b) Combien de chemins de l'arbre comportent exactement 2 succès ?

(c) Déduis-en $P(X=2)$.

(d) Calcule la probabilité du chemin $\overline{S}S\overline{S}SS$.

(e) Calcule $P(X=3)$.

(f) Calcule $P(X=4)$.

Ex. 24 ★★☆ **Un sachet de graines** — Nora sème les 12 graines d'un sachet. Chaque graine germe avec la probabilité 0,85, indépendamment des autres. X compte les graines qui germent. Arrondis les résultats à 10^{-3}.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

(b) Calcule la probabilité qu'exactement 10 graines germent.

(c) Calcule la probabilité que toutes les graines germent.

(d) Calcule la probabilité qu'exactement 3 graines ne germent pas.

Ex. 25 ★★☆ **Tirs au but : deux erreurs à corriger** — Inès tire 8 penaltys. Chaque tir est réussi avec la probabilité 0,75, indépendamment des autres. X compte les tirs réussis : X suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}75)$. Pour $P(X=6)$, Hugo écrit $0{,}75^6\times 0{,}25^2$ et Lou écrit $\binom{8}{6}\times 0{,}75^2\times 0{,}25^6$.

(a) Le calcul de Hugo est-il la probabilité $P(X=6)$? Justifie en disant ce qu'il représente vraiment, puis donne sa valeur arrondie à 10^{-3}.

(b) Lou a-t-elle raison ? Justifie en précisant à quelle probabilité $P(X=j)$ son calcul est égal.

(c) Écris le calcul correct de $P(X=6)$ en le justifiant avec les chemins de l'arbre, puis donne sa valeur arrondie à 10^{-3}.

Ex. 26 ★★★ **QCM au hasard : démontrer puis comparer** — Un QCM comporte 6 questions. Chacune propose 4 réponses dont une seule est juste. Léo répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres. On note J « la réponse est juste » et X le nombre de réponses justes. Donne les valeurs exactes (fractions), puis un arrondi à 10^{-3}.

(a) Montre que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

(b) Combien de chemins de l'arbre comportent exactement 2 réponses justes ? Quelle est la probabilité de chacun d'eux ?

(c) Déduis-en $P(X=2)$. Justifie pourquoi on a le droit d'additionner les probabilités de ces chemins.

(d) Calcule $P(X=0)$ et $P(X=6)$. Interprète chacune par une phrase.

(e) Le professeur change le QCM : chaque question propose désormais 3 réponses, dont une seule juste. Léo affirme que sa probabilité d'avoir exactement 2 réponses justes augmente. Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 27 ★★★ **Contrôle qualité de lampes LED** — Une usine fabrique 60 % de ses lampes LED sur une machine A et le reste sur une machine B. Une lampe issue de A est défectueuse avec la probabilité 0,02, une lampe issue de B avec la probabilité 0,05. On prélève 15 lampes dans un stock assez grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. X compte les lampes défectueuses. Garde les valeurs exactes dans les calculs et arrondis à 10^{-3} à la fin.

(a) Montre que la probabilité qu'une lampe prise au hasard soit défectueuse vaut 0,032.

(b) Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

(c) Calcule la probabilité qu'aucune lampe du prélèvement ne soit défectueuse.

(d) Calcule la probabilité qu'exactement 2 lampes du prélèvement soient défectueuses.

(e) Le lot est refusé dès qu'au moins 2 lampes sont défectueuses. Calcule la probabilité que le lot soit refusé.

Ex. 28 ★★★ **Tir à l'arc et programme Python** — Maël, archer, touche le centre de la cible avec la probabilité 0,35 à chaque flèche, indépendamment des autres flèches. Il tire une série de 10 flèches. X compte les centres : X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}35)$. Camille écrit ce programme. Arrondis à 10^{-4}.

```
from math import comb
def proba(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1 - p)**(n - k)
def plus_probable(n, p):
    kmax = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if proba(n, p, k) > proba(n, p, kmax):
            kmax = k
    return kmax
```

(a) Explique ce que représente `proba(10, 0.35, 4)` pour Maël, puis calcule cette valeur.

(b) Explique ce que fait la boucle de `plus_probable`. Que renvoie `plus_probable(10, 0.35)` ? Interprète.

(c) Vrai ou faux : si Y suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}65)$, alors $P(Y=6)=P(X=4)$. Justifie sans calculatrice.

(d) Maël tire deux séries de 10 flèches, indépendantes. Calcule la probabilité qu'il touche exactement 3 centres dans chacune des deux séries.

5. *Calculer $P(X \leqslant k)$, $P(X \geqslant k)$ et $P(a \leqslant X \leqslant b)$*

À retenir : Au plus k : $P(X \leqslant k)$; au moins k : $1 - P(X \leqslant k-1)$; plus de k : $1 - P(X \leqslant k)$; entre a et b : $P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1)$. Ex. : au moins 5 donne $1 - P(X \leqslant 4)$.

Ex. 29 ★☆☆ **Traduire les mots en X** — Inès lance 15 fléchettes. À chaque lancer, indépendamment des autres, elle touche le centre avec une probabilité de 0,3. X est le nombre de centres : X suit $\mathcal{B}(15\,;0{,}3)$. Écris chaque événement avec X, puis donne sa probabilité en n'utilisant que des $P(X \leqslant \dots)$.

(a) « Inès touche le centre au moins 5 fois. »

(b) « Inès touche le centre plus de 5 fois. »

(c) « Inès touche le centre au plus 3 fois. »

(d) « Inès touche le centre entre 3 et 7 fois, bornes incluses. »

(e) « Inès manque le centre au moins 13 fois. »

(f) « Inès touche le centre au moins une fois. » Écris l'événement avec X, puis calcule sa probabilité à 10^{-3} près.

Ex. 30 ★★☆ **Lire un extrait de table** — X suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}1)$. La calculatrice donne l'extrait de table ci-dessous. Calcule chaque probabilité à l'aide de la table, à 10^{-3} près.

k	0	1	2	3	4	5
P(X ⩽ k)	0,122	0,392	0,677	0,867	0,957	0,989

(a) $P(X \leqslant 3)$ (b) $P(X \geqslant 3)$ (c) $P(X > 3)$

(d) $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ (e) $P(X = 4)$ (f) $P(X < 2)$

Ex. 31 ★★☆ **Contrôle de capsules** — Une usine fabrique des capsules, dont 5 % sont défectueuses. Pour contrôler un lot, on prélève 8 capsules. La production est assez grande pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. X est le nombre de capsules défectueuses. Le lot est refusé s'il contient au moins 2 capsules défectueuses. Arrondis à 10^{-3}.

(a) Montre que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

(b) Malik écrit : « P(lot refusé) $= 1 - P(X \leqslant 2)$ ». Explique son erreur et écris la bonne expression.

(c) Calcule à la main la probabilité que le lot soit refusé, en détaillant.

(d) Le contrôleur affirme : « Plus d'un lot sur dix est refusé. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **QCM au hasard** — Un QCM compte 12 questions, avec 4 réponses par question, dont une seule est juste. Yanis répond au hasard, de façon indépendante d'une question à l'autre. X est son nombre de bonnes réponses. On admet que X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}25)$. Arrondis à 10^{-3}.

k	2	3	4	5	6	7
P(X ⩽ k)	0,391	0,649	0,842	0,946	0,986	0,997

(a) Yanis a la moyenne s'il obtient au moins 6 bonnes réponses. Calcule la probabilité qu'il ait la moyenne.

(b) Calcule la probabilité que Yanis obtienne entre 3 et 6 bonnes réponses, bornes incluses.

(c) Calcule la probabilité qu'il obtienne plus de 7 bonnes réponses, puis interprète ce résultat.

(d) Ben veut qu'un élève qui répond au hasard ait strictement moins de 5 % de chances d'avoir la moyenne. Avec la table, trouve le plus petit nombre de bonnes réponses à exiger.

Ex. 33 ★★★ **Série de lancers francs** — Lou tire 10 lancers francs. À chaque tir, indépendamment des autres, elle marque avec une probabilité de 0,8. X est le nombre de lancers réussis. La calculatrice donne l'extrait de table ci-dessous. Utilise-le et arrondis à 10^{-3} près.

k	5	6	7	8	9
P(X ⩽ k)	0,033	0,121	0,322	0,624	0,893

(a) Justifie que X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

Ex. 33 (suite)

(b) Maël écrit : « $\mathrm{P}(\text{Lou marque au moins 8 fois}) = 1 - P(X \leqslant 8)$ ». Repère son erreur, puis calcule la bonne probabilité.

(c) Calcule la probabilité que Lou marque entre 6 et 9 lancers, bornes incluses.

(d) Calcule la probabilité que Lou rate plus de 3 lancers. Écris d'abord l'événement avec X.

(e) Calcule la probabilité que Lou rate au moins un lancer. Interprète ce résultat.

Ex. 34 ★★★ **Donneurs de sang au groupe rare** — Dans une région, 2 % des donneurs de sang ont un groupe sanguin rare. Lors d'une collecte, 30 donneurs se présentent. On assimile cette situation à un tirage avec remise. X est le nombre de donneurs au groupe rare : on admet que X suit la loi $\mathcal{B}(30\,;0{,}02)$. Arrondis à 10^{-3} près.

(a) Calcule la probabilité qu'au moins un donneur de la collecte ait le groupe rare.

(b) Calcule la probabilité qu'exactement 2 donneurs aient le groupe rare.

(c) Calcule la probabilité qu'au plus 1 donneur ait le groupe rare, sans utiliser de fonction cumulée.

(d) Déduis-en la probabilité que plus de 2 donneurs aient le groupe rare. Interprète.

(e) Combien de donneurs faut-il au minimum pour que la probabilité d'en avoir au moins un au groupe rare dépasse 0,99 ?

Ex. 35 ★★★ **Vrai ou faux sur la planche de Galton** — Une bille traverse une planche de Galton à 8 rangées de clous. À chaque clou, elle part à droite avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres clous. Elle tombe dans la case dont le numéro est son nombre de passages à droite, de 0 à 8. X est ce numéro, et X suit la loi $\mathcal{B}(8\,;0{,}5)$. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

(a) « La probabilité que la bille tombe dans une case de numéro au moins 6 est inférieure à 0,1. »

(b) « La bille a plus de 95 chances sur 100 de tomber dans une case numérotée entre 2 et 6. »

(c) « $P(X \leqslant 3) = P(X \geqslant 5)$. »

(d) « Ben lâche 25 billes, indépendamment. La probabilité qu'au moins une bille tombe dans la case 0 ou dans la case 8 dépasse 0,15. »

6. *Espérance, variance, écart type*

À retenir : $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$: $np(1-p)$ est la variance. $E(X)$ est une moyenne sur un grand nombre de séries.
$V(aX+b) = a^2 V(X)$. Ex. : pour $\mathcal{B}(48\,;0{,}25)$, $E = 12$, $V = 9$, $\sigma = 3$.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : espérance, variance, écart type** — Calcule directement. Arrondis au centième si nécessaire.

(a) X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$. Calcule $E(X)$.

(b) X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$. Calcule $V(X)$.

(c) X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}15)$. Calcule $\sigma(X)$.

(d) Y suit $\mathcal{B}(15\,;0{,}5)$. Calcule $E(Y)$. Y peut-elle prendre la valeur $E(Y)$? Justifie.

(e) Z suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}2)$ et $E(Z) = 14$. Détermine n.

(f) W suit $\mathcal{B}(25\,;0{,}6)$. Calcule $\sigma(W)$.

Ex. 37 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les paramètres** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) X suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}2)$. L'écart type de X vaut 8.

(b) Parmi les lois $\mathcal{B}(20\,;p)$, la variance est la plus grande pour $p = 0{,}5$ et vaut alors 5.

(c) X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec $E(X) = 4$ et $V(X) = 3$. Alors $p = 0{,}25$ et $n = 16$.

(d) X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}35)$ et Y suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}35)$. Alors $\sigma(Y) = 4\sigma(X)$.

(e) X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}4)$. Alors $V(3X) = 3V(X)$.

Ex. 38 ★★☆ **QCM au hasard et note obtenue** — Lina répond au hasard aux 20 questions d'un QCM. Chaque question a 4 réponses, dont une seule est juste, et les réponses sont indépendantes. Une réponse juste rapporte 2 points, une réponse fausse en retire 0,5. On note X le nombre de réponses justes et N la note de Lina.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.

(b) Calcule $E(X)$ et interprète ce résultat.

(c) Exprime N en fonction de X, puis calcule $E(N)$.

(d) Calcule $V(N)$, puis $\sigma(N)$ arrondi au centième.

Ex. 39 ★★☆ **Tir à l'arc : retrouver la loi** — Maëlle tire n flèches. Chaque flèche atteint le centre avec la probabilité p, indépendamment des autres. X est le nombre de centres, donc X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$. On sait que $E(X) = 9$ et $V(X) = 6{,}3$.

(a) Détermine p, puis n.

(b) On donne :

k	7	8	9	10	11
P(X = k)	0,1219	0,1501	0,1573	0,1416	0,1103

. Toutes les autres valeurs ont une probabilité inférieure à 0,11. Donne la valeur la plus probable de X et compare-la à $E(X)$.

(c) Noah écrit : « $\sigma(X) = 6{,}3$ ». Repère son erreur, puis calcule $\sigma(X)$ arrondi au centième.

(d) À l'aide du tableau, calcule $P(E(X) - \sigma(X) \leqslant X \leqslant E(X) + \sigma(X))$.

Ex. 40 ★★★ **Valeur la plus probable d'une loi binomiale** — Inès est commerciale. Elle appelle 12 clients dans la journée. Chaque client signe un contrat avec la probabilité 0,35, indépendamment des autres. On note X le nombre de contrats signés dans la journée. Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale, puis calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$.

(b) Montre que pour tout entier k de 0 à 11, $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{12-k}{k+1} \times \frac{7}{13}$.

(c) Déduis-en les entiers k tels que $P(X = k+1) > P(X = k)$, puis la valeur de X la plus probable.

(d) Calcule la probabilité de cette valeur. Inès dit : « En moyenne je signe 4,2 contrats, donc certains jours j'en signe 4,2. » Corrige-la.

Ex. 41 ★★★ **Gain d'un livreur : variance d'un gain affine** — Hugo est livreur et doit livrer 30 colis par jour. Chaque colis arrive à l'heure avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres. Hugo touche 2 € par colis livré à l'heure et paie 5 € de pénalité par colis en retard. On note X le nombre de colis livrés à l'heure et G le gain du jour, en euros. Arrondis au centième si nécessaire.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale, puis calcule $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Exprime G en fonction de X, puis calcule $E(G)$ et interprète ce résultat.

(c) Tom écrit : « On obtient $V(G)$ en multipliant $V(X)$ par le coefficient de X dans G, et $\sigma(G)$ est égal à $V(G)$. » Repère ses deux erreurs, puis calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$.

(d) L'entreprise remplace la pénalité de 5 € par une pénalité de m € par colis en retard. Détermine la plus grande valeur de m pour laquelle le gain moyen est au moins égal à 45 €.

Ex. 42 ★★★ **Variance maximale et réglage du paramètre** — Un standard téléphonique reçoit 400 appels par jour. Chaque appel est une réclamation avec la probabilité p, où $0 < p < 1$, indépendamment des autres appels. On note X le nombre de réclamations du jour ; X suit donc $\mathcal{B}(400\,;p)$.

(a) On pose $f(p) = p(1-p)$ sur $]0\,;1[$. Étudie les variations de f. Déduis-en la plus grande valeur possible de $V(X)$, puis celle de $\sigma(X)$.

(b) Une étude donne $\sigma(X) = 8$ avec $p < 0{,}5$. Détermine p.

(c) Avec cette valeur de p, calcule $E(X)$. Un jour, le standard reçoit 95 réclamations. L'écart à $E(X)$ dépasse-t-il deux écarts types ? Justifie.

(d) La directrice veut que $\sigma(X) \leqslant 6$. Détermine toutes les valeurs de p qui conviennent.

7. *Seuils, intervalles, simulation : problèmes type bac*

À retenir : Seuil sur n : $n\ln(1-p) \leqslant \ln(1-\alpha)$. On divise par $\ln(1-p) < 0$, donc le sens change, et on arrondit à l'entier supérieur (12,1 donne 13). Seuil sur k : on cite les deux valeurs qui encadrent le seuil ; $0{,}947 < 0{,}95$.

Ex. 43 ★★★ **Automatismes : nombre minimal d'épreuves** — Dans chaque cas, n est un entier naturel. Justifie avec le logarithme et donne un résultat entier.

(a) Pour trouver le plus petit entier n tel que $0{,}8^n \leqslant 0{,}01$, Tom écrit $n \leqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$, donc $n = 20$. Corrige ses deux erreurs.

(b) Détermine le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}96^n \geqslant 0{,}99$.

(c) Maëlle touche la cible avec la probabilité 0,15 à chaque tir, de façon indépendante. Combien de tirs lui faut-il au minimum pour la toucher au moins une fois avec une probabilité d'au moins 0,9 ?

(d) Détermine le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}75^n \geqslant 0{,}999$.

(e) Avec $p = 0{,}02$, Ben affirme que 200 épreuves suffisent pour avoir au moins un succès avec une probabilité d'au moins 0,99. Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 44 ★★★ **Automatismes : planche de Galton et extrait de table** — Une planche de Galton inclinée a 20 rangées de clous. À chaque clou, la bille part à droite avec la probabilité 0,25, de façon indépendante. Le numéro X de la case d'arrivée est le nombre de déplacements à droite : X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}25)$. La calculatrice donne :

k	1	2	3	4	5
P(X ⩽ k)	0,024	0,091	0,225	0,415	0,617

k	6	7	8	9	10
P(X ⩽ k)	0,786	0,898	0,959	0,986	0,996

(a) Détermine le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}99$.

(b) Détermine le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

(c) Calcule la probabilité que la bille arrive dans une case de numéro au moins 6.

(d) Calcule la probabilité que la bille arrive dans une case de numéro compris entre 3 et 7 (inclus).

(e) Léa affirme que $P(2 \leqslant X \leqslant 7) \geqslant 0{,}9$. Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 45 ★★☆ **Surréservation au restaurant** — Inès tient un restaurant de 15 tables. Elle accepte 17 réservations d'une table par soir. Chaque réservation est honorée avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres. X est le nombre de réservations honorées un soir donné. Arrondis à 10^{-3}.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.

(b) Calcule la probabilité qu'un soir donné, au moins un client ayant réservé ne trouve pas de table.

(c) Calcule $E(X)$ et interprète ce nombre.

(d) Calcule la probabilité qu'au moins une table reste vide un soir donné.

Ex. 46 ★★☆ **Contrôle qualité : de l'arbre au programme** — Une usine fabrique des capteurs sur deux chaînes. La chaîne A en produit 60 %, dont 3 % sont défectueux. La chaîne B produit le reste, dont 8 % sont défectueux. On prend un capteur au hasard et on note D l'événement « le capteur est défectueux ». Arrondis à 10^{-3}.

```
from math import comb
def seuil(n, p, s):
    k = 0
    F = (1-p)**n
    while F < s:
        k = k + 1
        F = F + comb(n, k) * p**k * (1-p)**(n-k)
    return k
```

(a) Montre que $P(D) = 0{,}05$.

(b) Le capteur est défectueux. Calcule la probabilité qu'il vienne de la chaîne B.

(c) On prélève 50 capteurs dans un stock assez grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. X compte les capteurs défectueux. Justifie la loi de X, puis calcule $P(X \geqslant 1)$.

(d) On prend X comme dans la question précédente. Que renvoie `seuil(50, 0.05, 0.95)` ? Justifie avec les deux dernières valeurs de `F`, puis interprète.

Ex. 47 ★★★ **Autotest d'allergie : de l'arbre à la règle de décision** — Dans une ville, 20 % des habitants sont allergiques au pollen (événement A). Un autotest est positif (événement T) pour 90 % des allergiques et pour 15 % des non-allergiques. Un pharmacien fait passer le test à 20 personnes choisies au hasard. On assimile ce choix à des tirages avec remise. X est le nombre de tests positifs. Arrondis à 10^{-3}. Extraits de la table de X :

k	1	2	3	4	5	6
P(X ⩽ k)	0,008	0,035	0,107	0,238	0,416	0,608

k	7	8	9	10	11
P(X ⩽ k)	0,772	0,887	0,952	0,983	0,995

(a) Partie A. Montre que $P(T) = 0{,}3$, puis calcule $P_T(A)$ et interprète ce résultat.

(b) Partie B. Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres. Calcule $E(X)$ et interprète.

Ex. 47 (suite)

(c) Détermine le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}05$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}95$, puis calcule $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

(d) Règle : si le nombre de tests positifs sort de $[a\,;b]$, le pharmacien signale le lot. Un jour, 11 tests sont positifs. Que fait-il ? Justifie.

(e) Combien de personnes faut-il tester au minimum pour que la probabilité de trouver au moins une personne allergique testée positive soit au moins égale à 0,99 ?

Ex. 48 ★★★ **Hydravion : surréservation et nombre de places** — Un hydravion touristique a 18 places. Les réservations sont gratuites. Chaque client qui réserve se présente avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. La compagnie accepte 20 réservations par vol. X est le nombre de clients qui se présentent. Arrondis à 10^{-3}. Extrait de la table de X :

k	14	15	16	17	18	19
P(X ⩽ k)	0,196	0,370	0,589	0,794	0,931	0,988

(a) Justifie que X suit une loi binomiale. Calcule par la formule $P(X = 19)$ et $P(X = 20)$, puis la probabilité d'une surréservation.

(b) Le directeur affirme : « Avec 18 places, tous les clients présents embarquent dans au moins 95 % des vols. » A-t-il raison ? Justifie, puis donne le plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.

(c) On note R le nombre de clients refusés à l'embarquement. Donne la loi de R, calcule $E(R)$ et interprète sur 100 vols.

(d) La compagnie veut un risque de surréservation au plus égal à 0,02. Combien de réservations peut-elle accepter au maximum ? Justifie.

Ex. 49 ★★★ **QCM au hasard : simuler, puis fixer une note minimale** — Un QCM a 12 questions. Chacune a 4 réponses, dont une seule juste. Noé répond au hasard, de façon indépendante d'une question à l'autre. X est son nombre de bonnes réponses. La fonction `note` simule sa copie. Mia écrit ensuite la fonction `note_min`. Arrondis à 10^{-3}.

```
from random import random
def note():
    n = 0
    for i in range(12):
        if random() < 0.25:
            n = n + 1
    return n
```

```
from math import comb
def note_min():
    m = 12
    Q = 0.25**12
    while Q <= 0.05:
        m = m - 1
        Q = Q + comb(12, m) * 0.25**m * 0.75**(12 - m)
    return m
```

k	3	4	5	6	7
P(X ⩽ k)	0,649	0,842	0,946	0,986	0,997

(a) Que représente le test `random() < 0.25` ? Justifie que `note()` simule X, puis donne la loi de X et son espérance.

(b) Écris une fonction `freq(N)` qui appelle N fois `note()` et renvoie la fréquence des notes supérieures ou égales à 6.

(c) Calcule $P(X \geqslant 6)$ avec la table. Deux appels `freq(1000)` renvoient 0,061 puis 0,049 : explique ces écarts.

(d) Mia cherche la plus petite note m telle que $P(X \geqslant m) \leqslant 0{,}05$. Sa fonction renvoie 6. A-t-elle raison ? Justifie avec la table, puis corrige le programme.