Terminale maths complémentaires / Loi binomiale — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Épreuve, loi et schéma de Bernoulli, arbre pondéré*

Ex. 1 ★☆☆ Automatismes : variable de Bernoulli

(a) Le succès est « obtenir 5 ou 6 », soit 2 faces sur 6 : $P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $P(X=0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

k	0	1
P(X = k)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(b) C'est faux : les deux issues ne sont pas équiprobables. La probabilité est proportionnelle à l'angle : $P(X=1)=\frac{108}{360}=0{,}3$.

(c) Pour une loi de Bernoulli, $E(X)=p$, donc $E(X)=0{,}42$.

(d) Pour une loi de Bernoulli, $V(X)=p(1-p)$ et non p^2. On trouve $V(X)=0{,}42\times 0{,}58=0{,}2436$.

(e) $V(Y)=0{,}36\times 0{,}64=0{,}2304$, donc $\sigma(Y)=\sqrt{0{,}2304}=0{,}48$.

(f) $p(1-p)=0{,}16$ donne $p^2-p+0{,}16=0$, soit $p=0{,}2$ ou $p=0{,}8$. Comme $p<0{,}5$, $p=0{,}2$ (vérification : $0{,}2\times 0{,}8=0{,}16$).

Ex. 2 ★☆☆ Automatismes : chemins d'un arbre pondéré

(a) Les branches issues d'un même nœud ont une somme de probabilités égale à 1 : $P(\overline{S})=1-0{,}65=0{,}35$.

(b) Il y a 4 niveaux et 2 branches par nœud, donc $2^4=16$ chemins.

(c) On multiplie le long du chemin : $0{,}65\times 0{,}35\times 0{,}65\times 0{,}65=0{,}09611875$.

(d) Il y a 4 chemins : $\overline{S}SSS$, $S\overline{S}SS$, $SS\overline{S}S$ et $SSS\overline{S}$.

(e) Chacun des 4 chemins vaut $0{,}65^3\times 0{,}35=0{,}09611875$. On les additionne : $4\times 0{,}09611875=0{,}384475$.

(f) Un seul chemin réalise cet événement, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}35^4=0{,}01500625$. Attention, ce n'est pas $1-0{,}65^4$.

Ex. 3 ★★☆ Schéma de Bernoulli ou pas ?

(a) Chaque tirage a deux issues : succès « rouge », de probabilité $p=\frac{3}{10}=0{,}3$. Avec remise, la composition de l'urne ne change pas : les 4 tirages sont identiques et indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=4$ et $p=0{,}3$.

Ex. 3 (suite)

(b) Le premier tirage donne rouge avec la probabilité $\frac{3}{10}$. Si la boule est rouge, il ne reste que 2 rouges sur 9 boules, et le second tirage donne rouge avec la probabilité $\frac{2}{9}\neq\frac{3}{10}$. Les tirages ne sont ni identiques ni indépendants : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

(c) L'épreuve a deux issues : succès « la personne va au travail à vélo », de probabilité $p=0{,}12$. Les 50 personnes sont choisies sans remise, mais la population est très grande : on assimile ces choix à 50 tirages avec remise, identiques et indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=50$ et $p=0{,}12$.

(d) Chaque partie a deux issues (succès « Sacha gagne »), mais la probabilité de gagner dépend du résultat de la partie précédente : 0,6 ou 0,3 selon le cas. Les parties ne sont ni identiques ni indépendantes : ce n'est pas un schéma de Bernoulli, même sans tirage dans une urne.

Ex. 4 ★★☆ Les erreurs de Hugo

(a) Chaque manche est une épreuve à deux issues : succès « Hugo gagne la manche », de probabilité $p=0{,}15$. Les 5 manches sont identiques et indépendantes. C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n=5$ et $p=0{,}15$.

(b) « Aucune victoire » correspond au seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$, où chaque branche vaut $1-0{,}15=0{,}85$. On a donc $P=0{,}85^5\approx 0{,}444$. Le calcul $1-0{,}15^5$ donne en fait la probabilité de « Hugo ne gagne pas toutes les manches », c'est-à-dire au moins une défaite.

(c) Non. Avec 8 manches, ce raisonnement donnerait $8\times 0{,}15=1{,}2>1$, ce qui est impossible. On passe par le contraire : $P(\text{au moins une victoire})=1-0{,}85^5\approx 0{,}556$.

(d) Gagner seulement la première manche, c'est le seul chemin $S\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$: $0{,}15\times 0{,}85^4\approx 0{,}078$. « Exactement une victoire » regroupe 5 chemins, selon la manche gagnée, qui ont tous cette probabilité : $5\times 0{,}15\times 0{,}85^4\approx 0{,}392$. C'est 5 fois plus : il ne faut pas confondre un chemin et l'événement.

Ex. 5 ★★☆ **Le stand de fléchettes d'Annecy**

(a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}1$: $P(X = 1) = 0{,}1$ et $P(X = 0) = 0{,}9$. On en déduit $E(X) = 0{,}1$ et $V(X) = 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09$.

(b) Par linéarité, $E(G) = 15E(X) - 2 = 15 \times 0{,}1 - 2 = -0{,}5$. Sur un grand nombre de parties, Chloé perd en moyenne 0,50 € par partie.

(c) $V(G) = 15^2 \times V(X) = 225 \times 0{,}09 = 20{,}25$, donc $\sigma(G) = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$ €.

(d) Si le stand verse a euros, $E(G) = 0{,}1a - 2$. Le jeu est équitable quand $E(G) = 0$, soit $a = \frac{2}{0{,}1} = 20$. Le stand devrait verser 20 €.

Ex. 6 ★★★ **Les feux de Nadia à Rennes**

(a) À chaque feu, il y a deux issues : succès S « le feu est vert », de probabilité $p = 0{,}4$, ou échec $\overline{S}$. Les issues ne sont pas équiprobables. L'épreuve est répétée 3 fois de façon identique et indépendante : c'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}4$. L'arbre a 3 niveaux et $2^3 = 8$ chemins. À chaque nœud, la branche S porte 0,4 et la branche $\overline{S}$ porte $1 - 0{,}4 = 0{,}6$, car la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

(b) C'est le seul chemin $S\,S\,\overline{S}$. On multiplie le long du chemin : $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}096$. La probabilité vaut 0,096.

(c) Trois chemins comptent exactement 2 succès : $S\,S\,\overline{S}$, $S\,\overline{S}\,S$ et $\overline{S}\,S\,S$. Chacun a pour probabilité $0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}096$. On additionne les chemins : $3 \times 0{,}096 = 0{,}288$. La probabilité vaut 0,288, et non 0,096, qui correspond à un seul chemin.

(d) Non. Le contraire de « au moins un feu vert » est « aucun feu vert », c'est-à-dire le seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$, de probabilité $0{,}6^3 = 0{,}216$. Le calcul $1 - 0{,}4^3$ donne la probabilité de « au moins un feu rouge ».
Donc $P(\text{au moins un feu vert}) = 1 - 0{,}216 = 0{,}784$.

(e) Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p' = P(\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}) = 0{,}6^3 = 0{,}216$. Sa loi : $P(Z = 1) = 0{,}216$ et $P(Z = 0) = 0{,}784$.
Donc $E(Z) = 0{,}216$ et $V(Z) = 0{,}216 \times (1 - 0{,}216) = 0{,}216 \times 0{,}784 = 0{,}169344$. Attention : $V(Z)$ ne vaut pas $0{,}216^2$.

Ex. 7 ★★★ **Avec ou sans remise à la kermesse de Colmar**

(a) Chaque tirage a deux issues : succès G « le ticket est gagnant », de probabilité $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Le tirage se fait avec remise, donc la boîte est la même à chaque fois : les 2 tirages sont identiques et indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. Le contraire de « au moins un gagnant » est « aucun gagnant » : $P = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375 \approx 0{,}438$.

(b) Sans remise, il ne reste que 7 tickets au second tirage. La probabilité de gagner vaut alors $\frac{1}{7}$ si le premier ticket était gagnant, et $\frac{2}{7}$ sinon. Les deux épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes : ce n'est pas un schéma de Bernoulli. Sur l'arbre, le chemin « aucun gagnant » a pour probabilité $\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.
Donc $P(\text{au moins un gagnant}) = 1 - \frac{15}{28} = \frac{13}{28} \approx 0{,}464$.

(c) Avec remise, la probabilité vaut $\frac{7}{16} \approx 0{,}438$. Sans remise, elle vaut $\frac{13}{28} \approx 0{,}464$. Le tirage sans remise est plus favorable à Théo : un ticket perdant tiré n'est pas remis, ce qui augmente la part des gagnants pour le second tirage.

(d) La population de 20 000 tickets est très grande. Retirer 4 tickets ne change presque pas la proportion de gagnants $\frac{5\,000}{20\,000} = 0{,}25$. On assimile donc l'achat à 4 tirages avec remise : on a 4 épreuves identiques et indépendantes à deux issues, avec le succès G « le ticket est gagnant », de probabilité $p = 0{,}25$. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}25$. Les chemins à exactement 2 succès sont $GG\overline{G}\,\overline{G}$, $G\overline{G}G\overline{G}$, $G\overline{G}\,\overline{G}G$, $\overline{G}GG\overline{G}$, $\overline{G}G\overline{G}G$ et $\overline{G}\,\overline{G}GG$, soit 6 chemins.

(e) Chacun des 6 chemins a pour probabilité $0{,}25^2 \times 0{,}75^2 = 0{,}03515625$. On additionne les chemins : $6 \times 0{,}03515625 = 0{,}2109375 \approx 0{,}211$. « Aucun gagnant » correspond au seul chemin $\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}$, de probabilité $0{,}75^4 = 0{,}31640625 \approx 0{,}316$. Attention : ce n'est pas $1 - 0{,}25^4$.

2. *Coefficients binomiaux et triangle de Pascal*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : valeurs à connaître et symétrie**

(a) $\binom{9}{0} = 1$: il y a un seul chemin sans aucun succès.

(b) $\binom{9}{9} = 1$: il y a un seul chemin sans aucun échec.

Ex. 8 **(suite)**

(c) $\binom{11}{1} = 11$: le succès peut être à l'une des 11 places.

(d) Par symétrie, $\binom{14}{13} = \binom{14}{1} = 14$.

(e) Par symétrie, $\binom{16}{11} = \binom{16}{16-11} = \binom{16}{5} = 4\,368$.

(f) Par symétrie, $\binom{13}{4} = \binom{13}{13-4}$, donc $k = 9$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : lire et compléter le triangle**

(a) On compte à partir de $k = 0$: $\binom{7}{3}$ est le quatrième terme, donc $\binom{7}{3} = 35$.

(b) On numérote à partir de $k = 0$: le troisième terme est $\binom{7}{2} = 21$, pas $\binom{7}{3}$.

(c) C'est $\binom{7}{6}$, le terme de rang 6 : $\binom{7}{6} = 7$ (et par symétrie $\binom{7}{6} = \binom{7}{1}$).
Donc 7 chemins comportent exactement 6 succès.

(d) La ligne commence et finit par 1. Chaque autre terme est la somme de deux voisins de la ligne 7 :
$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1$.

(e) La somme de la ligne n vaut 2^n : ici $2^7 = 128$.

Ex. 10 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) $\binom{10}{2}$ n'est pas un produit, c'est un nombre de chemins. Avec Pascal : $\binom{10}{2} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$ (ou nCr à la calculatrice).
Donc $\binom{10}{2} = 45$.

(b) Les indices sont décalés : avec $k = 4$, la relation de Pascal donne $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$. On vérifie : $126 + 126 = 252 = \binom{10}{5}$, alors que $\binom{10}{4} = 210$.

(c) 6 est un nombre de chemins : une probabilité ne peut pas dépasser 1. Chacun des 6 chemins a pour probabilité $0{,}3^2 \times 0{,}7^2$, donc P(exactement 2 succès) $= 6 \times 0{,}09 \times 0{,}49 \approx 0{,}265$.

(d) Les lignes sont numérotées à partir de $n = 0$: $1,\ 3,\ 3,\ 1$ est la ligne 3. La ligne 4 est $1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les coefficients**

(a) Vrai. Par symétrie, $\binom{20}{18} = \binom{20}{2}$, et la calculatrice (nCr) donne $\binom{20}{2} = 190$.

(b) Faux. La somme de la ligne n vaut 2^n, donc ici $2^{10} = 1\,024$.

(c) Vrai. Par symétrie, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

(d) Vrai. C'est la relation de Pascal avec $n = 15$ et $k = 6$: $\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$. Vérification : $5\,005 + 6\,435 = 11\,440$.

(e) Faux. Un seul chemin ne comporte que des échecs, donc $\binom{12}{0} = 1$.

Ex. 12 ★★☆ **Lancers francs à Lorient**

(a) Par symétrie, $\binom{18}{15} = \binom{18}{3}$, et la calculatrice (nCr) donne 816.
Donc 816 chemins comportent exactement 15 réussites.

(b) Chacun des 816 chemins a pour probabilité $0{,}8^{15} \times 0{,}2^3$. Donc P(exactement 15 réussites) $= 816 \times 0{,}8^{15} \times 0{,}2^3 \approx 0{,}230$.

(c) Au moins 17 réussites, c'est 17 ou 18 : $\binom{18}{17} + \binom{18}{18} = 18 + 1 = 19$ chemins.

(d) Le nombre total de chemins est la somme de la ligne 18 du triangle : $2^{18} = 262\,144$ chemins.

Ex. 13 ★★★ **De la ligne 9 à un arbre à 10 épreuves**

(a) Chaque ligne commence et finit par 1. Chaque autre terme est la somme des deux voisins de la ligne 9. La ligne 10 est donc
$1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1$. Elle compte 11 termes, car k va de 0 à 10. Par la relation de Pascal, $\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$.

(b) $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1\,024 = 2^{10}$. La ligne 10 compte tous les chemins de l'arbre, quel que soit le nombre de succès. Chaque épreuve double le nombre de branches, donc il y a 2^{10} chemins.

(c) Au moins 8 succès, c'est 8, 9 ou 10 succès : $\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 45 + 10 + 1 = 56$.
Donc 56 chemins comportent au moins 8 succès.

Ex. 13 **(suite)**

(d) « Au plus 7 succès » est le contraire de « au moins 8 succès ». Il y a donc $1\,024 - 56 = 968$ chemins qui comportent au plus 7 succès.

(e) 56 est un nombre de chemins, pas une probabilité. Si $p = 0{,}5$, chaque chemin a pour probabilité $0{,}5^{10} = \frac{1}{1\,024}$. On a alors $P(X \geqslant 8) = 56 \times \frac{1}{1\,024} = \frac{56}{1\,024} \approx 0{,}055$: Clara a raison. Si $p \neq 0{,}5$, les chemins n'ont pas tous la même probabilité $p^k(1-p)^{10-k}$. De plus, $P(X \geqslant 8)$ augmente avec p : plus le succès est probable, plus « au moins 8 succès » l'est aussi.
Donc $p = 0{,}5$ est la seule valeur qui convient.

Ex. 14 ★★★ **Retrouver n et k, regrouper des sommes**

(a) Par symétrie, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$, donc $n = 17$.
Enfin, $\binom{17}{17} = 1$: un seul chemin ne comporte aucun échec.

(b) Par symétrie, $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$, donc $k = 5$ et $k = 7$ conviennent. La calculatrice donne la ligne 12 : 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1 . La valeur 792 n'apparaît qu'aux rangs 5 et 7. Les solutions sont donc $k = 5$ et $k = 7$.

(c) Ce sont deux voisins de la ligne 19, aux rangs 11 et 12. Par la relation de Pascal, la somme vaut $\binom{20}{12}$, et non $\binom{20}{11}$. Par symétrie, $\binom{20}{12} = \binom{20}{8}$. Les solutions sont donc $k = 12$ et $k = 8$. La calculatrice donne $\binom{20}{12} = 125\,970$.

(d) Par la relation de Pascal, $\binom{20}{8} + \binom{20}{9} = \binom{21}{9}$.
Ensuite, $\binom{21}{9} + \binom{21}{10} = \binom{22}{10}$. La somme vaut donc $\binom{22}{10} = 646\,646$ (calculatrice).

(e) Il y a $\binom{30}{4} = 27\,405$ chemins à exactement 4 succès (calculatrice). Chacun a pour probabilité $0{,}35^4 \times 0{,}65^{26} \approx 2{,}05 \times 10^{-7}$: on garde la valeur exacte pour la suite.
Donc $P(X = 4) = 27\,405 \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^{26} \approx 0{,}0056$.

3. *Reconnaître une loi binomiale et calculer $P(X = k)$*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : calculer avec la formule**

(a) $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^2 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

(b) $P(X = 0) = (1 - 0{,}1)^7 = 0{,}9^7 = 0{,}4782969 \approx 0{,}478$.

(c) $P(X = 6) = p^6 = 0{,}3^6 = 0{,}000729$.

(d) $P(X = 3) = 56 \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^5 \approx 0{,}279$. Le coefficient est 56 et il y a $8 - 3 = 5$ échecs.

(e) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^9 \approx 0{,}866$.

(f) $E(X) = 12 \times 0{,}25 = 3$ et $\sigma(X) = \sqrt{12 \times 0{,}25 \times 0{,}75} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : coefficients et chemins**

(a) $\binom{7}{2} = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21$ et $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$.

(b) Par symétrie, $\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = 120$.

(c) $\binom{25}{0} = 1$ (un seul chemin, sans aucun succès) et $\binom{25}{1} = 25$.

(d) $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^6$: 4 succès, donc $0{,}35^4$, et $10 - 4 = 6$ échecs, donc $0{,}65^6$.

(e) Il y a $\binom{4}{2} = 6$ chemins. Chacun a pour probabilité $0{,}6^2 \times 0{,}4^2 = 0{,}0576$.

Ex. 17 ★★☆ **Binomiale ou pas ?**

(a) Pas de loi binomiale. Le tirage se fait sans remise dans une petite urne, donc les épreuves ne sont pas indépendantes. La probabilité de tirer une rouge vaut $\frac{3}{8}$ au premier tirage, mais $\frac{2}{7}$ au deuxième si la première boule tirée était rouge.

(b) Pour chaque personne, l'épreuve a deux issues : succès = « elle va au travail à vélo », de probabilité $p = 0{,}38$. La ville est assez grande pour assimiler le choix à des tirages avec remise : les 50 épreuves sont identiques et indépendantes. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}38)$.

(c) Succès = « ne pas obtenir 6 », de probabilité $p = \frac{5}{6}$. Les 10 lancers sont identiques et indépendants, et X compte les succès.
Donc X suit $\mathcal{B}(10\,;\frac{5}{6})$, et non $\mathcal{B}(10\,;\frac{1}{6})$. Alors $P(X = 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162$.

Ex. 17 (suite)

(d) Pas de loi binomiale. X ne compte pas des succès : elle prend les valeurs de 8 à 48, alors qu'une loi binomiale prendrait ses valeurs entre 0 et 8.

Ex. 18 ★★☆ Repérer et corriger l'erreur

(a) Inès a oublié le coefficient : $0{,}06^2 \times 0{,}94^{23}$ est la probabilité d'un seul chemin. En réalité, $P(X = 2) = 300 \times 0{,}06^2 \times 0{,}94^{23} \approx 0{,}260$.

(b) L'exposant de $p = 0{,}06$ doit être le nombre de succès, 3, et celui de 0,94 le nombre d'échecs, $25 - 3 = 22$. Théo a inversé p et $1 - p$: le facteur $0{,}06^{22}$ rend le produit presque nul. En réalité, $P(X = 3) = 2300 \times 0{,}06^3 \times 0{,}94^{22} \approx 0{,}127$.

(c) Non. $1 - 0{,}06^{25}$ est la probabilité qu'au moins une pièce soit bonne. « Aucune pièce défectueuse » correspond à $X = 0$: $P(X = 0) = 0{,}94^{25} \approx 0{,}213$.

(d) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$, car $X \leqslant 2$ contient la valeur 2. À la calculatrice, $P(X \leqslant 1) = 0{,}94^{25} + 25 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{24} \approx 0{,}553$.
Donc $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}447$.

Ex. 19 ★★☆ QCM au hasard

(a) Pour chaque question, l'épreuve a deux issues : succès = « la réponse est juste », de probabilité $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Les 8 réponses sont données au hasard, donc les épreuves sont identiques et indépendantes. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}25)$.

(b) La plus grande probabilité du tableau est $P(X = 2) \approx 0{,}311$. Les valeurs à partir de 5 sont plus petites. Le mode est donc 2 : avoir 2 bonnes réponses est le plus probable.

(c) Non : 0,208 correspond à $P(X = 3)$, soit exactement 3 bonnes réponses. Pour « au moins 3 », on calcule $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2)$. À la calculatrice, $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}679$, donc $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}321$.

(d) $E(X) = 8 \times 0{,}25 = 2$. Si l'on répète ce QCM un grand nombre de fois au hasard, on obtient en moyenne 2 bonnes réponses sur 8.

Ex. 20 ★★★ Sondage sur la vaccination

(a) Pour chaque habitant interrogé, l'épreuve a deux issues. Le succès est « l'habitant est vacciné », de probabilité $p = 0{,}35$. La population est très grande : on assimile le choix des 12 habitants à des tirages avec remise. On répète donc 12 épreuves identiques et indépendantes. X compte les succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}35)$.

Ex. 20 (suite)

(b) Aucun habitant vacciné, c'est 12 échecs : $P(X = 0) = 0{,}65^{12} \approx 0{,}00569$. La probabilité qu'aucun habitant ne soit vacciné est d'environ 0,006.

(c) $P(X = 4) = \binom{12}{4} \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^8 = 495 \times 0{,}35^4 \times 0{,}65^8 \approx 0{,}237$. L'exposant de 0,65 est $12 - 4 = 8$, le nombre d'échecs. La probabilité qu'exactement 4 habitants soient vaccinés est d'environ 0,237.

(d) Non. Y compte les échecs de X : $Y = 12 - X$. Si le succès est « l'habitant n'est pas vacciné », sa probabilité est $1 - 0{,}35 = 0{,}65$. On garde les mêmes 12 épreuves identiques et indépendantes, donc Y suit la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}65)$ et non $\mathcal{B}(12\,;0{,}35)$.

(e) Y suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}65)$. À la calculatrice : $P(Y \leqslant 9) \approx 0{,}8487$.
Donc $P(Y \geqslant 10) = 1 - P(Y \leqslant 9) \approx 0{,}151$. Autre méthode : « $Y \geqslant 10$ » revient à « $X \leqslant 2$ », et $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}151$. La probabilité qu'au moins 10 habitants ne soient pas vaccinés est d'environ 0,151.

Ex. 21 ★★★ Lancers francs simulés

(a) La boucle tourne 10 fois, une fois par lancer. La condition `random.random() < 0.85` est vraie avec la probabilité 0,85 : elle représente un lancer réussi (le succès). Chaque tirage est indépendant des autres. La variable `x` compte les succès. La fonction simule donc une série de 10 lancers et renvoie le nombre de lancers réussis. Ce nombre suit la loi de X : 10 épreuves identiques et indépendantes à deux issues, avec $p = 0{,}85$.
Donc X suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}85)$.

(b) Réussir les 10 lancers, c'est 10 succès : $P(X = 10) = 0{,}85^{10} \approx 0{,}197$. La probabilité que Sofiane réussisse tous ses lancers est d'environ 0,197.

(c) Par symétrie, $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$. Il y a 8 succès et $10 - 8 = 2$ échecs, donc $P(X = 8) = 45 \times 0{,}85^8 \times 0{,}15^2 \approx 0{,}276$. Dans la case vide du tableau, on écrit 0,276.

(d) Le tableau donne 0,040, 0,130, 0,276 et 0,347 pour $k = 6$ à 9. On a aussi $P(X = 10) \approx 0{,}197$, et les probabilités pour $k \leqslant 5$ sont inférieures à 0,01. La plus grande probabilité est $P(X = 9) \approx 0{,}347$: la valeur la plus probable est 9. Par ailleurs, $E(X) = 10 \times 0{,}85 = 8{,}5$. La valeur la plus probable n'est donc pas l'espérance : 8,5 n'est même pas une valeur prise par X.

Ex. 21 **(suite)**

(e) « Au moins 8 » signifie $X \geqslant 8$, et pas seulement $X = 8$. À la calculatrice : $P(X \leqslant 7) \approx 0{,}1798$, donc $P(X \geqslant 8) = 1 - P(X \leqslant 7) \approx 0{,}820$. On retrouve le même résultat avec le tableau : $0{,}276 + 0{,}347 + 0{,}197 = 0{,}820$. Comme $0{,}820 > 0{,}8 = \frac{4}{5}$, le coach a raison.

4. *Probabilités cumulées : $P(X \leqslant k)$, $P(X \geqslant k)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$*

Ex. 22 ★☆☆ **Traduire avec « $\leqslant$ »**

(a) $P(X \leqslant 12)$.

(b) « Moins de 9 » veut dire $X < 9$. Comme X est entière, c'est $P(X \leqslant 8)$.

(c) $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14)$.

(d) $P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20)$.

(e) $P(10 \leqslant X \leqslant 18) = P(X \leqslant 18) - P(X \leqslant 9)$.

(f) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X \leqslant 0) = 1 - P(X = 0)$, c'est-à-dire $1 - 0{,}55^{30}$.

(g) Rater au plus 5 lancers, c'est en réussir au moins 25 : $P(X \geqslant 25) = 1 - P(X \leqslant 24)$.

Ex. 23 ★☆☆ **Lire une table de probabilités cumulées**

(a) On lit directement $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}850$.

(b) X est entière, donc $P(X < 3) = P(X \leqslant 2) \approx 0{,}383$.

(c) $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}8497 \approx 0{,}150$.

(d) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}3828 \approx 0{,}617$.

(e) $P(X = 3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}6496 - 0{,}3828 \approx 0{,}267$.

(f) $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}9527 - 0{,}1493 \approx 0{,}803$.

Ex. 24 ★★☆ **Graines en pot : vrai ou faux ?**

(a) Faux. X est entière, donc $P(X < 2) = P(X \leqslant 1) \approx 0{,}069$, alors que $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}206$. Ces deux valeurs sont différentes.

(b) Vrai. Au moins 17 graines germent quand au plus 3 ne germent pas, donc quand $X \leqslant 3$. La calculatrice donne $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}411$.

(c) Vrai. « $X > 4$ » est le contraire de « $X \leqslant 4$ ». Donc $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}6296 \approx 0{,}370$.

(d) Faux. Cette différence retire aussi $P(X = 2)$. La bonne formule est $P(2 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}844$. La formule de l'énoncé donne $\approx 0{,}707$.

Ex. 25 ★★☆ **QCM au hasard : corriger les erreurs**

(a) Pour chaque question, l'épreuve a deux issues. Le succès est « la réponse est juste », de probabilité $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Cette épreuve est répétée 12 fois de façon identique et indépendante, car Noé répond au hasard à chaque question. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}2)$.

(b) Maëlys calcule $1 - P(X \leqslant 2)$, c'est-à-dire $P(X \geqslant 3)$: elle compte en trop le cas $X = 3$. Le contraire de « $X > 3$ » est « $X \leqslant 3$ ».
Donc $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}7946 \approx 0{,}205$.

(c) $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}927445 - 0{,}274878 \approx 0{,}65$. Noé a environ 65 % de chances d'avoir entre 2 et 4 bonnes réponses.

(d) Timéo trouve $0{,}93 - 0{,}27 = 0{,}66$. Il a arrondi avant de soustraire : $P(X \leqslant 4)$ est arrondie vers le haut et $P(X \leqslant 1)$ vers le bas, donc les erreurs d'arrondi s'ajoutent. Il faut soustraire les valeurs non arrondies et n'arrondir qu'à la fin. Le bon résultat est 0,65.

(e) $E(X) = 12 \times 0{,}2 = 2{,}4$. Si l'on répète un grand nombre de fois ce QCM rempli au hasard, on obtient en moyenne 2,4 bonnes réponses.

Ex. 26 ★★☆ **Vaccination à Rennes**

(a) Pour chaque habitant, l'épreuve a deux issues. Le succès est « l'habitant n'est pas vacciné », de probabilité $p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$. On répète cette épreuve 18 fois. On assimile le choix à des tirages avec remise, donc les épreuves sont identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(18\,;0{,}15)$.

(b) Tous les habitants interrogés sont vaccinés quand aucun n'est non vacciné, c'est-à-dire quand $X = 0$. Donc $P(X = 0) = 0{,}85^{18} \approx 0{,}054$. La probabilité que les 18 habitants interrogés soient tous vaccinés est d'environ 0,054.

(c) « Moins de 3 » veut dire $X < 3$, donc $X \leqslant 2$, car X est entière. La calculatrice donne $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}480$. La probabilité que moins de 3 habitants interrogés ne soient pas vaccinés est d'environ 0,480.

(d) $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 0) \approx 0{,}720236 - 0{,}053646 \approx 0{,}667$. La probabilité qu'il y ait entre 1 et 3 non vaccinés est d'environ 0,667.

(e) $E(X) = 18 \times 0{,}15 = 2{,}7$. Si l'on répète un grand nombre de fois l'interrogation de 18 habitants, on trouve en moyenne 2,7 habitants non vaccinés par groupe.

Ex. 27 ★★★ **Contrôle de bougies à Grasse**

(a) « Au plus 2 », c'est $X \leqslant 2$: $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}6769$, lu dans le tableau. « Strictement plus de 2 », c'est $X > 2$, l'événement contraire de $X \leqslant 2$: $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}6769 = 0{,}3231$. Le lot est donc accepté avec une probabilité d'environ 0,6769. Il contient strictement plus de 2 bougies défectueuses avec une probabilité d'environ 0,3231.

(b) Comme X est entier, le contraire de « $X \geqslant 4$ » est « $X \leqslant 3$ », et non « $X \leqslant 4$ ». Lucas a aussi retiré $P(X = 4)$: il a en fait calculé $P(X \geqslant 5)$. Le bon calcul est $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}8670 = 0{,}1330$.

(c) Le lot compte 20 bougies, donc $Y = 20 - X$. On a $Y \geqslant 17 \iff 20 - X \geqslant 17 \iff X \leqslant 3$, donc $P(Y \geqslant 17) = P(X \leqslant 3) \approx 0{,}8670$. Comme Y est entier, $Y < 15 \iff Y \leqslant 14 \iff X \geqslant 6$, donc $P(Y < 15) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}9887 = 0{,}0113$.

(d) Comme X est entier, « au moins 2 mais moins de 6 » se traduit par $2 \leqslant X \leqslant 5$. Alors $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}9887 - 0{,}3917 = 0{,}5970$. Le lot contient entre 2 et 5 bougies défectueuses avec une probabilité d'environ 0,5970.

(e) Le contraire de « au moins une bougie défectueuse » est « aucune bougie défectueuse », c'est-à-dire $X = 0$. Donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^{20} \approx 1 - 0{,}1216 = 0{,}8784$. Comme $0{,}8784 > 0{,}85$, Ben a raison.

Ex. 28 ★★★ **Tirs au but à Lorient**

(a) Chaque tir au but est une épreuve à deux issues. Le succès est « Jade marque », de probabilité $p = 0{,}75$. L'épreuve est répétée 12 fois de façon identique et indépendante. X compte le nombre de succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(12\,;0{,}75)$. On a $E(X) = 12 \times 0{,}75 = 9$. Sur un grand nombre de séries de 12 tirs, Jade marque donc en moyenne 9 tirs au but par série.

(b) La formule donne $P(X = 9) = \binom{12}{9} \times 0{,}75^9 \times 0{,}25^3 = 220 \times 0{,}75^9 \times 0{,}25^3 \approx 0{,}258$. « Moins de 8 » se traduit par $X < 8$, c'est-à-dire $X \leqslant 7$ puisque X est entier. La calculatrice donne $P(X \leqslant 7) \approx 0{,}158$. Jade marque moins de 8 tirs au but avec une probabilité d'environ 0,158.

Ex. 28 (suite)

(c) « Au moins 5 » se traduit par $X \geqslant 5$, dont le contraire est $X \leqslant 4$. La calculatrice donne $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}002782$, donc $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}997$. Comme $0{,}997 > 0{,}99$, l'entraîneur a raison. Attention : $1 - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}986$ est $P(X \geqslant 6)$, et ce calcul ferait conclure à tort.

(d) Première erreur, un décalage d'indice : $P(9 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 8)$. En retirant $P(X \leqslant 9)$, Hugo enlève aussi $P(X = 9)$. Deuxième erreur : on ne soustrait pas des valeurs déjà arrondies. Avec les valeurs de la calculatrice, $P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 8) \approx 0{,}841618 - 0{,}351221 = 0{,}490397$. Le bon résultat est donc $P(9 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0{,}490$. Avec des valeurs arrondies, on obtiendrait $0{,}842 - 0{,}351 = 0{,}491$: c'est faux au millième.

5. *Espérance, variance, écart type*

Ex. 29 ★★★ **Automatismes : espérance, variance, écart type**

(a) $E(X) = 32 \times 0{,}35 = 11{,}2$; $V(X) = 32 \times 0{,}35 \times 0{,}65 = 7{,}28$; $\sigma(X) = \sqrt{7{,}28} \approx 2{,}698$.

(b) $E(Y) = 18 \times \frac{1}{3} = 6$; $V(Y) = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$; $\sigma(Y) = \sqrt{4} = 2$.

(c) Pour une loi de Bernoulli : $E(B) = p = 0{,}7$ et $V(B) = p(1-p) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$.

(d) $E(T) = 9 \times 0{,}5 = 4{,}5$. Non : T compte des succès, il ne prend que des valeurs entières. 4,5 est une moyenne sur un grand nombre de répétitions, pas une valeur possible.

(e) $V(W) = 50 \times 0{,}02 \times 0{,}98 = 0{,}98$.

Ex. 30 ★★★ **Automatismes : variable $\mathbf{G = aX + b}$**

(a) $E(X) = 12 \times 0{,}25 = 3$; $V(X) = 12 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 2{,}25$; $\sigma(X) = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

(b) $E(G) = 5E(X) - 8 = 5 \times 3 - 8 = 7$.

(c) Le coefficient passe au carré et la constante disparaît : $V(G) = 5^2 \times V(X) = 25 \times 2{,}25 = 56{,}25$.

(d) $\sigma(G) = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5 = 5 \times \sigma(X)$: l'écart type est multiplié par $|5| = 5$.

(e) $E(H) = 10 - 2 \times 3 = 4$; $V(H) = (-2)^2 \times 2{,}25 = 9$ (une variance n'est jamais négative).

Ex. 31 ★☆☆ Retrouver p ou n

(a) $1-p=\frac{8{,}4}{12}=0{,}7$ donc $p=0{,}3$; $n=\frac{12}{0{,}3}=40$.

(b) $1-p=\frac{5{,}4}{6}=0{,}9$ donc $p=0{,}1$; $n=\frac{6}{0{,}1}=60$.

(c) $p=\frac{8}{50}=0{,}16$; $V(X)=50\times 0{,}16\times 0{,}84=6{,}72$.

(d) Faux : on aurait $1-p=\frac{6}{5}=1{,}2$, donc $p=-0{,}2$, impossible pour une probabilité. Pour une loi binomiale, on a toujours $V(X)\leqslant E(X)$.

(e) $V(X)=3^2=9$ et $V(X)=n\times 0{,}1\times 0{,}9=0{,}09n$, donc $n=\frac{9}{0{,}09}=100$; $E(X)=100\times 0{,}1=10$.

Ex. 32 ★★☆ Le stand de dés de Lorient

(a) Chaque lancer est une épreuve à deux issues : succès = « obtenir 6 », de probabilité $p=\frac{1}{6}$. On la répète 8 fois de façon identique et indépendante, et X compte les succès : X suit $\mathcal{B}\left(8\,;\frac{1}{6}\right)$. $E(X)=8\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}\approx 1{,}333$.

(b) $G=3X-5$, donc $E(G)=3\times\frac{4}{3}-5=-1$. Sur un grand nombre de parties, Camille perd en moyenne 1 € par partie.

(c) $E(G)=3\times\frac{4}{3}-m=4-m$: le jeu est équitable si $E(G)=0$, donc si la mise vaut $m=4$ €.

(d) $V(X)=8\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{9}$, donc $V(G)=3^2\times\frac{10}{9}=10$ (la mise ne change pas la variance) et $\sigma(G)=\sqrt{10}\approx 3{,}162$ €.

(e) $G=3X-4>0$ équivaut à $X>\frac{4}{3}$, soit $X\geqslant 2$. $P(X\geqslant 2)=1-P(X\leqslant 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^8-8\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^7\approx 0{,}395$. Le jeu est équitable, mais Camille ne gagne de l'argent que dans environ 39,5 % des parties.

Ex. 33 ★★☆ Deux archers d'Annecy

(a) Chaque tir de Noé est une épreuve à deux issues : succès = « toucher le centre », de probabilité 0,6. Elle est répétée 30 fois de façon identique et indépendante, et X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(30\,;0{,}6)$. De même, Y suit $\mathcal{B}(25\,;0{,}72)$.

(b) $E(X)=30\times 0{,}6=18$ et $E(Y)=25\times 0{,}72=18$. Sur un grand nombre de séries de 30 tirs, Noé touche en moyenne 18 fois le centre par série. Les deux espérances sont égales.

(c) $\sigma(X)=\sqrt{30\times 0{,}6\times 0{,}4}=\sqrt{7{,}2}\approx 2{,}683$ flèches et $\sigma(Y)=\sqrt{25\times 0{,}72\times 0{,}28}=\sqrt{5{,}04}\approx 2{,}245$ flèches. À espérance égale, Maëlys a l'écart type le plus petit : elle est la plus régulière.

(d) Non. $P(X=18)=\binom{30}{18}\times 0{,}6^{18}\times 0{,}4^{12}\approx 0{,}147$. L'espérance 18 est une moyenne : Noé n'obtient exactement 18 qu'environ une série sur sept.

Ex. 34 ★★★ Le QCM du concours blanc de Bastia

(a) Pour chaque question, l'épreuve « la réponse est juste » (succès) a pour probabilité $p=\frac{1}{4}=0{,}25$. Elle est répétée 20 fois de façon identique et indépendante, car les réponses sont choisies au hasard. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}25)$. $E(X)=20\times 0{,}25=5$. Si un grand nombre d'élèves répondaient au hasard, ils obtiendraient en moyenne 5 bonnes réponses.

(b) Il y a $20-X$ mauvaises réponses, donc $N=X-r(20-X)=(1+r)X-20r$. Par linéarité, $E(N)=(1+r)\times 5-20r=5-15r$. Alors $E(N)=0\iff r=\frac{1}{3}$. Avec une pénalité de $\frac{1}{3}$ de point, la note moyenne d'un élève qui répond au hasard est nulle.

(c) Avec $r=\frac{1}{3}$, on a $N=\frac{4}{3}X-\frac{20}{3}$. Or $V(X)=20\times 0{,}25\times 0{,}75=3{,}75$.
Donc $V(N)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times 3{,}75=\frac{16}{9}\times\frac{15}{4}=\frac{20}{3}\approx 6{,}667$. Le terme $-\frac{20}{3}$ ne change pas la variance. Ensuite, $\sigma(N)=\sqrt{\frac{20}{3}}\approx 2{,}582$ points : l'écart type est dans l'unité de N, le point.

(d) Non. $E(N)=0$ est une moyenne sur un grand nombre d'élèves, pas la note de chacun. $N\geqslant 4\iff\frac{4}{3}X-\frac{20}{3}\geqslant 4\iff 4X-20\geqslant 12\iff X\geqslant 8$. À la calculatrice, $P(X\leqslant 7)\approx 0{,}8982$.
Donc $P(N\geqslant 4)=P(X\geqslant 8)=1-P(X\leqslant 7)\approx 0{,}102$. Environ 10 % des élèves qui répondent au hasard ont au moins 4 points : Lina a tort.

Ex. 35 ★★★ Tirs au but à Rodez

(a) Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

y	0	1
P(Y = y)	1 − p	p

Son espérance est $E(Y)=0\times(1-p)+1\times p=p$.
Donc $V(Y)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)\big[p+(1-p)\big]=p(1-p)$. On pose $f(p)=p-p^2$: $f'(p)=1-2p$ est positive avant $\frac{1}{2}$ et négative après. La variance est donc maximale pour $p=\frac{1}{2}$ et vaut alors $\frac{1}{4}$.

(b) L'épreuve « le tir est réussi » (succès, $p=0{,}7$) est répétée 15 fois de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(15\,;0{,}7)$.
$E(X)=15\times 0{,}7=10{,}5$. Léo se trompe : on ne peut pas marquer 10,5 buts. Sur un grand nombre de séances, Inès marque en moyenne 10,5 buts par séance, et ce nombre varie d'une séance à l'autre.

Ex. 35 **(suite)**

(c) Faux. Pour Inès : $E = 10{,}5$ et $\sigma = \sqrt{15 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = \sqrt{3{,}15} \approx 1{,}775$ but. Pour Hugo : $E = 15 \times 0{,}9 = 13{,}5$ et $\sigma = \sqrt{15 \times 0{,}9 \times 0{,}1} = \sqrt{1{,}35} \approx 1{,}162$ but. Hugo marque plus en moyenne et il est plus régulier. C'est cohérent avec la question 1 : $p(1-p)$ diminue quand p s'éloigne de $\frac{1}{2}$.

(d) Pour n tirs, le nombre moyen de buts est $0{,}7n$. Ligne 2 : `while 0.7 * n < 20:`. La boucle s'arrête au premier n tel que $0{,}7n \geqslant 20$. Par le calcul : $n \geqslant \frac{20}{0{,}7} \approx 28{,}571$. On a $0{,}7 \times 28 = 19{,}6 < 20$ et $0{,}7 \times 29 = 20{,}3 \geqslant 20$. Le programme affiche 29 : il faut au moins 29 tirs.

6. *Seuils, intervalles de probabilité et simulation*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : nombre minimal d'épreuves**

(a) La probabilité d'au moins un succès est $1 - 0{,}75^n$ (événement contraire : aucun succès). On veut $1 - 0{,}75^n \geqslant 0{,}9$, c'est-à-dire $0{,}75^n \leqslant 0{,}1$.

(b) $0{,}6^n \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow n \ln 0{,}6 \leqslant \ln 0{,}02 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}6} \approx 7{,}66$: le sens change car $\ln 0{,}6 < 0$. Contrôle : $0{,}6^7 \approx 0{,}0280$ (trop grand) et $0{,}6^8 \approx 0{,}0168$. Le plus petit entier est $n = 8$.

(c) $0{,}7^{12} \approx 0{,}0138 > 0{,}01$ et $0{,}7^{13} \approx 0{,}0097 \leqslant 0{,}01$. Comme la suite $(0{,}7^n)$ est décroissante, le plus petit entier est $n = 13$.

(d) Faux. $13 < 13{,}52$, donc $n = 13$ ne vérifie pas $n \geqslant 13{,}52$. On prend l'entier au-dessus : il faut au moins 14 épreuves.

(e) On veut $1 - 0{,}95^n \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}95} \approx 58{,}40$ (le sens change car $\ln 0{,}95 < 0$). Contrôle : $0{,}95^{58} \approx 0{,}0510$ et $0{,}95^{59} \approx 0{,}0485$. Il faut au moins 59 épreuves.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : lire un tableau de probabilités cumulées**

(a) On lit $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}842$.

(b) $P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}9456 \approx 0{,}054$.

(c) L'inégalité est stricte : $P(X < 4) = P(X \leqslant 3) \approx 0{,}649$.

(d) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}3907 \approx 0{,}609$.

(e) $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}9456 < 0{,}95$ et $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}9857 \geqslant 0{,}95$. Comme les $P(X \leqslant k)$ augmentent avec k, on a $k = 6$.

Ex. 37 **(suite)**

(f) $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}9857 - 0{,}3907 \approx 0{,}595$.

Ex. 38 ★★☆ **Simuler des tirs au but**

(a) Le réel est pris au hasard dans $[0\,;1[$, donc $P(\text{random}() < 0{,}8) = 0{,}8$. Ce test simule un tir réussi, qui a lui aussi la probabilité 0,8.

(b) Le compteur doit partir de 0 : `X = 0`. De plus, `random() > p` est vrai avec la probabilité $1 - p = 0{,}2$: le programme compte les échecs. Il faut écrire `if random() < p:`.

(c) Elle renvoie une réalisation de X pour 5 tirs. Chaque tir est une épreuve à deux issues (succès : « tir réussi », $p = 0{,}8$), répétée 5 fois de façon identique et indépendante. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}8)$.

(d) Elle estime $P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0{,}8^4 \times 0{,}2 + 0{,}8^5 = 0{,}4096 + 0{,}32768 \approx 0{,}737$, car $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$.

(e) Non. 0,751 est une fréquence obtenue par simulation : elle change d'une exécution à l'autre et ne fait qu'approcher la probabilité exacte $P(X \geqslant 4) \approx 0{,}737$. Un écart d'environ 0,01 est normal pour 1 000 simulations.

Ex. 39 ★★☆ **Combien de pochettes pour une carte rare ?**

(a) L'événement contraire est « aucune carte rare », de probabilité $0{,}85^n$.
Donc $p_n = 1 - 0{,}85^n$ et $p_{10} = 1 - 0{,}85^{10} \approx 0{,}803$.

(b) $1 - 0{,}85^n \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}85^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow n \ln 0{,}85 \leqslant \ln 0{,}05 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}85} \approx 18{,}43$: le sens change car $\ln 0{,}85 < 0$. Contrôle : $0{,}85^{18} \approx 0{,}0536$ et $0{,}85^{19} \approx 0{,}0456$. Il faut au moins 19 pochettes.

(c) Il faut `<` : la boucle continue tant que $p_n < 0{,}99$ et s'arrête dès que $p_n \geqslant 0{,}99$. Avec `>=`, on aurait $p_1 = 0{,}15$, la boucle ne tournerait jamais et le programme afficherait 1.

(d) $0{,}85^{28} \approx 0{,}0106 > 0{,}01$, donc $p_{28} < 0{,}99$, et $0{,}85^{29} \approx 0{,}0090 \leqslant 0{,}01$, donc $p_{29} \geqslant 0{,}99$. Le programme affiche 29.

Ex. 40 ★★☆ **Musiciens dans un lycée de Besançon**

(a) L'épreuve « interroger un élève » a deux issues (succès : « il joue d'un instrument », de probabilité $p = 0{,}2$). Elle est répétée 30 fois de façon identique et indépendante : la population est assez grande pour assimiler le choix à des tirages avec remise. X compte les succès, donc X suit $\mathcal{B}(30\,;0{,}2)$.

(b) $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}0105 \leqslant 0{,}025$ et $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}0442 > 0{,}025$, donc $a = 2$. $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}9744 < 0{,}975$ et $P(X \leqslant 11) \approx 0{,}9905 \geqslant 0{,}975$, donc $b = 11$ (et non 10).

(c) $P(2 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}9905 - 0{,}0105 = 0{,}980$. On a bien $P(2 \leqslant X \leqslant 11) \geqslant 0{,}95$.

(d) 12 n'est pas dans $[2\,;11]$. Sous la loi $\mathcal{B}(30\,;0{,}2)$, un tel résultat a une probabilité inférieure à 5 % : l'échantillon n'est pas « normal ». Dans ce lycée, la proportion de musiciens semble supérieure à 20 %.

Ex. 41 ★★★ **Pop-corn dans un cinéma de Nancy**

(a) On choisit un spectateur : c'est une épreuve à deux issues. Le succès S est « il achète un cornet », de probabilité $p = 0{,}3$. Cette épreuve est répétée 20 fois de façon identique et indépendante : la population est assez grande pour assimiler les choix à des tirages avec remise. X compte le nombre de succès, donc X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}3)$. On a $E(X) = 20 \times 0{,}3 = 6$. En moyenne, sur un grand nombre de groupes de 20 spectateurs, 6 spectateurs par groupe achètent un cornet.

(b) $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}1071 \approx 0{,}893$. $P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}2375 \approx 0{,}762$. Les deux probabilités diffèrent de $P(X = 4) \approx 0{,}130$. En effet, l'événement $\{X \geqslant 4\}$ contient la valeur 4, alors que $\{X > 4\}$ ne la contient pas.

(c) On a $P(X > k) \leqslant 0{,}05 \iff P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$. La suite des $P(X \leqslant k)$ est croissante. Le tableau donne $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}8867 < 0{,}95$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}9520 \geqslant 0{,}95$. Donc $k = 9$. Avec 9 cornets, le risque d'en manquer vaut $P(X > 9) \approx 0{,}048$, ce qui est au plus 0,05.

(d) Clémence a tort : $P(3 \leqslant X \leqslant 9) = P(X \leqslant 9) - P(X \leqslant 2) \approx 0{,}9520 - 0{,}0355 \approx 0{,}917 < 0{,}95$. Elle enlève environ 0,036 à gauche et 0,048 à droite, donc plus de 2,5 % de chaque côté. On a $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}0076 \leqslant 0{,}025$ et $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}0355 > 0{,}025$, donc $a = 2$. On a $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}9520 < 0{,}975$ et $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}9829 \geqslant 0{,}975$, donc $b = 10$.

Ex. 41 (suite)

(e) $P(2 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}9829 - 0{,}0076 \approx 0{,}975 \geqslant 0{,}95$. Les bornes sont comprises, donc $2 \in [2\,;10]$. L'échantillon est « normal » au regard de cet intervalle : Yanis a tort, même si 2 est loin de $E(X) = 6$.

Ex. 42 ★★★ **Fléchettes : seuil et simulation**

(a) L'événement contraire de « au moins un lancer au centre » est « aucun lancer au centre », c'est-à-dire $\{X = 0\}$. On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}06^0 \times 0{,}94^n = 0{,}94^n$.
Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}94^n$.

(b) Première erreur : $\ln 0{,}94 < 0$, donc diviser par ce nombre change le sens de l'inégalité. On obtient $n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94} \approx 74{,}43$. Deuxième erreur : n doit être un entier au moins égal à 74,43, c'est donc l'entier au-dessus, 75, et non 74. Contrôle : $0{,}94^{74} \approx 0{,}0103 > 0{,}01$, alors que $0{,}94^{75} \approx 0{,}00965 \leqslant 0{,}01$. Il faut au moins 75 lancers, et alors $p_{75} \approx 0{,}990$.

(c) Ligne 3 : `while 1 - (1 - p)**n < s:`. Tant que le seuil n'est pas atteint, on augmente n. Pour $s = 0{,}999$: $0{,}94^n \leqslant 0{,}001 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}94} \approx 111{,}64$, car $\ln 0{,}94 < 0$. Contrôle : $0{,}94^{111} \approx 0{,}00104 > 0{,}001$ et $0{,}94^{112} \approx 0{,}000978 \leqslant 0{,}001$. L'appel renvoie donc 112.

(d) Erreur 1 : `X = 0` est dans la boucle, donc le compteur est remis à 0 à chaque lancer. À la fin, `X` vaut 1 si le dernier lancer atteint le centre, et 0 sinon. Il faut écrire `X = 0` avant la boucle. Erreur 2 : `range(1, n)` donne $i = 1, \ldots, n-1$, soit seulement $n - 1$ lancers. Il faut écrire `range(n)`. Le test `random() < p` est juste : il est vrai avec la probabilité p, comme un lancer au centre.

(e) L'appel simule 10 000 séries de 75 lancers. Il renvoie la fréquence des séries où Noé atteint au moins une fois le centre. C'est une estimation de $p_{75} = 1 - 0{,}94^{75} \approx 0{,}990$, qui change d'une exécution à l'autre. Pour estimer $P(X \geqslant 2)$, on remplace la ligne 4 par `if lancers(n, p) >= 2:`. On a $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}94^{75} - 75 \times 0{,}06 \times 0{,}94^{74} \approx 1 - 0{,}00965 - 0{,}04620 \approx 0{,}944$.