Terminale maths complémentaires / Loi binomiale

benprof particulier.fr

42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Épreuve, loi et schéma de Bernoulli, arbre pondéré*

À retenir : Bernoulli : $E = p$, $V = p(1-p)$. Schéma : n épreuves à deux issues, identiques et indépendantes (pas de tirage sans remise dans une petite urne). Un chemin à k succès vaut $p^k(1-p)^{n-k}$; on additionne les chemins. Au moins un : $1-(1-p)^n$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : variable de Bernoulli** — Donne les valeurs exactes.

(a) On lance un dé équilibré à six faces. X vaut 1 si on obtient 5 ou 6, et 0 sinon. Donne la loi de X dans un tableau.

(b) Une roue a un secteur bleu de $108°$, le reste est rouge. X vaut 1 si la roue s'arrête sur le bleu. Tom affirme : « deux issues, donc $P(X=1)=\frac{1}{2}$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

(c) X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,42. Calcule $E(X)$.

(d) X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,42. Léo écrit $V(X) = 0{,}42^2$. Corrige-le et calcule $V(X)$.

(e) Y suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,36. Calcule $\sigma(Y)$.

(f) Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $p < 0{,}5$ avec $V(Z) = 0{,}16$. Trouve p.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : chemins d'un arbre pondéré** — Une archère touche la cible avec la probabilité 0,65 à chaque tir, de façon indépendante. Elle tire 4 flèches. S : « la flèche touche la cible ». À chaque nœud de l'arbre, la branche S porte 0,65. Donne les valeurs exactes.

(a) Quelle probabilité porte chaque branche $\overline{S}$? Justifie.

(b) Combien l'arbre compte-t-il de chemins ?

(c) Calcule la probabilité du chemin $S\,\overline{S}\,S\,S$.

(d) Liste les chemins qui comportent exactement 3 succès. Combien y en a-t-il ?

(e) Calcule la probabilité que l'archère touche la cible exactement 3 fois.

(f) Calcule la probabilité qu'elle ne touche jamais la cible.

Ex. 3 ★★☆ **Schéma de Bernoulli ou pas ?** — Pour chaque situation, dis si c'est un schéma de Bernoulli et justifie. Si c'en est un, donne le succès, n et p.

(a) Une urne contient 10 boules : 3 rouges et 7 noires. Elias tire 4 boules successivement avec remise. Le succès est « la boule est rouge ».

(b) Avec la même urne, Elias tire successivement 2 boules sans remise.

(c) À Toulouse, 12 % des 500 000 habitants vont au travail à vélo. On interroge 50 habitants pris au hasard.

(d) Sacha joue 3 parties d'échecs. Il gagne la première avec la probabilité 0,5, puis chaque partie avec 0,6 s'il a gagné la précédente, 0,3 sinon.

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs de Hugo** — Hugo joue 5 manches d'un jeu en ligne. Il gagne chaque manche avec la probabilité 0,15, de façon indépendante d'une manche à l'autre. Arrondis au millième.

(a) Justifie que la situation est un schéma de Bernoulli. Précise le succès et sa probabilité.

(b) Hugo écrit $P(\text{aucune victoire}) = 1 - 0{,}15^5$. Explique son erreur, puis calcule cette probabilité correctement.

(c) Il écrit ensuite $P(\text{au moins une victoire}) = 5 \times 0{,}15 = 0{,}75$. A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(d) Calcule la probabilité qu'Hugo gagne seulement la première manche, puis celle qu'il gagne exactement une manche. Compare.

Ex. 5 ★★☆ **Le stand de fléchettes d'Annecy** — À la fête d'Annecy, Chloé paie 2 € pour lancer une fléchette. Si elle touche le centre, ce qui arrive avec la probabilité 0,1, elle reçoit 15 €. Sinon, elle ne reçoit rien.

(a) On note X la variable qui vaut 1 si Chloé touche le centre et 0 sinon. Donne sa loi, $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Le gain algébrique de Chloé est $G = 15X - 2$. Calcule $E(G)$ et interprète le résultat.

(c) Calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$.

(d) Quelle somme le stand devrait-il verser au lieu de 15 € pour que le jeu soit équitable ?

Ex. 6 ★★★ **Les feux de Nadia à Rennes** — À Rennes, Nadia va au lycée à vélo et passe 3 feux. À son arrivée, chaque feu est vert avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres feux. On note S : « le feu est vert ». Donne les valeurs exactes.

(a) Justifie que la situation est un schéma de Bernoulli : nomme le succès et donne n et p. Décris l'arbre pondéré : niveaux, nombre de chemins, probabilités des branches.

(b) Calcule la probabilité que les deux premiers feux soient verts et le troisième non, dans cet ordre.

(c) Calcule la probabilité que Nadia trouve exactement 2 feux verts.

(d) Malik affirme : « $P(\text{au moins un feu vert}) = 1 - 0{,}4^3$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis donne la bonne valeur.

(e) Z vaut 1 si les 3 feux sont rouges, et 0 sinon. Donne la loi de Z, puis $E(Z)$ et $V(Z)$.

Ex. 7 ★★★ **Avec ou sans remise à la kermesse de Colmar** — À la kermesse de Colmar, une boîte contient 8 tickets, dont 2 gagnants. Théo tire 2 tickets au hasard. Donne les valeurs exactes, puis arrondis au millième si besoin.

(a) Théo remet chaque ticket dans la boîte avant le tirage suivant. Justifie qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli, puis calcule la probabilité d'obtenir au moins un ticket gagnant.

(b) Cette fois, Théo garde le premier ticket. Explique pourquoi ce n'est plus un schéma de Bernoulli. À l'aide d'un arbre, calcule la probabilité d'obtenir au moins un ticket gagnant.

(c) Quelle façon de tirer est la plus favorable à Théo ? Justifie avec tes résultats.

(d) La tombola de la ville compte 20 000 tickets, dont 5 000 gagnants. Théo en achète 4. Justifie qu'on peut utiliser un schéma de Bernoulli, puis liste les chemins à exactement 2 gagnants.

(e) Dans la situation précédente, calcule la probabilité que Théo ait exactement 2 tickets gagnants, puis la probabilité qu'il n'en ait aucun.

2. *Coefficients binomiaux et triangle de Pascal*

À retenir : $\binom{n}{k}$ = nombre de chemins à k succès, pas une probabilité. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Ligne n (dès $n = 0$, rang $k = 0$) : somme 2^n. Ex. : $\binom{9}{2} = 36 \neq 9 \times 2$.

Ex. 8 ★★★ **Automatismes : valeurs à connaître et symétrie** — Donne chaque valeur sans calculatrice, en citant la propriété utilisée.

(a) Donne $\binom{9}{0}$.

(b) Donne $\binom{9}{9}$.

(c) Donne $\binom{11}{1}$.

(d) Donne $\binom{14}{13}$.

(e) Sachant que $\binom{16}{5} = 4\,368$, donne $\binom{16}{11}$.

(f) Donne l'entier k différent de 4 tel que $\binom{13}{k} = \binom{13}{4}$.

Ex. 9 ★★★ **Automatismes : lire et compléter le triangle** — Voici la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

(a) Lis $\binom{7}{3}$ dans cette ligne.

(b) Le troisième terme de la ligne vaut 21. Écris-le sous la forme d'un coefficient binomial.

(c) Combien de chemins d'un arbre à 7 épreuves comportent exactement 6 succès ?

(d) Écris la ligne $n = 8$ du triangle à partir de la ligne 7.

(e) Donne la somme des termes de la ligne 7 sans les additionner un par un.

Ex. 10 ★★★ **Repérer et corriger l'erreur** — Chaque élève s'est trompé. Explique l'erreur, puis donne le bon résultat. Arrondis au millième si besoin.

(a) Inès écrit : « $\binom{10}{2} = 10 \times 2 = 20$ ».

(b) Hugo écrit : « $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{4}$ ».

(c) Dans un schéma de Bernoulli à 4 épreuves de succès 0,3, Léa écrit : « $\text{P(exactement 2 succès)} = \binom{4}{2} = 6$ ».

(d) Malik affirme : « la ligne 4 du triangle, c'est la quatrième : 1, 3, 3, 1 ».

Ex. 11 ★★★ **Vrai ou faux sur les coefficients** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse. Calculatrice autorisée.

(a) $\binom{20}{18} = 190$.

(b) La somme des termes de la ligne 10 du triangle de Pascal vaut 1 000.

(c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{n}{n-1} = n$.

(d) $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$.

(e) $\binom{12}{0} = 0$, car aucun chemin ne réalise 0 succès.

Ex. 12 ★★☆ **Lancers francs à Lorient** — Théo, basketteur à Lorient, tire 18 lancers francs. Chacun est réussi avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. On représente la situation par un arbre pondéré à 18 niveaux. Calculatrice autorisée ; arrondis au millième.

(a) Combien de chemins de l'arbre comportent exactement 15 réussites ? Utilise la symétrie.

(b) Calcule la probabilité que Théo réussisse exactement 15 lancers.

(c) Combien de chemins de l'arbre comportent au moins 17 réussites ?

(d) Combien de chemins l'arbre compte-t-il en tout ? Justifie avec une propriété du triangle.

Ex. 13 ★★★ **De la ligne 9 à un arbre à 10 épreuves** — Voici la ligne $n = 9$ du triangle de Pascal : 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1. On considère un schéma de Bernoulli à 10 épreuves, de paramètre p, et X le nombre de succès. Arrondis au millième si besoin.

(a) Écris la ligne $n = 10$ à partir de la ligne 9. Combien compte-t-elle de termes ? Justifie le calcul de $\binom{10}{3}$ par la relation de Pascal.

(b) Calcule la somme des termes de la ligne 10. Explique ce résultat en comptant les chemins de l'arbre.

(c) Combien de chemins de l'arbre comportent au moins 8 succès ?

(d) Déduis-en, sans additionner huit termes, le nombre de chemins qui comportent au plus 7 succès.

(e) Clara affirme : « $P(X \geqslant 8) = \frac{56}{1\,024}$ ». Pour quelle valeur de p a-t-elle raison ? Justifie, puis donne cette probabilité.

Ex. 14 ★★★ **Retrouver n et k, regrouper des sommes** — Calculatrice autorisée. Justifie chaque réponse avec une propriété du cours. Arrondis à 10^{-4} si besoin.

(a) On sait que $\binom{n}{n-1} = 17$. Détermine n, puis donne $\binom{n}{n}$ sans calculatrice.

(b) Trouve tous les entiers k tels que $\binom{12}{k} = \binom{12}{5}$. Justifie qu'il n'y en a pas d'autres à l'aide de la ligne 12.

(c) Trouve les deux entiers k tels que $\binom{19}{11} + \binom{19}{12} = \binom{20}{k}$, puis donne la valeur de cette somme.

(d) Écris $\binom{20}{8} + \binom{20}{9} + \binom{21}{10}$ sous la forme d'un seul coefficient binomial, puis donne sa valeur.

(e) Schéma de Bernoulli à 30 épreuves de paramètre 0,35, X le nombre de succès : combien de chemins ont exactement 4 succès ? Donne la probabilité d'un tel chemin, puis $P(X = 4)$.

3. *Reconnaître une loi binomiale et calculer $P(X = k)$*

À retenir : X compte les succès d'une épreuve à deux issues (probabilité p), répétée n fois de façon identique et indépendante : X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Sans remise dans une petite urne : pas binomiale. $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$.

Ex. 15 ★★★ **Automatismes : calculer avec la formule** — Calculatrice autorisée. Donne la valeur exacte, ou l'arrondi au millième si la valeur exacte est trop longue.

(a) X suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$. Calcule la valeur exacte de $P(X = 2)$.

(b) X suit $\mathcal{B}(7\,;0{,}1)$. Calcule $P(X = 0)$.

(c) X suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}3)$. Calcule la valeur exacte de $P(X = 6)$.

(d) X suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}4)$ et $\binom{8}{3} = 56$. Calcule $P(X = 3)$.

(e) X suit $\mathcal{B}(9\,;0{,}2)$. Calcule $P(X \geqslant 1)$.

(f) X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}25)$. Calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Ex. 16 ★★★ **Automatismes : coefficients et chemins** — Réponds sans calculatrice.

(a) La ligne $n = 6$ du triangle de Pascal est : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Calcule $\binom{7}{2}$ et $\binom{7}{3}$ avec la relation de Pascal.

(b) Sachant que $\binom{10}{3} = 120$, donne $\binom{10}{7}$ et justifie.

(c) Donne $\binom{25}{0}$ et $\binom{25}{1}$.

(d) X suit $\mathcal{B}(10\,;0{,}35)$. Écris $P(X = 4)$ sous forme de produit, sans le calculer, en indiquant le bon exposant pour chaque facteur.

(e) Dans un arbre de 4 épreuves où le succès a pour probabilité 0,6, combien de chemins ont exactement 2 succès ? Quelle est la probabilité de chacun d'eux ?

Ex. 17 ★★☆ **Binomiale ou pas ?** — Dans chaque situation, dis si X suit une loi binomiale. Si oui, rédige la justification et donne n, p et le succès. Sinon, explique pourquoi.

(a) Une urne contient 3 boules rouges et 5 noires. On tire successivement 4 boules, sans remise. X est le nombre de boules rouges tirées.

(b) À Strasbourg, 38 % des habitants vont au travail à vélo. On interroge 50 habitants au hasard. X est le nombre de cyclistes interrogés.

(c) On lance 10 fois un dé équilibré. X compte les lancers qui ne donnent pas 6. Calcule aussi $P(X = 10)$, arrondi au millième.

(d) On lance 8 fois un dé équilibré. X est la somme des 8 résultats obtenus.

Ex. 18 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Dans une grande usine de Clermont-Ferrand, 6 % des pièces sont défectueuses. On prélève 25 pièces, ce qu'on assimile à des tirages avec remise. X est le nombre de pièces défectueuses, et X suit $\mathcal{B}(25\,;0{,}06)$. On donne $\binom{25}{2} = 300$ et $\binom{25}{3} = 2300$. Arrondis au millième.

(a) Inès écrit : $P(X=2) = 0{,}06^2 \times 0{,}94^{23}$. Trouve son erreur et calcule la bonne valeur.

(b) Théo calcule $P(X=3)$ avec $2300 \times 0{,}94^3 \times 0{,}06^{22}$ et trouve un nombre presque nul. Explique d'où vient l'erreur, puis calcule la bonne valeur.

(c) Maël affirme : « La probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse vaut $1 - 0{,}06^{25}$. » A-t-il raison ? Justifie, puis calcule cette probabilité.

(d) Zoé écrit : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$. Corrige sa formule, puis calcule $P(X \geqslant 2)$.

Ex. 19 ★★☆ **QCM au hasard** — Un QCM compte 8 questions. Chaque question a 4 réponses, dont une seule est juste. Nadia répond au hasard à chaque question. X est le nombre de bonnes réponses. Arrondis au millième. Voici des valeurs arrondies :

k	P(X = k)
0	0,100
1	0,267
2	0,311
3	0,208
4	0,087

(a) Justifie que X suit une loi binomiale, et précise ses paramètres.

(b) Lis dans le tableau la valeur la plus probable de X. Justifie, sachant que $P(X=k) < 0{,}03$ pour $k \geqslant 5$.

(c) Nadia affirme : « J'ai environ 21 % de chances d'avoir au moins 3 bonnes réponses. » A-t-elle raison ? Justifie, puis calcule cette probabilité.

(d) Calcule $E(X)$ et interprète le résultat.

Ex. 20 ★★★ **Sondage sur la vaccination** — À Rennes, 35 % des habitants sont vaccinés contre la grippe. La population de la ville est très grande. On interroge 12 habitants choisis au hasard. X est le nombre d'habitants vaccinés parmi eux. Tu peux utiliser la calculatrice. Arrondis les probabilités au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale. Précise le succès, n et p.

(b) Calcule la probabilité qu'aucun des 12 habitants interrogés ne soit vacciné.

(c) Calcule la probabilité qu'exactement 4 habitants soient vaccinés. Écris la formule complète.

Ex. 20 (suite)

(d) Y est le nombre d'habitants non vaccinés parmi les 12. Lucas affirme que Y suit lui aussi la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}35)$. A-t-il raison ? Justifie.

(e) Calcule la probabilité qu'au moins 10 des 12 habitants ne soient pas vaccinés.

Ex. 21 ★★★ **Lancers francs simulés** — Sofiane joue au basket à Grenoble. Il réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,85, quels que soient ses autres lancers. Il tire une série de 10 lancers francs. X est le nombre de lancers réussis. Ben simule une série de lancers avec ce programme :

```
import random

def serie():
    x = 0
    for i in range(10):
        if random.random() < 0.85:
            x = x + 1
    return x
```

Tu peux utiliser la calculatrice. Arrondis les probabilités au millième. Voici un extrait de la loi de X :

k	P(X = k)
6	0,040
7	0,130
8	?
9	0,347

(a) Explique ce que simule la fonction `serie`. Justifie que le nombre qu'elle renvoie suit la même loi que X, et donne cette loi.

(b) Calcule la probabilité que Sofiane réussisse ses 10 lancers.

(c) On donne $\binom{10}{2} = 45$. Calcule $P(X=8)$ avec la formule complète, puis complète le tableau.

(d) On admet que $P(X=k) < 0{,}01$ pour $k \leqslant 5$. Donne la valeur la plus probable de X, puis compare-la à $E(X)$.

(e) Le coach affirme : « Sofiane a plus de quatre chances sur cinq de réussir au moins 8 lancers. » A-t-il raison ? Justifie.

4. *Probabilités cumulées : $P(X \leqslant k)$, $P(X \geqslant k)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$*

À retenir : Tout se ramène à « $\leqslant$ » : $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$, $P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1)$. X est entière : $P(X < 4) = P(X \leqslant 3)$. On n'arrondit qu'à la fin.

Ex. 22 ★☆☆ **Traduire avec « ⩽ »** — Léna tire 30 lancers francs. X est le nombre de lancers réussis et X suit la loi $\mathcal{B}(30\,;0{,}45)$. Écris chaque probabilité en n'utilisant que des $P(X \leqslant \ldots)$. Tu ne fais aucun calcul.

(a) Léna réussit au plus 12 lancers.

(b) Léna réussit moins de 9 lancers.

(c) Léna réussit au moins 15 lancers.

(d) Léna réussit strictement plus de 20 lancers.

(e) Léna réussit entre 10 et 18 lancers, bornes comprises.

(f) Léna réussit au moins un lancer.

(g) Léna rate au plus 5 lancers.

Ex. 23 ★☆☆ **Lire une table de probabilités cumulées** — X suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$. La calculatrice donne cet extrait de table, arrondi à 10^{-4} :

k	P(X ⩽ k)
0	0,0282
1	0,1493
2	0,3828
3	0,6496
4	0,8497
5	0,9527
6	0,9894

Avec ce tableau seulement, calcule chaque probabilité à 10^{-3} près.

(a) $P(X \leqslant 4)$ (b) $P(X < 3)$ (c) $P(X \geqslant 5)$

(d) $P(X > 2)$ (e) $P(X = 3)$ (f) $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$

Ex. 24 ★★☆ **Graines en pot : vrai ou faux ?** — Yanis sème 20 graines. Chaque graine ne germe pas avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. X est le nombre de graines qui ne germent pas. On admet que X suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}2)$. Calculatrice autorisée, résultats arrondis au millième. Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « $P(X < 2) = P(X \leqslant 2)$. »

(b) « La probabilité qu'au moins 17 graines germent vaut environ 0,411. »

(c) « $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}370$. »

(d) « $P(2 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 2)$. »

Ex. 25 ★★☆ **QCM au hasard : corriger les erreurs** — Un QCM a 12 questions. Chaque question a 5 réponses, dont une seule est juste. Noé répond à toutes les questions au hasard. X est le nombre de bonnes réponses. Calculatrice autorisée, résultats arrondis au millième sauf mention contraire.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale, dont tu donneras les paramètres.

Ex. 25 (suite)

(b) Maëlys écrit : « $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}442$ ». Trouve son erreur, puis calcule $P(X > 3)$.

(c) Calcule $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$ et arrondis au centième.

(d) Timéo arrondit $P(X \leqslant 4)$ et $P(X \leqslant 1)$ au centième, puis il les soustrait. Quel résultat obtient-il ? Explique l'écart avec ta réponse précédente.

(e) Calcule $E(X)$ et interprète ce nombre.

Ex. 26 ★★☆ **Vaccination à Rennes** — À Rennes, 85 % des habitants sont vaccinés contre la grippe. On interroge 18 habitants au hasard. La population est assez grande pour assimiler ce choix à des tirages avec remise. X est le nombre d'habitants interrogés qui ne sont pas vaccinés. Calculatrice autorisée, résultats arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale. Précise le succès et les paramètres.

(b) Calcule la probabilité que tous les habitants interrogés soient vaccinés.

(c) Calcule la probabilité que moins de 3 habitants interrogés ne soient pas vaccinés.

(d) Calcule la probabilité que le nombre d'habitants non vaccinés soit compris entre 1 et 3, bornes comprises.

(e) Calcule $E(X)$ et interprète ce nombre.

Ex. 27 ★★★ **Contrôle de bougies à Grasse** — Dans une fabrique de bougies de Grasse, 10 % des bougies ont un défaut. On prélève un lot de 20 bougies au hasard. La production est assez grande pour assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. X est le nombre de bougies défectueuses du lot : X suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}1)$. La calculatrice donne cet extrait de table, arrondi à 10^{-4} :

k	P(X ⩽ k)
0	0,1216
1	0,3917
2	0,6769
3	0,8670
4	0,9568
5	0,9887
6	0,9976

Utilise le tableau et donne les résultats à 10^{-4} près.

(a) Le lot est accepté s'il contient au plus 2 bougies défectueuses. Calcule la probabilité qu'il soit accepté, puis la probabilité qu'il contienne strictement plus de 2 bougies défectueuses.

(b) Pour calculer $P(X \geqslant 4)$, Lucas écrit : $1 - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}0432$. Explique son erreur, puis corrige-la.

(c) Y est le nombre de bougies sans défaut du lot. Exprime Y en fonction de X, puis calcule $P(Y \geqslant 17)$ et $P(Y < 15)$.

Ex. 27 **(suite)**

(d) Calcule la probabilité que le lot contienne au moins 2 bougies défectueuses, mais moins de 6.

(e) Ben affirme : « Il y a plus de 85 % de chances qu'au moins une bougie du lot soit défectueuse. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Tirs au but à Lorient** — Au club de football de Lorient, Jade marque chaque tir au but avec la probabilité 0,75. Les tirs sont indépendants les uns des autres. À l'entraînement, elle tire 12 tirs au but. X est le nombre de tirs au but marqués. Calculatrice autorisée ; arrondis les résultats au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres. Calcule ensuite $E(X)$, puis interprète ce résultat.

(b) Calcule $P(X = 9)$ en écrivant la formule complète. Calcule ensuite la probabilité que Jade marque moins de 8 tirs au but.

(c) L'entraîneur affirme : « Jade a plus de 99 % de chances de marquer au moins 5 tirs au but. » A-t-il raison ? Justifie.

(d) Pour la probabilité que Jade marque 9 ou 10 tirs, Hugo écrit : $P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 9) \approx 0{,}842 - 0{,}609 = 0{,}233$. Trouve ses deux erreurs, puis corrige-les.

5. *Espérance, variance, écart type*

À retenir : Si X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$: $E(X) = np$ (une moyenne, pas forcément entière), $V(X) = np(1-p)$, $\sigma = \sqrt{V}$; ex. $\mathcal{B}(10\,;0{,}4)$: $E = 4$, $V = 2{,}4$. $E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$; jeu équitable : $E(G) = 0$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : espérance, variance, écart type** — Arrondis au millième si nécessaire.

(a) X suit $\mathcal{B}(32\,;0{,}35)$. Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

(b) Y suit $\mathcal{B}\left(18\,;\frac{1}{3}\right)$. Calcule les valeurs exactes de $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

(c) B suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,7. Calcule $E(B)$ et $V(B)$.

(d) T suit $\mathcal{B}(9\,;0{,}5)$. Calcule $E(T)$. T peut-il prendre cette valeur ? Justifie.

(e) W suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}02)$. Calcule $V(W)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : variable G = aX + b** — X suit la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}25)$. Donne les valeurs exactes.

(a) Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

(b) On pose $G = 5X - 8$. Calcule $E(G)$.

(c) Lucas écrit : « $V(G) = 5 \times V(X) - 8$ ». Corrige son erreur, puis calcule $V(G)$.

(d) Calcule $\sigma(G)$ et compare-le à $\sigma(X)$.

Ex. 30 **(suite)**

(e) On pose $H = 10 - 2X$. Calcule $E(H)$ et $V(H)$.

Ex. 31 ★☆☆ **Retrouver p ou n** — Dans chaque cas, X suit une loi $\mathcal{B}(n\,;p)$. Utilise $E(X) = np$ et $\frac{V(X)}{E(X)} = 1 - p$.

(a) $E(X) = 12$ et $V(X) = 8{,}4$. Détermine p, puis n.

(b) $E(X) = 6$ et $V(X) = 5{,}4$. Détermine p, puis n.

(c) $n = 50$ et $E(X) = 8$. Détermine p, puis $V(X)$.

(d) Vrai ou faux : « Il existe une loi binomiale avec $E(X) = 5$ et $V(X) = 6$. » Justifie.

(e) $p = 0{,}1$ et $\sigma(X) = 3$. Détermine n, puis $E(X)$.

Ex. 32 ★★☆ **Le stand de dés de Lorient** — À la fête de quartier de Lorient, Camille paie une mise de m euros, puis lance 8 fois un dé équilibré. Chaque « 6 » lui rapporte 3 €. X est le nombre de « 6 » obtenus, G son gain algébrique (gains moins mise). Arrondis au millième si nécessaire.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres. Calcule $E(X)$.

(b) Avec $m = 5$, exprime G en fonction de X, calcule $E(G)$ et interprète ce résultat.

(c) Quelle mise m rend le jeu équitable ?

(d) Avec cette mise, calcule $V(G)$ et $\sigma(G)$.

(e) Avec cette mise, calcule la probabilité que Camille gagne de l'argent ($G > 0$).

Ex. 33 ★★☆ **Deux archers d'Annecy** — Au club de tir à l'arc d'Annecy, Noé tire 30 flèches et touche le centre avec la probabilité 0,6 à chaque tir. Maëlys tire 25 flèches et touche le centre avec la probabilité 0,72 à chaque tir. Les tirs sont indépendants. X et Y comptent leurs flèches au centre. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres. Donne la loi de Y.

(b) Calcule $E(X)$ et $E(Y)$. Interprète $E(X)$ dans le contexte.

(c) Calcule $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Qui a les résultats les plus réguliers ? Justifie.

(d) L'entraîneur affirme : « Noé touchera exactement 18 fois le centre. » A-t-il raison ? Justifie en calculant $P(X = 18)$.

Ex. 34 ★★★ **Le QCM du concours blanc de Bastia** — Au concours blanc d'un lycée de Bastia, un QCM compte 20 questions. Chaque question a 4 réponses, dont une seule est juste. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise retire r points ($r > 0$). Sacha répond au hasard à toutes les questions. X est le nombre de bonnes réponses et N la note obtenue. Calculatrice autorisée ; arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu donneras les paramètres. Calcule $E(X)$, puis interprète ce résultat dans le contexte.

Ex. 34 **(suite)**

(b) Exprime N en fonction de X et de r. Détermine r pour que $E(N) = 0$.

(c) Avec la valeur de r trouvée, calcule $V(N)$ et $\sigma(N)$. Précise l'unité de $\sigma(N)$.

(d) Lina affirme : « Avec ce barème, répondre au hasard donne 0 : on n'a aucune chance d'avoir 4 points ou plus. » A-t-elle raison ? Justifie par un calcul.

Ex. 35 ★★★ **Tirs au but à Rodez** — Au club de football de Rodez, un tir au but est réussi avec la probabilité p ($0 < p < 1$), indépendamment des autres tirs. Y vaut 1 si un tir est réussi, et 0 sinon. Inès réussit avec $p = 0{,}7$, Hugo avec $p = 0{,}9$. À chaque séance, chacun tire 15 fois. Arrondis au millième.

(a) Donne la loi de Y. Montre que $V(Y) = p(1-p)$. Pour quelle valeur de p cette variance est-elle maximale ?

(b) X est le nombre de buts d'Inès en une séance. Justifie que X suit une loi binomiale. Léo dit : « Inès marque exactement $E(X)$ buts à chaque séance. » Calcule $E(X)$, puis corrige Léo.

(c) « Plus un tireur est fort, plus son nombre de buts par séance est dispersé. » Vrai ou faux ? Justifie en comparant l'espérance et l'écart type pour Inès et pour Hugo.

(d) L'entraîneur cherche le plus petit nombre n de tirs pour qu'Inès marque en moyenne au moins 20 buts. Complète la ligne 2, puis donne n.

```
n = 0
while ........ :
    n = n + 1
print(n)
```

6. *Seuils, intervalles de probabilité et simulation*

À retenir : Seuil sur n : $1-(1-p)^n \geqslant s \Leftrightarrow (1-p)^n \leqslant 1-s$; diviser par $\ln(1-p) < 0$ change le sens, puis on prend l'entier au-dessus ($n \geqslant 10{,}3$ donne $n = 11$). Seuil sur k : on cite les deux valeurs du tableau qui encadrent 0,95.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : nombre minimal d'épreuves** — Une épreuve de probabilité de succès p est répétée n fois, de façon identique et indépendante. Calculatrice autorisée.

(a) Avec $p = 0{,}25$, traduis « au moins un succès avec une probabilité d'au moins 0,9 » par une inégalité portant sur $0{,}75^n$.

(b) Résous $0{,}6^n \leqslant 0{,}02$ avec le logarithme népérien, puis donne le plus petit entier n qui convient.

(c) Par essais successifs à la calculatrice, trouve le plus petit entier n tel que $0{,}7^n \leqslant 0{,}01$.

Ex. 36 **(suite)**

(d) Vrai ou faux ? « On a trouvé $n \geqslant 13{,}52$, donc il faut au moins 13 épreuves. » Justifie.

(e) Avec $p = 0{,}05$, combien d'épreuves faut-il au minimum pour obtenir au moins un succès avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de probabilités cumulées** — Inès répond au hasard aux 12 questions d'un QCM. Chaque question a 4 réponses, dont une seule est juste. Le nombre X de bonnes réponses suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}25)$. Sa calculatrice donne :

k	P(X ⩽ k)
2	0,3907
3	0,6488
4	0,8424
5	0,9456
6	0,9857
7	0,9972

Arrondis les résultats au millième.

(a) Donne $P(X \leqslant 4)$.

(b) Calcule $P(X > 5)$.

(c) Calcule $P(X < 4)$.

(d) Calcule $P(X \geqslant 3)$.

(e) Détermine le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.

(f) Calcule $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$.

Ex. 38 ★★☆ **Simuler des tirs au but** — Marius réussit chaque tir au but avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres. Pour simuler le nombre X de tirs réussis sur une série de n tirs, il écrit le programme ci-dessous. Arrondis au millième.

```
from random import random
def serie(n, p):
    X = 1
    for i in range(n):
        if random() > p:
            X = X + 1
    return X
```

(a) `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$. Quelle est la probabilité que `random() < 0.8` soit vrai ? Que simule ce test ?

(b) La fonction de Marius contient deux erreurs. Repère-les et corrige-les.

(c) Une fois la fonction corrigée, que renvoie `serie(5, 0.8)` ? Donne la loi de X en justifiant.

(d) On répète 1 000 fois `serie(5, 0.8)` et on calcule la proportion des résultats `>= 4`. Quelle probabilité cette proportion estime-t-elle ? Calcule sa valeur exacte.

Ex. 38 (suite)

(e) Marius obtient une proportion de 0,751 et affirme : « $P(X \geqslant 4) = 0{,}751$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ Combien de pochettes pour une carte rare ? — Chaque pochette d'autocollants contient une carte rare avec la probabilité 0,15, indépendamment des autres (stock assez grand). Hugo achète n pochettes. Arrondis les probabilités au millième. Programme de Hugo :

```
n = 1
while 1 - 0.85**n ..... 0.99:
    n = n + 1
print(n)
```

(a) Exprime en fonction de n la probabilité p_n d'obtenir au moins une carte rare, puis calcule p_{10}.

(b) Hugo veut au moins une carte rare avec une probabilité d'au moins 0,95. Résous $p_n \geqslant 0{,}95$ avec le logarithme népérien et donne le nombre minimal de pochettes.

(c) Faut-il écrire `<` ou `>=` à la place des pointillés pour que le programme affiche le plus petit n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$? Justifie.

(d) Quelle valeur le programme affiche-t-il ? Justifie à l'aide de deux puissances de 0,85.

Ex. 40 ★★☆ Musiciens dans un lycée de Besançon — D'après une enquête nationale, 20 % des lycéens jouent d'un instrument. Dans un lycée de Besançon, on interroge 30 élèves au hasard. X est le nombre d'élèves qui jouent d'un instrument. Arrondis au millième. Extrait de table :

k	P(X ⩽ k)
1	0,0105
2	0,0442
3	0,1227
9	0,9389
10	0,9744
11	0,9905
12	0,9969

(a) Justifie que X suit la loi $\mathcal{B}(30\,;0{,}2)$.

(b) À l'aide de la table, détermine le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

(c) Calcule $P(a \leqslant X \leqslant b)$ à l'aide de la table.

(d) Parmi les 30 élèves interrogés, 12 jouent d'un instrument. Cet échantillon est-il « normal » au regard de l'intervalle $[a\,;b]$? Justifie.

Ex. 41 ★★★ Pop-corn dans un cinéma de Nancy — Dans un cinéma de Nancy, 30 % des spectateurs achètent un cornet de pop-corn. À une séance, on choisit 20 spectateurs au hasard. La population est assez grande pour assimiler ce choix à des tirages avec remise. X est le nombre de ces spectateurs qui achètent un cornet. Voici un extrait de la calculatrice, arrondi à 10^{-4} :

k	P(X ⩽ k)
1	0,0076
2	0,0355
3	0,1071
4	0,2375
8	0,8867
9	0,9520
10	0,9829

Calculatrice autorisée. Arrondis au millième.

(a) Justifie que X suit une loi binomiale, en précisant ses paramètres. Calcule ensuite $E(X)$ et interprète ce nombre.

(b) Calcule $P(X \geqslant 4)$ et $P(X > 4)$. Explique pourquoi ces deux probabilités ne sont pas égales.

(c) La gérante, Clémence, prépare k cornets pour ces 20 spectateurs. Détermine le plus petit k tel que le risque de manquer de cornets, $P(X > k)$, soit au plus 0,05.

(d) Clémence affirme : « $P(3 \leqslant X \leqslant 9) \geqslant 0{,}95$ ». A-t-elle raison ? Détermine ensuite les plus petits entiers a et b tels que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

(e) Un samedi, 2 des 20 spectateurs choisis achètent un cornet. Yanis pense que cet échantillon est inhabituel. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ Fléchettes : seuil et simulation — Au club de fléchettes de Perpignan, Noé atteint le centre de la cible avec la probabilité 0,06 à chaque lancer, indépendamment des autres lancers. Il lance n fléchettes. X, le nombre de lancers au centre, suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}06)$. En Python, `random()` renvoie un réel au hasard dans $[0\,;1[$. Calculatrice autorisée. Arrondis au millième.

(a) Montre que la probabilité p_n que Noé atteigne au moins une fois le centre en n lancers vaut $p_n = 1 - 0{,}94^n$.

(b) Théo écrit : « $0{,}94^n \leqslant 0{,}01 \iff n \leqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94} \approx 74{,}4$, donc 74 lancers suffisent pour avoir $p_n \geqslant 0{,}99$ ». Repère ses deux erreurs, puis donne le nombre minimal de lancers.

(c) Complète la ligne 3 pour que `seuil(p, s)` renvoie le plus petit n tel que $1 - (1-p)^n \geqslant s$. Donne ensuite, avec un calcul, ce que renvoie `seuil(0.06, 0.999)`.

```
def seuil(p, s):
    n = 1
    while ... :
        n = n + 1
    return n
```

Ex. 42 **(suite)**

(d) Ce programme doit renvoyer une réalisation de X. Explique pourquoi il ne renvoie que 0 ou 1, puis corrige ses deux erreurs.

```
from random import random
def lancers(n, p):
    for i in range(1, n):
        X = 0
        if random() < p:
            X = X + 1
    return X
```

(e) On a corrigé `lancers`. Qu'estime l'appel `frequence(75, 0.06, 10000)` ? Quelle ligne faut-il modifier pour estimer $P(X \geqslant 2)$? Calcule cette probabilité pour $n = 75$.

```
def frequence(n, p, N):
    c = 0
    for j in range(N):
        if lancers(n, p) >= 1:
            c = c + 1
    return c / N
```