1. Épreuve et schéma de Bernoulli, arbre pondéré

Ex. 1 ★☆☆ **Loi de Bernoulli en calcul mental**

(a) Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 : $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

(b) Le succès, c'est ce que l'on compte, ici rater : $P(X = 1) = 0{,}15$ et $P(X = 0) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

(c) $E(X) = p = 0{,}35$ et $V(X) = p(1-p) = 0{,}35 \times 0{,}65 = 0{,}2275$.

(d) On cherche p tel que $p(1-p) = 0{,}21$. Or $0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$, donc $p = 0{,}3$ ou $p = 0{,}7$. Comme $p > 0{,}5$, on a $p = 0{,}7$.

(e) $p = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$, donc $V(X) = 0{,}36 \times 0{,}64 = 0{,}2304$.

(f) $p = E(X) = 0{,}2$, donc $V(X) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$ et $\sigma(X) = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.

Ex. 2 ★☆☆ **Chemins d'un arbre décrit en mots**

(a) Il y a 2 issues à chaque niveau et 3 niveaux : $2^3 = 8$ issues.

(b) Les réponses sont indépendantes, donc on multiplie : $0{,}8^3 = 0{,}512$.

(c) $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}128$.

(d) Il y en a 3 : $(J\,;J\,;F)$, $(J\,;F\,;J)$ et $(F\,;J\,;J)$.

(e) Les 3 chemins ont chacun pour probabilité 0,128 : $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$. Ce n'est pas $P(J\,;J\,;F)$.

(f) $0{,}2^3 = 0{,}008$.

Ex. 3 ★★☆ **Schéma de Bernoulli ou pas ?**

(a) Oui. Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « le capteur est défectueux », car c'est ce que l'on compte : $p = 0{,}06$, et non 0,94. Le stock est assez important, donc on assimile les 25 prélèvements à des tirages avec remise : ils sont identiques et indépendants. X suit donc la loi $\mathcal{B}(25\,;0{,}06)$.

(b) Non. Les tirages se font sans remise dans une petite trousse. $P(V_1) = \frac{2}{5}$, mais $P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{4}$ et $P_{\overline{V_1}}(V_2) = \frac{2}{4}$: le deuxième tirage dépend du premier. Les épreuves ne sont pas indépendantes.

(c) Non. Le nombre de lancers n'est pas fixé à l'avance : c'est justement lui que compte X. Ce n'est donc pas un schéma de Bernoulli.

Ex. 3 (suite)

(d) Non. Chaque lancer a 6 issues et X ne compte pas des succès : X prend des valeurs de 10 à 60, et pas de 0 à 10.

Ex. 4 ★★☆ **Lancers francs : corrige les erreurs**

(a) Les lancers sont indépendants, donc on multiplie : $0{,}75^3 \times 0{,}25 \approx 0{,}105$.

(b) Non. $0{,}75 \times 0{,}25^3 \approx 0{,}012$ est la probabilité d'un seul chemin, par exemple $(R\,;\overline{R}\,;\overline{R}\,;\overline{R})$. Il y a 4 chemins avec exactement 1 réussite (elle peut être au 1er, 2e, 3e ou 4e lancer), et ils ont tous la même probabilité. On obtient $4 \times 0{,}75 \times 0{,}25^3 \approx 0{,}047$.

(c) $Y = 0$ veut dire « aucun lancer raté », c'est-à-dire 4 réussites. Lucas a pris la probabilité de rater (0,25) à la place de celle de réussir. On a $P(Y = 0) = 0{,}75^4 \approx 0{,}316$, alors que Lucas trouvait environ 0,004.

(d) L'événement contraire est « aucun lancer raté » : $1 - 0{,}75^4 \approx 0{,}684$. Yanis rate au moins un lancer dans environ 68 % des cas.

Ex. 5 ★★★ **Contrôle qualité : des gourdes défectueuses**

(a) Premier niveau : A avec la probabilité 0,7, B avec la probabilité 0,3. Second niveau : D avec la probabilité $P_A(D) = 0{,}04$ après A, et $P_B(D) = 0{,}09$ après B. Deux chemins mènent à D. D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = 0{,}7 \times 0{,}04 + 0{,}3 \times 0{,}09 = 0{,}028 + 0{,}027 = 0{,}055$.

(b) On cherche $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}09}{0{,}055} = \frac{0{,}027}{0{,}055} \approx 0{,}4909$. Près de la moitié des gourdes défectueuses viennent de B, qui ne produit pourtant que 30 % des gourdes.

(c) Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli. Le succès est ce que l'on compte : « la gourde est défectueuse », de probabilité $p = 0{,}055$ (et non 0,945). On répète 3 fois cette épreuve à l'identique. Le stock est assez important, donc on assimile les prélèvements à des tirages avec remise : les épreuves sont indépendantes. X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(3\,;0{,}055)$.

Ex. 5 **(suite)**

(d) On cherche $P(X=2)$. Le chemin $(D\,;D\,;\overline{D})$ a pour probabilité $0{,}055^2\times 0{,}945$. Or $\binom{3}{2}=3$ chemins comportent exactement 2 succès : $(D\,;D\,;\overline{D})$, $(D\,;\overline{D}\,;D)$ et $(\overline{D}\,;D\,;D)$, tous de même probabilité. Donc $P(X=2)=3\times 0{,}055^2\times 0{,}945\approx 0{,}0086$. Moins de 1 % des lots contiennent exactement 2 gourdes défectueuses.

Ex. 6 ★★★ **Bonbons : avec remise, sans remise, grand stock**

(a) Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. On a $P(Z=1)=\frac{1}{3}$ et $P(Z=0)=\frac{2}{3}$.
Donc $E(Z)=p=\frac{1}{3}$ et $V(Z)=p(1-p)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

(b) Chaque pioche est une épreuve de Bernoulli de succès « citron », de probabilité $p=\frac{1}{3}$. On la répète 2 fois à l'identique. Comme Lina pioche avec remise, les pioches sont indépendantes.
Donc X suit la loi $\mathcal{B}(2\,;\frac{1}{3})$. Deux chemins comportent exactement un succès, d'où $P(X=1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

(c) Si le 1er bonbon est au citron, il reste 1 bonbon au citron sur 5 : $P_{C_1}(C_2)=\frac{1}{5}$. Si le 1er est à la menthe, il reste 2 bonbons au citron sur 5 : $P_{\overline{C_1}}(C_2)=\frac{2}{5}$. D'après la formule des probabilités totales : $P(C_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}=\frac{1}{3}$.

(d) Non. Sa conclusion est juste, mais pas sa raison : $P(C_2)=\frac{1}{3}=P(C_1)$, les deux pioches ont la même probabilité de succès. Ce qui bloque, c'est l'indépendance : $P_{C_1}(C_2)=\frac{1}{5}\neq\frac{1}{3}=P(C_2)$. On a aussi $P(C_1\cap C_2)=\frac{1}{15}$, alors que $P(C_1)\times P(C_2)=\frac{1}{9}$. Sans remise dans un petit bocal, ce n'est donc pas un schéma de Bernoulli.

(e) $P_{C_1}(C_2)=\frac{1\,999}{5\,999}\approx 0{,}3332$, très proche de $P(C_2)=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333$. Quand la population est très grande devant le nombre de tirages, retirer un bonbon ne change presque pas la composition. On assimile donc les pioches sans remise à des pioches avec remise, c'est-à-dire indépendantes.

Ex. 7 ★★★ **Manches d'un jeu en ligne : chemins et vrai ou faux**

(a) Il y a 6 chemins : $(G\,;G\,;\overline{G}\,;\overline{G})$, $(G\,;\overline{G}\,;G\,;\overline{G})$, $(G\,;\overline{G}\,;\overline{G}\,;G)$, $(\overline{G}\,;G\,;G\,;\overline{G})$, $(\overline{G}\,;G\,;\overline{G}\,;G)$ et $(\overline{G}\,;\overline{G}\,;G\,;G)$. Cela correspond à $\binom{4}{2}=6$, le nombre de façons de placer les 2 victoires parmi les 4 manches.

Ex. 7 **(suite)**

(b) Faux : $0{,}6^2\times 0{,}4^2=0{,}0576$ est la probabilité d'un seul chemin, par exemple $(G\,;G\,;\overline{G}\,;\overline{G})$, d'après la règle du produit. Les 6 chemins ont la même probabilité.
Donc $P(X=2)=6\times 0{,}6^2\times 0{,}4^2=0{,}3456$.

(c) Faux. X suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}6)$: succès « gagner la manche », $p=0{,}6$, 4 manches identiques et indépendantes. On calcule $P(X=1)=4\times 0{,}6\times 0{,}4^3=0{,}1536$ et $P(X=3)=4\times 0{,}6^3\times 0{,}4=0{,}3456$. Le nombre de chemins est le même ($\binom{4}{1}=\binom{4}{3}=4$), mais la probabilité de chaque chemin change, car $p\neq 0{,}5$.

(d) Y compte les manches perdues, donc le succès est « perdre la manche », de probabilité $p=0{,}4$. On a 4 épreuves identiques et indépendantes, donc Y suit la loi $\mathcal{B}(4\,;0{,}4)$. On calcule $P(Y\leqslant 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=0{,}6^4+4\times 0{,}4\times 0{,}6^3=0{,}1296+0{,}3456=0{,}4752$. Chloé perd au plus une manche dans environ 47,5 % des cas.

2. *Coefficients binomiaux et triangle de Pascal*

Ex. 8 ★★★ **Valeurs particulières et symétrie**

(a) $\binom{14}{0}=1$: un seul chemin n'a aucun succès.

(b) $\binom{14}{1}=14$: le succès peut être placé à l'une des 14 épreuves.

(c) Par symétrie, $\binom{14}{13}=\binom{14}{1}=14$.

(d) $\binom{14}{2}=\frac{14\times 13}{2}=91$.

(e) Par symétrie, $\binom{15}{13}=\binom{15}{2}=\frac{15\times 14}{2}=105$.

(f) $\binom{40}{40}=1$: un seul chemin n'a que des succès.

Ex. 9 ★★★ **La formule factorielle**

(a) $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$.

(b) $\binom{9}{4}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=\frac{3\,024}{24}=126$.

(c) $\binom{20}{3}=\frac{20!}{3!\,17!}=\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}=\frac{6\,840}{6}=1\,140$: ce n'est ni $20\times 3=60$ ni $20^3=8\,000$.

(d) C'est $\binom{11}{9}=\frac{11!}{9!\,2!}=\frac{11\times 10}{2}=55$ chemins.

(e) Noé a oublié le facteur $(6-2)!$ au dénominateur : $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\,4!}=\frac{720}{48}=15$.

Ex. 9 **(suite)**

(f) Vrai : $\binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\,13!}$ et $\binom{16}{13} = \frac{16!}{13!\,3!}$, c'est la même fraction. Les deux valent $\frac{16\times15\times14}{6} = 560$.

Ex. 10 ★★☆ **Compléter le triangle de Pascal**

(a) Chaque case est la somme de la case juste au-dessus et de sa voisine de gauche dans la ligne du dessus : $1+4=5$, $4+6=10$, $6+4=10$, $4+1=5$. La ligne $n=5$ est donc : 1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1.

(b) De la même façon : 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 ; 1.

(c) On trouve 16, 32 et 64, c'est-à-dire 2^4, 2^5 et 2^6. Conjecture : la somme de la ligne n vaut 2^n.

(d) C'est $\binom{6}{2}$, lu dans la colonne $k=2$: 15 chemins. Vérification : $\frac{6\times5}{2} = 15$.

(e) D'après la relation de Pascal avec $n=6$ et $k=4$: $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5} = 15+6 = 21$.

Ex. 11 ★★☆ **Une ligne du triangle en Python**

(a) Il affiche `[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]`, c'est-à-dire les $\binom{8}{k}$ pour k allant de 0 à 8.

(b) Il affiche `256`. C'est le nombre total de chemins d'un arbre à 8 épreuves à 2 issues : $2^8 = 256$.

(c) `range(n)` s'arrête à $k=7$: il manque $\binom{8}{8} = 1$. Le second affichage devient `255`.

(d) $0{,}3^3 \times 0{,}7^5 \approx 0{,}005$ n'est la probabilité que d'un seul chemin. Il y a $\binom{8}{3} = 56$ chemins à 3 succès (lu dans la liste), donc $P(X=3) = 56 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^5 \approx 0{,}254$. L'archer a environ 25 % de chances de placer exactement 3 flèches au centre.

Ex. 12 ★★★ **Compter tous les chemins**

(a) Chaque épreuve a 2 issues (S ou $\overline{S}$) et il y a n épreuves. Par le principe multiplicatif, l'arbre compte $2\times2\times\cdots\times2 = 2^n$ chemins.

(b) Chaque chemin comporte un nombre de succès k et un seul, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Il y a $\binom{n}{k}$ chemins à k succès. En additionnant pour k allant de 0 à n, on compte chaque chemin une fois et une seule : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

(c) Pour $n=9$, l'arbre ne compte que $2^9 = 512$ chemins : on ne peut pas en avoir 729 à 3 succès. Le bon nombre est $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = \frac{504}{6} = 84$.

Ex. 12 **(suite)**

(d) « Au plus 6 succès » est le contraire de « 7, 8 ou 9 succès ». Par symétrie, $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9\times8}{2} = 36$, $\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$ et $\binom{9}{9} = 1$. On trouve donc $512 - 36 - 9 - 1 = 466$ chemins.

(e) Si $p = \frac{1}{2}$, chaque chemin a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$. Donc $P(X \leqslant 6) = \frac{466}{512} = \frac{233}{256} \approx 0{,}910$. Il y a environ 91 % de chances d'obtenir au plus 6 succès.

Ex. 13 ★★★ **La relation de Pascal par les chemins**

(a) Si la première épreuve donne S, il reste n épreuves qui doivent contenir exactement k succès. Le nombre de façons de placer ces k succès parmi les n épreuves restantes est $\binom{n}{k}$.

(b) Si la première épreuve donne $\overline{S}$, les $k+1$ succès sont tous dans les n épreuves suivantes : il y a $\binom{n}{k+1}$ chemins. Les deux cas sont disjoints et couvrent tous les chemins à $k+1$ succès parmi $n+1$ épreuves. Donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(c) Par la relation de Pascal : $\binom{11}{3} = \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 45 + 120 = 165$ et $\binom{11}{4} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 120 + 210 = 330$. Par symétrie, $\binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165$.

(d) On écrit `nouvelle.append(ligne[k] + ligne[k + 1])` : chaque terme intérieur de la nouvelle ligne est la somme des deux termes voisins de la ligne précédente (relation de Pascal).

(e) Au départ, `ligne` est la ligne 0 ; chaque passage dans la boucle donne la ligne suivante, donc après 13 passages c'est la ligne 13. `ligne[3]` vaut $\binom{13}{3} = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 286$ et la somme de la ligne vaut $2^{13} = 8\,192$. Le programme affiche `286 8192`.

Ex. 14 ★★★ **Un QCM au hasard**

(a) Répondre à une question est une épreuve de Bernoulli de succès « la réponse est juste », de probabilité $p = \frac{1}{4}$. On répète 12 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}\left(12\,;\frac{1}{4}\right)$.

(b) $\binom{12}{2} = \frac{12\times11}{2} = 66$.
Donc $P(X=2) = 66 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{66\times3^{10}}{4^{12}} = \frac{3\,897\,234}{16\,777\,216} \approx 0{,}232$.

Ex. 14 **(suite)**

(c) Non. Les coefficients sont bien égaux, mais les exposants ne s'échangent pas : l'exposant de p est le nombre de succès. Comme $p \neq 1-p$, les probabilités diffèrent : $P(X=10) = 66 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2} = \frac{594}{16\,777\,216} \approx 0{,}000$ (environ $3{,}5 \times 10^{-5}$). Dix bonnes réponses au hasard, c'est presque impossible.

(d) $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$, et non 36.
Donc $P(X=3) = 220 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{9} = \frac{220\times3^{9}}{4^{12}} = \frac{4\,330\,260}{16\,777\,216} \approx 0{,}258$.

3. *Reconnaître une loi binomiale : rédaction*

Ex. 15 ★☆☆ **Lire n et p dans l'énoncé**

(a) Succès : « la réponse est juste ». $n = 12$ et $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

(b) Succès : « le billet est gagnant ». $n = 30$ et $p = \frac{0{,}4}{100} = 0{,}004$
(et non 0,4).

(c) X compte les échecs du tir, donc le succès est « le lancer est manqué » : $n = 16$ et $p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

(d) Sur 36 issues équiprobables, 6 donnent une somme de 7 : $n = 14$ et $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(e) On répète l'épreuve « semer une graine » $3 \times 18 = 54$ fois : $n = 54$ et $p = 0{,}7$.

(f) Succès : « la personne est gauchère ». $n = 50$ et $p = \frac{1}{40} = 0{,}025$.

Ex. 16 ★☆☆ **Binomiale ou pas ?**

(a) Non. Par la formule des probabilités totales, $P(B_2) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$, mais $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{11} \neq \frac{5}{12}$: sans remise, dans une petite urne, les tirages ne sont pas indépendants.

(b) Non. Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance (on s'arrête au premier 6), et X ne compte pas des succès.

(c) Non. La probabilité de succès change d'un tir à l'autre (elle vaut $0{,}6 + 9 \times 0{,}02 = 0{,}78$ au 10^{e} tir) : les épreuves ne sont pas identiques.

(d) Non. Si X compte les Pile, X suit $\mathcal{B}(15\,;0{,}5)$, mais $G = 2X - (15 - X) = 3X - 15$ va de -15 à 30 : G est un gain, pas un nombre de succès.

(e) Oui. Succès « l'habitant est vacciné », $p = 0{,}23$, 40 épreuves identiques, indépendantes car la population est très grande devant 40 : X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}23)$.

Ex. 16 **(suite)**

(f) Oui. Succès « obtenir 5 ou 6 », $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 9 lancers identiques et indépendants : X suit $\mathcal{B}\left(9\,;\frac{1}{3}\right)$.

Ex. 17 ★★☆ **Deux machines, un contrôle qualité**

(a) D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = 0{,}65 \times 0{,}02 + 0{,}35 \times 0{,}06 = 0{,}013 + 0{,}021 = 0{,}034$.

(b) Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli dont le succès « la pièce est défectueuse » a pour probabilité $p = 0{,}034$. On la répète 30 fois à l'identique, et les épreuves sont indépendantes car le stock est assez important. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(30\,;0{,}034)$.

(c) $P(X=0) = 0{,}966^{30} \approx 0{,}354$. Il y a environ 35 % de chances qu'aucune pièce du prélèvement ne soit défectueuse.

(d) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0{,}966^{30} - 30 \times 0{,}034 \times 0{,}966^{29} \approx 0{,}272$. Il y a environ 27,2 % de chances qu'au moins deux pièces du prélèvement soient défectueuses.

Ex. 18 ★★☆ **La rédaction d'Inès**

(a) X compte les clients non satisfaits : le succès est « le client n'est pas satisfait », donc $p = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$ et non 0,72.

(b) Inès n'a nommé ni le succès de l'épreuve à deux issues, ni le fait que les épreuves sont identiques et indépendantes. Indépendance : le choix se fait sans remise, mais parmi plusieurs milliers de clients. La population est très grande devant 20, on assimile donc les choix à des tirages avec remise, qui sont indépendants.

(c) Interroger un client est une épreuve de Bernoulli dont le succès « le client n'est pas satisfait » a pour probabilité $p = 0{,}28$. On la répète 20 fois de façon identique et indépendante (population très grande). X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}28)$.

(d) $E(X) = np = 20 \times 0{,}28 = 5{,}6$. Sur un grand nombre d'enquêtes de 20 clients, on compte en moyenne 5,6 clients non satisfaits par enquête.

Ex. 19 ★★★ **Dépistage en série**

(a) Premier niveau : la personne est porteuse V (probabilité 0,04) ou non porteuse $\overline{V}$ (probabilité 0,96). Second niveau : test positif T, avec $P_V(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{V}}(T) = 0{,}03$. Deux chemins mènent à T. Par la formule des probabilités totales : $p = P(T) = 0{,}04 \times 0{,}95 + 0{,}96 \times 0{,}03 = 0{,}038 + 0{,}0288 = 0{,}0668$.

Ex. 19 (suite)

(b) Tester une personne est une épreuve à deux issues. Le succès est « le test est positif », de probabilité $p = 0{,}0668$. On répète 25 fois cette épreuve à l'identique. La population est très grande devant 25 : on assimile le choix à un tirage avec remise, donc les épreuves sont indépendantes. X compte les succès de ce schéma de Bernoulli : X suit la loi $\mathcal{B}(25\,;0{,}0668)$.

(c) $P(X=2) = \binom{25}{2} \times 0{,}0668^2 \times 0{,}9332^{23} = 300 \times 0{,}0668^2 \times 0{,}9332^{23} \approx 0{,}273$. Il y a environ 27,3 % de chances d'obtenir exactement deux tests positifs.

(d) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}9332^{25} \approx 1 - 0{,}178 = 0{,}822$. Il y a environ 82,2 % de chances qu'au moins un test soit positif.

(e) $E(X) = np = 25 \times 0{,}0668 = 1{,}67$: sur un grand nombre de séries de 25 tests, on observe en moyenne 1,67 test positif par série. Ce n'est pas exact : X compte les tests positifs, faux positifs compris, et un porteur peut avoir un test négatif. Le nombre moyen de porteurs est $25 \times 0{,}04 = 1$.

Ex. 20 ★★★ Centres, gain et échecs au stand de fléchettes

(a) Chaque lancer est une épreuve à deux issues. Le succès est « la fléchette atteint le centre », de probabilité $p = 0{,}15$. Les 10 lancers sont identiques et indépendants (indépendance donnée par l'énoncé). X compte les succès : X suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}15)$.

(b) Il y a X centres et $10 - X$ fléchettes hors du centre, donc $G = 4X - (10 - X) = 5X - 10$. Théo a tort. G ne compte pas des succès : il prend les valeurs $-10, -5, 0, \ldots, 40$, dont certaines sont négatives, alors qu'une variable de loi binomiale prend les valeurs entières $0, 1, \ldots, n$.

(c) $G > 0 \iff 5X - 10 > 0 \iff X > 2 \iff X \geqslant 3$. Donc $P(G>0) = P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}820 = 0{,}180$. Mila gagne de l'argent dans environ 18 % des parties.

(d) $E(X) = 10 \times 0{,}15 = 1{,}5$, donc $E(G) = 5E(X) - 10 = 7{,}5 - 10 = -2{,}5$. Sur un grand nombre de parties, Mila perd en moyenne 2,50 € par partie : le jeu lui est défavorable.

Ex. 20 (suite)

(e) Succès : « la fléchette manque le centre », de probabilité $p = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. Les 10 lancers sont identiques et indépendants, et Z compte les succès : Z suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}85)$. De plus $Z = 10 - X$, donc $Z \geqslant 9 \iff X \leqslant 1$, et $P(Z \geqslant 9) = P(X \leqslant 1) = 0{,}544$. Dans environ 54 % des parties, Mila manque le centre au moins 9 fois.

Ex. 21 ★★★ Sans remise : petit sachet ou grand stock ?

(a) Le second tirage dépend du premier : $P = \frac{300}{5000} \times \frac{299}{4999} \approx 0{,}003589$. Avec remise, on obtiendrait $0{,}06^2 = 0{,}0036$. L'écart, d'environ 0,000011, représente 0,3 % : il est négligeable.

(b) $P = \frac{3}{50} \times \frac{2}{49} = \frac{6}{2450} \approx 0{,}002449$, très loin de 0,0036 (écart d'environ 32 %). Conclusion : on ne peut assimiler un tirage sans remise à un tirage avec remise que si la population est très grande devant le nombre de tirages. C'est vrai pour le stock, pas pour le petit sachet.

(c) Prendre un bulbe est une épreuve à deux issues. Le succès est « le bulbe fleurit », car c'est ce que Y compte. Sa probabilité est $p = \frac{4700}{5000} = 0{,}94$, et non 0,06. On répète 40 fois cette épreuve à l'identique. Comme 40 est très petit devant 5 000, on assimile les tirages à des tirages avec remise : ils sont indépendants. Y compte les succès, donc Y suit la loi $\mathcal{B}(40\,;0{,}94)$.

(d) « Au plus 2 ne fleurissent pas » équivaut à « au moins 38 fleurissent », c'est-à-dire $Y \geqslant 38$. On a $P(Y \geqslant 38) = \binom{40}{38} \times 0{,}94^{38} \times 0{,}06^2 + \binom{40}{39} \times 0{,}94^{39} \times 0{,}06 + 0{,}94^{40}$, soit environ $0{,}2675 + 0{,}2149 + 0{,}0842 \approx 0{,}567$. Il y a environ 56,7 % de chances qu'au plus 2 bulbes ne fleurissent pas.

(e) $E(Y) = np = 40 \times 0{,}94 = 37{,}6$. Sur un grand nombre de lots de 40 bulbes, environ 37,6 bulbes fleurissent en moyenne par lot.

4. *Calculer $P(X = k)$*

Ex. 22 ★☆☆ Formule en ligne, valeurs exactes

(a) $P(X=1) = \binom{4}{1} \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^3 = 4 \times 0{,}5^4 = 4 \times 0{,}0625 = 0{,}25$.

(b) X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}2)$. $P(X=0) = \binom{6}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^6 = 0{,}8^6 = 0{,}262\,144$: aucun succès, donc un seul chemin.

Ex. 22 **(suite)**

(c) $P(X=5)=\binom{5}{5}\times 0{,}9^5\times 0{,}1^0=0{,}9^5=0{,}590\,49$.

(d) $P(X=2)=\binom{7}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=21\times\frac{1}{9}\times\frac{32}{243}=\frac{672}{2\,187}=\frac{224}{729}$.

(e) $P(X=10)=\binom{10}{10}\times 0{,}4^{10}\times 0{,}6^0=0{,}4^{10}=0{,}000\,104\,857\,6$.

(f) X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(9\,;0{,}1)$. $P(X=1)=\binom{9}{1}\times 0{,}1\times 0{,}9^8=0{,}9\times 0{,}9^8=0{,}9^9=0{,}387\,420\,489$.

Ex. 23 ★☆☆ **Un chemin ou tous les chemins ?**

(a) $0{,}4\times 0{,}4\times 0{,}6\times 0{,}6\times 0{,}6=0{,}4^2\times 0{,}6^3=0{,}16\times 0{,}216=0{,}034\,56$.

(b) Il y en a $\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$.

(c) Les 10 chemins ont tous la probabilité 0,034 56, donc $P(X=2)=10\times 0{,}034\,56=0{,}345\,6$.

(d) Ce chemin a 3 succès et 2 échecs : $0{,}4^3\times 0{,}6^2=0{,}064\times 0{,}36=0{,}023\,04$.

(e) $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10$, donc $P(X=3)=10\times 0{,}4^3\times 0{,}6^2=0{,}230\,4$.

(f) $P(X=4)=\binom{5}{4}\times 0{,}4^4\times 0{,}6^1=5\times 0{,}025\,6\times 0{,}6=0{,}076\,8$.

Ex. 24 ★★☆ **Un sachet de graines**

(a) Pour chaque graine, l'épreuve a deux issues : succès « la graine germe », de probabilité $p=0{,}85$, ou échec. On répète 12 fois cette épreuve de façon identique et indépendante : c'est un schéma de Bernoulli. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}85)$.

(b) $P(X=10)=\binom{12}{10}\times 0{,}85^{10}\times 0{,}15^2=66\times 0{,}85^{10}\times 0{,}15^2\approx 0{,}292$. Exactement 10 graines germent dans environ 29 % des sachets.

(c) $P(X=12)=0{,}85^{12}\approx 0{,}142$ (un seul chemin). Toutes les graines germent dans environ 14 % des sachets.

(d) « Exactement 3 ne germent pas » signifie que $12-3=9$ germent : on calcule $P(X=9)=\binom{12}{9}\times 0{,}85^9\times 0{,}15^3=220\times 0{,}85^9\times 0{,}15^3\approx 0{,}172$. Cela arrive dans environ 17 % des sachets.

Ex. 25 ★★☆ **Tirs au but : deux erreurs à corriger**

(a) Non. $0{,}75^6\times 0{,}25^2\approx 0{,}011$ est la probabilité d'un seul chemin à 6 réussites, par exemple $RRRRRR\overline{R}\,\overline{R}$. Hugo a oublié le coefficient $\binom{8}{6}$, donc tous les autres chemins.

(b) Non : elle a inversé les exposants. L'exposant de 0,75 doit être le nombre de réussites. Comme $\binom{8}{6}=\binom{8}{2}$, son calcul vaut $\binom{8}{2}\times 0{,}75^2\times 0{,}25^6=P(X=2)\approx 0{,}004$.

(c) Les tirs sont indépendants, donc chaque chemin à 6 réussites et 2 échecs a la probabilité $0{,}75^6\times 0{,}25^2$. Ces chemins sont incompatibles et il y en a $\binom{8}{6}=28$ (positions des 6 réussites parmi les 8 tirs). En additionnant : $P(X=6)=\binom{8}{6}\times 0{,}75^6\times 0{,}25^2=28\times 0{,}75^6\times 0{,}25^2\approx 0{,}311$. Inès marque exactement 6 fois dans environ 31 % des cas.

Ex. 26 ★★★ **QCM au hasard : démontrer puis comparer**

(a) Chaque question est une épreuve de Bernoulli : le succès est J « la réponse est juste », avec $p=\frac{1}{4}$ (une seule bonne réponse sur 4, choisie au hasard). On répète 6 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}\left(6\,;\frac{1}{4}\right)$.

(b) Un chemin à 2 réponses justes est fixé par les positions des 2 succès parmi les 6 questions. Il y en a $\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$. Les épreuves sont indépendantes, donc chacun de ces chemins (par exemple $JJ\overline{J}\,\overline{J}\,\overline{J}\,\overline{J}$) a pour probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{1}{16}\times\frac{81}{256}=\frac{81}{4096}$.

(c) L'événement $\{X=2\}$ est la réunion de ces 15 chemins. Deux chemins différents sont des issues distinctes, donc incompatibles : on peut additionner leurs probabilités. $P(X=2)=15\times\frac{81}{4096}=\frac{1215}{4096}\approx 0{,}297$. On retrouve bien $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4$.

(d) $\{X=0\}$ ne contient qu'un chemin, celui où toutes les réponses sont fausses : $P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^6=\frac{729}{4096}\approx 0{,}178$. Léo a environ 18 % de chances de n'avoir aucune bonne réponse. De même, $P(X=6)=\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4096}\approx 2{,}4\times 10^{-4}$ (soit 0,000 à 10^{-3} près) : avoir tout juste au hasard est presque impossible.

Ex. 26 **(suite)**

(e) Vrai. Avec 3 réponses, le nombre Y de réponses justes suit $\mathcal{B}\left(6\,;\frac{1}{3}\right)$ (même raisonnement qu'à la première question). $P(Y=2)=\binom{6}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=15\times\frac{1}{9}\times\frac{16}{81}=\frac{80}{243}\approx 0{,}329$. Or $P(X=2)=\frac{1215}{4096}\approx 0{,}297$. Comme $0{,}329>0{,}297$, la probabilité d'avoir exactement 2 réponses justes augmente.

Ex. 27 ★★★ **Contrôle qualité de lampes LED**

(a) On note A, B les machines et D « la lampe est défectueuse ». A et B forment une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales : $P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)=0{,}6\times 0{,}02+0{,}4\times 0{,}05=0{,}012+0{,}02=0{,}032$.

(b) Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : le succès est « la lampe est défectueuse », avec $p=0{,}032$. On répète 15 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise). X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(15\,;0{,}032)$.

(c) Il faut calculer $P(X=0)$. Un seul chemin réalise cet événement : 15 échecs. $P(X=0)=(1-0{,}032)^{15}=0{,}968^{15}\approx 0{,}614$. Il y a environ 61 % de chances que le prélèvement ne contienne aucune lampe défectueuse.

(d) $P(X=2)=\binom{15}{2}\times 0{,}032^2\times 0{,}968^{13}$, avec $\binom{15}{2}=\frac{15\times 14}{2}=105$. L'exposant de 0,968 est le nombre d'échecs, $15-2=13$. $P(X=2)=105\times 0{,}001\,024\times 0{,}968^{13}\approx 0{,}070$. Environ 7 % des prélèvements contiennent exactement 2 lampes défectueuses.

(e) Le lot est refusé si $X\geqslant 2$. $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$, avec $P(X=1)=\binom{15}{1}\times 0{,}032\times 0{,}968^{14}=0{,}48\times 0{,}968^{14}\approx 0{,}3044$. On calcule avec les valeurs exactes : $P(X\geqslant 2)=1-0{,}968^{15}-0{,}48\times 0{,}968^{14}\approx 0{,}082$. Environ 8 % des lots sont refusés.

Ex. 28 ★★★ **Tir à l'arc et programme Python**

(a) La fonction renvoie $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, donc `proba(10, 0.35, 4)` est $P(X=4)$: la probabilité que Maël touche exactement 4 fois le centre en 10 flèches. $P(X=4)=\binom{10}{4}\times 0{,}35^4\times 0{,}65^6=210\times 0{,}35^4\times 0{,}65^6\approx 0{,}2377$.

Ex. 28 **(suite)**

(b) `kmax` part de 0. Pour chaque k de 1 à 10, si $P(X=k)$ dépasse $P(X=\text{kmax})$, alors `kmax` prend la valeur k. La fonction renvoie donc la valeur de k pour laquelle $P(X=k)$ est la plus grande. On trouve $P(X=0)\approx 0{,}0135$, $P(X=1)\approx 0{,}0725$, $P(X=2)\approx 0{,}1757$, $P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0{,}35^3\times 0{,}65^7\approx 0{,}2522$, $P(X=4)\approx 0{,}2377$ et $P(X=5)\approx 0{,}1536$. De plus, $P(X\geqslant 6)=1-P(X\leqslant 5)\approx 0{,}0949<0{,}2522$, donc chaque $P(X=k)$ avec $k\geqslant 6$ est plus petite que $P(X=3)$. La fonction renvoie 3 : le nombre de centres le plus probable sur une série est 3.

(c) Vrai. $P(Y=6)=\binom{10}{6}\times 0{,}65^6\times 0{,}35^4$ et $P(X=4)=\binom{10}{4}\times 0{,}35^4\times 0{,}65^6$. Par symétrie, $\binom{10}{6}=\binom{10}{4}$, et les facteurs sont les mêmes. Interprétation : Y compte les flèches manquées. « 6 flèches manquées » est le même événement que « 4 centres ».

(d) Les deux séries sont indépendantes. On note X_1 et X_2 les nombres de centres de chaque série, de même loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}35)$. La probabilité cherchée vaut $P(X_1=3)\times P(X_2=3)=\left(\binom{10}{3}\times 0{,}35^3\times 0{,}65^7\right)^2$. On garde la valeur exacte avant d'élever au carré : on obtient environ 0,0636.

5. *Calculer $P(X\leqslant k)$, $P(X\geqslant k)$ et $P(a\leqslant X\leqslant b)$*

Ex. 29 ★☆☆ **Traduire les mots en X**

(a) L'événement est $\{X\geqslant 5\}$. Son contraire est $\{X\leqslant 4\}$, donc $P(X\geqslant 5)=1-P(X\leqslant 4)$, et non $1-P(X\leqslant 5)$.

(b) « Plus de 5 » est strict : l'événement est $\{X>5\}=\{X\geqslant 6\}$, donc $P(X>5)=1-P(X\leqslant 5)$.

(c) L'événement est $\{X\leqslant 3\}$. Sa probabilité est directement $P(X\leqslant 3)$.

(d) L'événement est $\{3\leqslant X\leqslant 7\}$, donc sa probabilité est $P(X\leqslant 7)-P(X\leqslant 2)$. On retire $P(X\leqslant 2)$ et non $P(X\leqslant 3)$, sinon on perd $P(X=3)$.

(e) Le nombre de lancers manqués est $15-X$. On a $15-X\geqslant 13$ si et seulement si $X\leqslant 2$, donc la probabilité est $P(X\leqslant 2)$.

(f) L'événement est $\{X\geqslant 1\}$. Son contraire est $\{X=0\}$, donc $P(X\geqslant 1)=1-0{,}7^{15}\approx 0{,}995$.

Ex. 30 ★☆☆ Lire un extrait de table

(a) On lit directement la table : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}867$.

(b) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}677 = 0{,}323$.

(c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}867 = 0{,}133$.

(d) $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}989 - 0{,}392 = 0{,}597$.

(e) $P(X = 4) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 3) \approx 0{,}957 - 0{,}867 = 0{,}090$.

(f) $X < 2$ équivaut à $X \leqslant 1$, donc $P(X < 2) = P(X \leqslant 1) \approx 0{,}392$.

Ex. 31 ★★☆ Contrôle de capsules

(a) On appelle succès « la capsule est défectueuse », avec $p = 0{,}05$. On répète 8 fois cette épreuve de Bernoulli, de façon identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise). X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}05)$.

(b) Le lot est refusé quand $X \geqslant 2$. Le contraire de cet événement est $X \leqslant 1$. Malik retire aussi $P(X = 2)$, ce qui est une erreur. La bonne expression est $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$.

(c) $P(X = 0) = 0{,}95^8$ et $P(X = 1) = 8 \times 0{,}05 \times 0{,}95^7$. Donc $P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}95^8 - 8 \times 0{,}05 \times 0{,}95^7 \approx 0{,}057$. Environ 5,7 % des lots sont refusés.

(d) Faux : $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}057 < 0{,}1$. On refuse environ 6 lots sur 100, donc moins d'un lot sur dix. Avec sa formule fausse, Malik aurait trouvé environ 0,006.

Ex. 32 ★★☆ QCM au hasard

(a) L'événement est $\{X \geqslant 6\}$, donc $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}946 = 0{,}054$. Yanis a environ 5,4 % de chances d'avoir la moyenne.

(b) L'événement est $\{3 \leqslant X \leqslant 6\}$, donc $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}986 - 0{,}391 = 0{,}595$.

(c) « Plus de 7 » est strict : $P(X > 7) = 1 - P(X \leqslant 7) \approx 1 - 0{,}997 = 0{,}003$. Obtenir 8 bonnes réponses ou plus en répondant au hasard est presque impossible (environ 3 chances sur 1 000).

(d) Si on exige k bonnes réponses, la probabilité d'avoir la moyenne est $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$, qui diminue quand k augmente. Pour $k = 6$: $\approx 0{,}054 \geqslant 0{,}05$. Pour $k = 7$: $1 - 0{,}986 = 0{,}014 < 0{,}05$. Il faut donc exiger au minimum 7 bonnes réponses.

Ex. 33 ★★★ Série de lancers francs

(a) Chaque tir est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « Lou marque », avec $p = 0{,}8$. On répète 10 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}8)$.

(b) « Au moins 8 » s'écrit $X \geqslant 8$. Son contraire est $X \leqslant 7$, et non $X \leqslant 8$: Maël retire $P(X = 8)$ en trop (son calcul donne $P(X > 8) \approx 0{,}376$). Le bon calcul est $P(X \geqslant 8) = 1 - P(X \leqslant 7) \approx 1 - 0{,}322 = 0{,}678$.

(c) $P(6 \leqslant X \leqslant 9) = P(X \leqslant 9) - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}893 - 0{,}033 = 0{,}860$. Attention : on retire $P(X \leqslant 5)$ et non $P(X \leqslant 6)$, sinon on perd $X = 6$.

(d) Lou rate $10 - X$ lancers. Rater plus de 3 lancers, c'est $10 - X > 3$, soit $X < 7$, donc $X \leqslant 6$. On lit $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}121$.

(e) Rater au moins un lancer, c'est ne pas tout réussir : $P(X \leqslant 9) = 1 - P(X = 10) = 1 - 0{,}8^{10} \approx 0{,}893$. Sur une série de 10 tirs, il est donc très probable (environ 89 % des cas) que Lou en rate au moins un, même si elle est très adroite.

Ex. 34 ★★★ Donneurs de sang au groupe rare

(a) « Au moins un » s'écrit $X \geqslant 1$. Son contraire est $X = 0$. Donc $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}98^{30} \approx 0{,}455$.

(b) $P(X = 2) = \binom{30}{2} \times 0{,}02^2 \times 0{,}98^{28} = 435 \times 0{,}0004 \times 0{,}98^{28} \approx 0{,}099$.

(c) $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}98^{30} + 30 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{29} \approx 0{,}545\,48 + 0{,}333\,97 \approx 0{,}879$.

(d) « Plus de 2 » est strict : c'est $X > 2$, de contraire $X \leqslant 2$. Donc $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 1) - P(X = 2) \approx 0{,}022$ (calcul fait sans arrondir les valeurs intermédiaires). Avoir 3 donneurs rares ou plus dans une collecte de 30 est rare : cela arrive environ 2 fois sur 100.

(e) Avec n donneurs, on cherche $1 - 0{,}98^n \geqslant 0{,}99$, soit $0{,}98^n \leqslant 0{,}01$. La fonction ln est croissante, donc $n \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}01)$. Comme $\ln(0{,}98) < 0$, on obtient $n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9$. Il faut donc au minimum 228 donneurs.

Ex. 35 ★★★ Vrai ou faux sur la planche de Galton

(a) Faux. « Au moins 6 » s'écrit $X \geqslant 6$, de contraire $X \leqslant 5$, donc $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5)$. Ici, $P(X \geqslant 6) = \frac{\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}}{2^8} = \frac{28+8+1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0{,}145$, ce qui dépasse 0,1.

(b) Faux. $P(2 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 1) = \frac{28+56+70+56+28}{256} = \frac{238}{256} \approx 0{,}930$. C'est moins que 0,95.

Ex. 35 (suite)

(c) Vrai. $P(X \leqslant 3) = \frac{1+8+28+56}{256} = \frac{93}{256}$ et $P(X \geqslant 5) = \frac{56+28+8+1}{256} = \frac{93}{256}$. Cela vient de la symétrie $\binom{8}{k} = \binom{8}{8-k}$, avec $p = 0{,}5$.

(d) Vrai. Pour une bille, $P(X = 0) + P(X = 8) = \frac{2}{256} = \frac{1}{128}$. Le nombre de billes qui tombent dans une case extrême suit la loi $\mathcal{B}\left(25\,;\frac{1}{128}\right)$. La probabilité qu'au moins une bille tombe dans une case extrême vaut $1 - \left(\frac{127}{128}\right)^{25} \approx 0{,}178$, ce qui dépasse 0,15.

6. *Espérance, variance, écart type*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : espérance, variance, écart type**

(a) $E(X) = np = 40 \times 0{,}15 = 6$.

(b) $V(X) = np(1-p) = 40 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 5{,}1$.

(c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}1} \approx 2{,}26$.

(d) $E(Y) = 15 \times 0{,}5 = 7{,}5$. Non : Y ne prend que des valeurs entières de 0 à 15. 7,5 est le nombre moyen de succès sur un grand nombre de séries, pas une valeur prise par Y.

(e) $E(Z) = 0{,}2n = 14$, donc $n = \frac{14}{0{,}2} = 70$.

(f) $V(W) = 25 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 6$, donc $\sigma(W) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.

Ex. 37 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les paramètres**

(a) Faux. $np(1-p) = 50 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 8$ est la variance. L'écart type vaut $\sigma(X) = \sqrt{8} \approx 2{,}83$.

(b) Vrai. $V = 20p(1-p)$ et $p(1-p) = 0{,}25 - (p-0{,}5)^2 \leqslant 0{,}25$, avec égalité seulement pour $p = 0{,}5$. Le maximum vaut $20 \times 0{,}25 = 5$.

(c) Vrai. $\frac{V(X)}{E(X)} = 1 - p = \frac{3}{4}$, donc $p = 0{,}25$, puis $n = \frac{E(X)}{p} = \frac{4}{0{,}25} = 16$.

(d) Faux. $V(X) = 10 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 2{,}275$ et $V(Y) = 40 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 9{,}1 = 4V(X)$.
Donc $\sigma(Y) = \sqrt{4V(X)} = 2\sigma(X)$: c'est la variance qui est multipliée par 4, pas l'écart type. On a $\sigma(X) \approx 1{,}51$ et $\sigma(Y) \approx 3{,}02$.

(e) Faux. $V(X) = 10 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 2{,}4$. Comme $V(aX) = a^2V(X)$, on a $V(3X) = 9 \times 2{,}4 = 21{,}6$, alors que $3V(X) = 7{,}2$.

Ex. 38 ★★☆ **QCM au hasard et note obtenue**

(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, l'épreuve « répondre à une question ». Le succès « la réponse est juste » a pour probabilité $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}25)$.

(b) $E(X) = 20 \times 0{,}25 = 5$. Sur un grand nombre de QCM remplis au hasard, Lina obtient en moyenne 5 réponses justes.

(c) Il y a $20 - X$ réponses fausses, donc $N = 2X - 0{,}5(20 - X) = 2{,}5X - 10$. Alors $E(N) = 2{,}5E(X) - 10 = 2{,}5 \times 5 - 10 = 2{,}5$: en moyenne, la note vaut 2,5 points.

(d) $V(X) = 20 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 3{,}75$. Alors $V(N) = 2{,}5^2 \times V(X) = 6{,}25 \times 3{,}75 = 23{,}437\,5$ (le -10 ne change pas la variance, et on multiplie par a^2, pas par a).
Donc $\sigma(N) = \sqrt{23{,}437\,5} \approx 4{,}84$ points.

Ex. 39 ★★☆ **Tir à l'arc : retrouver la loi**

(a) $\frac{V(X)}{E(X)} = 1 - p = \frac{6{,}3}{9} = 0{,}7$, donc $p = 0{,}3$. Puis $n = \frac{E(X)}{p} = \frac{9}{0{,}3} = 30$. X suit $\mathcal{B}(30\,;0{,}3)$.

(b) La plus grande probabilité est $P(X = 9) \approx 0{,}1573$. La valeur la plus probable est donc 9, égale à $E(X) = np = 9$: le maximum de la loi est atteint près de l'espérance.

(c) $6{,}3 = np(1-p)$ est la variance, pas l'écart type. $\sigma(X) = \sqrt{6{,}3} \approx 2{,}51$.

(d) $9 - 2{,}51 = 6{,}49$ et $9 + 2{,}51 = 11{,}51$. Comme X est entière, l'événement s'écrit $7 \leqslant X \leqslant 11$.
Donc $P \approx 0{,}1219 + 0{,}1501 + 0{,}1573 + 0{,}1416 + 0{,}1103 = 0{,}6812$: dans environ 68 % des séries, le nombre de centres s'écarte de la moyenne d'au plus un écart type.

Ex. 40 ★★★ **Valeur la plus probable d'une loi binomiale**

(a) Chaque appel est une épreuve de Bernoulli. Le succès S est « le client signe », de probabilité $p = 0{,}35$. On répète 12 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante, et X compte les succès.
Donc X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}35)$. $E(X) = 12 \times 0{,}35 = 4{,}2$, puis $V(X) = 12 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 2{,}73$ et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}73} \approx 1{,}652$. Attention : 2,73 est la variance, pas l'écart type.

(b) $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{12}{k+1}}{\binom{12}{k}} \times \frac{0{,}35^{k+1} \times 0{,}65^{11-k}}{0{,}35^k \times 0{,}65^{12-k}} = \frac{\binom{12}{k+1}}{\binom{12}{k}} \times \frac{0{,}35}{0{,}65}$. Or $\frac{\binom{12}{k+1}}{\binom{12}{k}} = \frac{12!}{(k+1)!\,(11-k)!} \times \frac{k!\,(12-k)!}{12!} = \frac{12-k}{k+1}$ et $\frac{0{,}35}{0{,}65} = \frac{35}{65} = \frac{7}{13}$.
On obtient bien la formule.

Ex. 40 **(suite)**

(c) Les probabilités sont strictement positives, donc $P(X=k+1) > P(X=k)$ équivaut à un quotient >1, soit $7(12-k) > 13(k+1)$. Cela donne $84-7k > 13k+13$, soit $71 > 20k$, donc $k < 3{,}55$: $k \in \{0;1;2;3\}$. Le quotient ne vaut jamais 1, car $20k = 71$ n'a pas de solution entière. Les probabilités augmentent de $k=0$ à $k=4$, puis diminuent. La valeur la plus probable est donc 4, proche de $E(X) = 4{,}2$. Vérification : pour $k=3$, le quotient vaut $\frac{63}{52} > 1$; pour $k=4$, il vaut $\frac{56}{65} < 1$.

(d) $P(X=4) = \binom{12}{4} \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^8 = 495 \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^8 \approx 0{,}237$. Inès se trompe : X ne prend que des valeurs entières, donc 4,2 contrats n'arrive jamais. $E(X) = 4{,}2$ veut dire que sur un très grand nombre de journées, Inès signe en moyenne 4,2 contrats par jour. Même la valeur la plus probable, 4, n'arrive qu'environ une journée sur quatre.

Ex. 41 ★★★ **Gain d'un livreur : variance d'un gain affine**

(a) Chaque livraison est une épreuve de Bernoulli. Le succès S est « le colis arrive à l'heure », de probabilité $p = 0{,}9$. On répète 30 fois cette épreuve, de façon identique et indépendante, et X compte les succès. Donc X suit $\mathcal{B}(30;0{,}9)$. $E(X) = 30 \times 0{,}9 = 27$ et $V(X) = 30 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 2{,}7$.

(b) Il y a $30 - X$ colis en retard, donc $G = 2X - 5(30-X) = 7X - 150$. Par linéarité, $E(G) = 7E(X) - 150 = 7 \times 27 - 150 = 39$. Sur un très grand nombre de journées, Hugo gagne en moyenne 39 € par jour. Ce n'est pas un gain garanti chaque jour.

(c) Première erreur : on ne multiplie pas par a mais par a^2. Comme $V(aX+b) = a^2V(X)$, on a $V(G) = 7^2 \times 2{,}7 = 132{,}3$ (et $b=-150$ ne change pas la variance). Seconde erreur : l'écart type est la racine carrée de la variance, donc $\sigma(G) = \sqrt{132{,}3} \approx 11{,}50$ €. On retrouve $7\sigma(X) = 7\sqrt{2{,}7} \approx 11{,}50$.

(d) On a maintenant $G = 2X - m(30-X)$, donc $E(G) = 2 \times 27 - m \times (30-27) = 54 - 3m$. Puis $54 - 3m \geqslant 45 \iff 3m \leqslant 9 \iff m \leqslant 3$. La plus grande pénalité possible est donc $m = 3$ €. Le gain moyen vaut alors exactement 45 €.

Ex. 42 ★★★ **Variance maximale et réglage du paramètre**

(a) f est dérivable et $f(p) = p - p^2$, donc $f'(p) = 1 - 2p$. On a $f'(p) > 0$ sur $]0;0{,}5[$ et $f'(p) < 0$ sur $]0{,}5;1[$. Donc f est croissante puis décroissante, avec un maximum $f(0{,}5) = 0{,}25$. Comme $V(X) = 400f(p)$, la plus grande variance est $400 \times 0{,}25 = 100$, atteinte pour $p = 0{,}5$. Le plus grand écart type est alors $\sqrt{100} = 10$: c'est pour $p = 0{,}5$ que le nombre de réclamations est le plus dispersé.

(b) Attention : 8 est l'écart type, pas la variance. On a $V(X) = \sigma(X)^2 = 64$, donc $400p(1-p) = 64$, soit $p(1-p) = 0{,}16$ et $p^2 - p + 0{,}16 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$, d'où $p = \frac{1-0{,}6}{2} = 0{,}2$ ou $p = \frac{1+0{,}6}{2} = 0{,}8$. Comme $p < 0{,}5$, on garde $p = 0{,}2$.

(c) $E(X) = 400 \times 0{,}2 = 80$: sur un très grand nombre de journées, il y a en moyenne 80 réclamations par jour. L'écart vaut $95 - 80 = 15$ et $2\sigma(X) = 2 \times 8 = 16$. Comme $15 < 16$, l'écart reste inférieur à deux écarts types : cette journée n'a rien d'exceptionnel.

(d) $\sigma(X) \leqslant 6 \iff V(X) \leqslant 36$ (car les deux membres sont positifs), soit $400p(1-p) \leqslant 36$. Cela donne $p(1-p) \leqslant 0{,}09$, soit $p^2 - p + 0{,}09 \geqslant 0$. On a $\Delta = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, et les racines sont $\frac{1-0{,}8}{2} = 0{,}1$ et $\frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}9$. Le trinôme est positif à l'extérieur des racines.
Donc $p \in]0;0{,}1] \cup [0{,}9;1[$: il faut que p soit éloigné de 0,5.

7. *Seuils, intervalles, simulation : problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : nombre minimal d'épreuves**

(a) Première erreur : $\ln 0{,}8 < 0$, donc la division change le sens de l'inégalité : $n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$. Seconde erreur : il faut arrondir à l'entier supérieur, donc $n = 21$.
Contrôle : $0{,}8^{20} \approx 0{,}0115 > 0{,}01$ et $0{,}8^{21} \approx 0{,}0092 \leqslant 0{,}01$.

(b) $1 - 0{,}96^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}96^n \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}96 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}96} \approx 112{,}8$ (on divise par $\ln 0{,}96 < 0$).
Donc $n = 113$.

(c) Sur n tirs, $P(\text{au moins une fois}) = 1 - 0{,}85^n$. $1 - 0{,}85^n \geqslant 0{,}9 \iff 0{,}85^n \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \approx 14{,}2$ (le sens change car $\ln 0{,}85 < 0$). Il lui faut au moins 15 tirs.

Ex. 43 (suite)

(d) $0{,}75^n \leqslant 0{,}001 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}75} \approx 24{,}01$, donc $n = 25$, et non 24 : $0{,}75^{24} \approx 0{,}001\,003 > 0{,}001$.

(e) Faux : $1 - 0{,}98^{200} \approx 0{,}982 < 0{,}99$. Il faut $n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}98} \approx 227{,}9$, donc au moins 228 épreuves.

Ex. 44 ★☆☆ Automatismes : planche de Galton et extrait de table

(a) $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}986 < 0{,}99$ et $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}996 \geqslant 0{,}99$. Comme la suite des $P(X \leqslant k)$ est croissante, $k = 10$.

(b) $P(X \leqslant 7) \approx 0{,}898 < 0{,}9$: cette valeur est proche de 0,9, mais en dessous. Et $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}959 \geqslant 0{,}9$, donc $k = 8$.

(c) $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}617 = 0{,}383$.

(d) $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}898 - 0{,}091 = 0{,}807$.

(e) 2 est inclus, donc on retranche $P(X \leqslant 1)$ et non $P(X \leqslant 2)$: $P(2 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}898 - 0{,}024 = 0{,}874$. Comme $0{,}874 < 0{,}9$, l'affirmation de Léa est fausse.

Ex. 45 ★★☆ Surréservation au restaurant

(a) On répète 17 fois, de façon identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « une réservation ». Son succès, « la réservation est honorée », a la probabilité $p = 0{,}9$. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(17\,;0{,}9)$.

(b) Il manque au moins une table si $X \geqslant 16$. $P(X \geqslant 16) = P(X = 16) + P(X = 17) = \binom{17}{16} \times 0{,}9^{16} \times 0{,}1 + 0{,}9^{17} \approx 0{,}315 + 0{,}167 \approx 0{,}482$. Presque un soir sur deux, au moins un client est refusé.

(c) $E(X) = 17 \times 0{,}9 = 15{,}3$. Sur un grand nombre de soirs, il y a en moyenne 15,3 réservations honorées par soir, un peu plus que les 15 tables.

(d) Au moins une table reste vide si $X \leqslant 14$. $P(X = 15) = \binom{17}{15} \times 0{,}9^{15} \times 0{,}1^2 = 136 \times 0{,}9^{15} \times 0{,}01 \approx 0{,}280$. Donc $P(X \leqslant 14) = 1 - P(X = 15) - P(X = 16) - P(X = 17) \approx 1 - 0{,}280 - 0{,}315 - 0{,}167 = 0{,}238$. Environ un soir sur quatre, au moins une table reste vide.

Ex. 46 ★★☆ Contrôle qualité : de l'arbre au programme

(a) D'après l'arbre (A ou B, puis D ou $\overline{D}$) et la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$.

(b) $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}032}{0{,}05} = 0{,}64$: 64 % des capteurs défectueux viennent de la chaîne B.

(c) Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli dont le succès, « le capteur est défectueux », a la probabilité $p = 0{,}05$. On la répète 50 fois, de façon identique et indépendante (tirages avec remise), donc X suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}05)$. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{50} \approx 0{,}923$.

(d) La boucle ajoute à `F` les $P(X = k)$ successives : à chaque test, `F` vaut $P(X \leqslant k)$. Avant-dernier test : $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}896 < 0{,}95$, la boucle continue. Puis $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}962 \geqslant 0{,}95$: elle s'arrête et la fonction renvoie 5. C'est le plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$: dans au moins 95 % des prélèvements de 50 capteurs, il y a au plus 5 capteurs défectueux.

Ex. 47 ★★★ Autotest d'allergie : de l'arbre à la règle de décision

(a) Formule des probabilités totales avec la partition A, $\overline{A}$: $P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T) = 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}15 = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3$. Puis $P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6$. Seulement 60 % des personnes testées positives sont allergiques : un test positif ne suffit pas à conclure.

(b) Chaque test est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « le test est positif », de probabilité $p = P(T) = 0{,}3$. On répète 20 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, puisque les tirages sont assimilés à des tirages avec remise. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}3)$. $E(X) = 20 \times 0{,}3 = 6$: sur un grand nombre de séries de 20 tests, on obtient en moyenne 6 tests positifs par série.

(c) La suite des $P(X \leqslant k)$ est croissante. $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}035 \leqslant 0{,}05$ et $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}107 > 0{,}05$, donc $a = 3$. $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}887 < 0{,}95$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}952 \geqslant 0{,}95$, donc $b = 9$. Ensuite, $P(3 \leqslant X \leqslant 9) = P(X \leqslant 9) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}952 - 0{,}035 = 0{,}917$. On a bien $0{,}917 \geqslant 0{,}9$.

Ex. 47 **(suite)**

(d) 11 n'est pas dans $[3\,;9]$, donc le pharmacien signale le lot. Si les tests fonctionnent normalement, $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0{,}952 = 0{,}048$: un tel résultat est rare. La décision peut quand même être fausse : avec cette règle, ce risque d'erreur est au plus égal à 0,1.

(e) Une personne testée est à la fois allergique et positive avec la probabilité $P(A \cap T) = 0{,}18$, indépendamment des autres. Sur n personnes, le nombre Y de ces cas suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}18)$ et $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}82^n$. On résout : $1 - 0{,}82^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}82^n \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}82 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}82} \approx 23{,}2$. Le sens change car on divise par $\ln 0{,}82 < 0$. Comme n est entier, on arrondit à l'entier supérieur : $n = 24$. Contrôle : $0{,}82^{23} \approx 0{,}0104 > 0{,}01$ et $0{,}82^{24} \approx 0{,}0085 \leqslant 0{,}01$. Il faut tester au moins 24 personnes.

Ex. 48 ★★★ **Hydravion : surréservation et nombre de places**

(a) Chaque réservation est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « le client se présente », de probabilité $p = 0{,}8$. On répète 20 fois cette épreuve de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}8)$. $P(X = 19) = \binom{20}{19} \times 0{,}8^{19} \times 0{,}2 = 4 \times 0{,}8^{19} \approx 0{,}058$ et $P(X = 20) = 0{,}8^{20} \approx 0{,}012$. Il y a surréservation si $X \geqslant 19$: $P(X \geqslant 19) = P(X = 19) + P(X = 20) \approx 0{,}069$.

(b) Tous les clients présents embarquent si $X \leqslant 18$. Or $P(X \leqslant 18) \approx 0{,}931 < 0{,}95$: le directeur a tort, car 0,931 est en dessous de 0,95. La suite des $P(X \leqslant k)$ est croissante, et $P(X \leqslant 18) \approx 0{,}931 < 0{,}95 \leqslant P(X \leqslant 19) \approx 0{,}988$.
Donc $k = 19$: il faudrait 19 places pour que tous les présents embarquent dans au moins 95 % des vols.

(c) $R = 0$ si $X \leqslant 18$, $R = 1$ si $X = 19$, et $R = 2$ si $X = 20$. D'où $P(R = 0) \approx 0{,}931$, $P(R = 1) \approx 0{,}058$ et $P(R = 2) \approx 0{,}012$. $E(R) = 1 \times P(X = 19) + 2 \times P(X = 20) = 4 \times 0{,}8^{19} + 2 \times 0{,}8^{20} \approx 0{,}081$. Sur 100 vols, environ 8 clients au total sont refusés.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Avec 18 réservations ou moins, il n'y a aucun risque. Avec 19 réservations, le nombre Z de présents suit $\mathcal{B}(19\,;0{,}8)$. Il y a surréservation si $Z = 19$, et $P(Z = 19) = 0{,}8^{19} \approx 0{,}014 \leqslant 0{,}02$. Avec 20 réservations, $P(X \geqslant 19) \approx 0{,}069 > 0{,}02$, et le risque augmente encore si l'on accepte plus de réservations. La compagnie accepte donc au plus 19 réservations.

Ex. 49 ★★★ **QCM au hasard : simuler, puis fixer une note minimale**

(a) `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$. Le test `random() < 0.25` est donc vrai avec la probabilité 0,25 : il simule le succès « Noé répond juste ». La boucle répète 12 fois cette épreuve de Bernoulli, de façon identique et indépendante, et `n` compte les succès. La valeur renvoyée simule donc X, qui suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}25)$. $E(X) = 12 \times 0{,}25 = 3$: en répondant au hasard, on obtient en moyenne 3 bonnes réponses sur 12.

(b) Un compteur `c` augmente de 1 à chaque note supérieure ou égale à 6 :

```
def freq(N):
    c = 0
    for j in range(N):
        if note() >= 6:
            c = c + 1
    return c / N
```

(c) $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}946 = 0{,}054$. Chaque appel simule 1000 nouvelles copies au hasard. La fréquence observée change donc d'une simulation à l'autre et fluctue autour de la probabilité 0,054, sans lui être égale. En général, plus N est grand, plus elle s'en rapproche.

(d) Pendant la boucle, `Q` contient $P(X \geqslant m)$. $P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6) \approx 1 - 0{,}986 = 0{,}014 \leqslant 0{,}05$, donc la boucle continue. $P(X \geqslant 6) \approx 0{,}054 > 0{,}05$, donc la boucle s'arrête avec $m = 6$. Mais 6 ne convient pas : Mia a tort. La note cherchée est 7, car $P(X \geqslant 6) > 0{,}05 \geqslant P(X \geqslant 7)$. Il faut remplacer la dernière ligne par `return m + 1`. Il faut donc exiger au moins 7 sur 12.