Loi binomiale : problèmes – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Loi binomiale · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice autorisée. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- « Au moins un » : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$. Le produit np n'est pas une probabilité.
- « Au moins deux » : $1 - P(X=0) - P(X=1)$, pas $1 - P(X=0)$.
- Diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$: $\ln q < 0$, **le sens de l'inégalité change**.
- Le plus petit entier n s'obtient en arrondissant à l'entier **supérieur**, même pour 17,02.
- Intervalle : a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$, b le plus petit tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
- Une observation dans l'intervalle ne **prouve** pas l'hypothèse : on ne la rejette pas, c'est tout.

Exercice 1 – Au moins un, aucun, tous ★

Calcule la probabilité demandée ; donne la valeur exacte si elle est simple, sinon arrondis au millième.

a) $X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}1)$: $P(X \geqslant 1)$.

b) $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}05)$: $P(X \geqslant 1)$.

c) $X \sim \mathcal{B}(4\,;\,\dfrac{1}{3})$: $P(X \geqslant 1)$.

d) $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}02)$: probabilité d'au moins un succès.

e) $X \sim \mathcal{B}(3\,;\,0{,}5)$: probabilité d'au moins un succès.

f) $X \sim \mathcal{B}(6\,;\,0{,}2)$: probabilité d'au moins deux succès.

g) $X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}15)$: probabilité de n'avoir aucun succès.

h) $X \sim \mathcal{B}(7\,;\,0{,}9)$: probabilité de ne pas réussir toutes les épreuves.

Exercice 2 – Le plus petit entier n ★

Détermine le plus petit entier naturel n qui vérifie l'inégalité, en utilisant le logarithme népérien.

a) $0{,}9^n \leqslant 0{,}5$

b) $0{,}8^n < 0{,}01$

c) $1 - 0{,}7^n \geqslant 0{,}99$

d) $0{,}95^n \leqslant 0{,}1$

e) $1 - 0{,}6^n > 0{,}999$

f) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}05$

g) $0{,}99^n \leqslant 0{,}5$

h) $1 - 0{,}75^n \geqslant 0{,}9$

Exercice 3 – Lire le tableau de la calculatrice ★

$X \sim \mathcal{B}(40\,;\,0{,}25)$. La calculatrice donne les valeurs suivantes (arrondies au millième).

k	4	5	6	7	8	9	10
$P(X \leqslant k)$	0,016	0,043	0,096	0,182	0,300	0,440	0,584
k	11	12	13	14	15	16	17
$P(X \leqslant k)$	0,715	0,821	0,897	0,946	0,974	0,988	0,995

1. Donne $P(X \leqslant 9)$, puis $P(X > 9)$.
2. Calcule $P(X \geqslant 13)$.
3. Détermine le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$.
4. Détermine le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
5. Calcule $P(a \leqslant X \leqslant b)$. Que représente l'intervalle $[a\,;\,b]$?

Exercice 4 – Les visiteurs du site ★★

Sur un site de vente, chaque visiteur achète avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres. On note p_n la probabilité qu'au moins un visiteur sur n achète.

1. Calcule la probabilité qu'au moins un visiteur sur 30 achète (arrondis au millième).
2. Exprime p_n en fonction de n.
3. Détermine par le calcul le plus petit n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.
4. Que contient la variable `n` à la fin de ce programme ?

```
n = 1
while 1 - 0.96**n < 0.99:
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 5 – Les billets de tombola ★★

Dans une grande tombola, un billet sur dix est gagnant. On achète n billets ; on assimile l'achat à n tirages avec remise. X compte les billets gagnants.

1. Pour $n = 15$, calcule la probabilité d'avoir au moins deux billets gagnants (arrondis au millième).
2. Montre que, pour n billets, $P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}9^n - 0{,}1n \times 0{,}9^{n-1}$. Peut-on trouver le seuil avec le logarithme ?
3. Que renvoie la fonction ci-dessous ? Interprète.

```
def seuil():
    n = 2
    while 1 - 0.9**n - n * 0.1 * 0.9**(n - 1) < 0.9:
        n = n + 1
    return n
print(seuil())
```

Exercice 6 – La pièce est-elle équilibrée ? ★★

Pour tester une pièce, on la lance 100 fois. Si elle est équilibrée, le nombre X de « pile » suit $\mathcal{B}(100\,;\,0{,}5)$. On rejette l'hypothèse « la pièce est équilibrée » si X sort de l'intervalle $[a\,;\,b]$ défini ci-dessous (seuil de 95 %). Arrondis au millième.

1. À la calculatrice, détermine a, le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$.
2. Détermine b, le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
3. Calcule $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

4. On obtient 63 « pile ». Que décides-tu ?

Exercice 7 – Le surbooking ★★★

Un avion a 100 places. La compagnie vend 105 billets ; chaque passager se présente avec la probabilité 0,92, indépendamment des autres. X compte les passagers présents. Arrondis au millième.

1. Donne la loi de X et calcule $E(X)$.
2. Calcule la probabilité que des passagers présents n'aient pas de place.
3. La compagnie veut que ce risque reste inférieur ou égal à 5 %. Combien de billets peut-elle vendre au plus ? Explique ce que fait le programme.

```
from math import comb
def risque(N):
    p = 0.92
    return 1 - sum(comb(N, k) * p**k * (1 - p)**(N - k) for k in range(101))
N = 100
while risque(N + 1) <= 0.05:
    N = N + 1
print(N)
```

Exercice 8 – Le dépistage groupé ★★★

Une infection touche 2 % d'une grande population. Pour économiser des tests, on mélange les prélèvements de k personnes : le mélange est positif dès qu'une personne au moins est infectée. Les personnes sont choisies au hasard, de façon indépendante.

1. Pour $k = 10$, calcule la probabilité que le mélange soit positif (arrondis au millième).
2. On veut que le mélange soit positif avec une probabilité au plus égale à 0,2. Quelle est la plus grande valeur de k possible ?
3. On forme 50 mélanges de 10 personnes. Y compte les mélanges positifs. Donne la loi de Y, $E(Y)$ arrondie au centième, et $P(Y \leqslant 5)$ arrondie au millième.

Exercice 9 – Une annonce à vérifier ★★★

Un fabricant annonce que 95 % de ses clients sont satisfaits. Une association interroge 200 clients choisis au hasard parmi un très grand nombre : 178 sont satisfaits. On suppose l'annonce exacte et on note X le nombre de clients satisfaits parmi les 200.

1. Justifie que X suit une loi binomiale ; donne $E(X)$.
2. À la calculatrice, détermine l'intervalle $[a\,;\,b]$: a plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$, b plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
3. Que peut conclure l'association ?
4. L'association aurait-elle pu conclure que l'annonce est vraie si elle avait trouvé 190 clients satisfaits ?

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}08)$. « $P(X \geqslant 1) = 10 \times 0{,}08 = 0{,}8$. »

b) « $0{,}85^n \leqslant 0{,}02 \iff n \ln 0{,}85 \leqslant \ln 0{,}02 \iff n \leqslant \dfrac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}85}$. »

c) « $0{,}88^n \leqslant 0{,}02 \iff n \geqslant 30{,}60$, donc le plus petit entier est $n = 30$. »

d) $X \sim \mathcal{B}(12\,;\,0{,}3)$. « $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7^{12}$. »

e) « L'observation est dans l'intervalle de fluctuation : l'hypothèse est donc démontrée. »

f) « Au moins un succès avec une probabilité d'au moins 0,95, $p = 0{,}1$: $1 - 0{,}9^n \geqslant 0{,}95 \iff 0{,}9^n \geqslant 0{,}05$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. Le plus petit entier n tel que $0{,}7^n \leqslant 0{,}05$ est :

   A 8 **B** 2 **C** 9 **D** 1

2. On répète 6 fois une épreuve de succès 0,15. La probabilité d'au moins un succès vaut environ :

   A 0,623 **B** 0,9 **C** 0,377 **D** 0,15

3. $0{,}6^n < 0{,}01$ équivaut à :

   A $n < \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$ **B** $n > \dfrac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}01}$ **C** $n > \dfrac{0{,}01}{0{,}6}$ **D** $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$

4. Une boucle `while p < 0.95: n = n + 1` (où `p` est recalculé avec `n`) s'arrête :

   A au dernier n tel que $p < 0{,}95$ **B** au premier n tel que $p \geqslant 0{,}95$ **C** quand $p = 0{,}95$ exactement **D** jamais

5. L'observation sort de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. On :

   A démontre que l'hypothèse est fausse **B** accepte l'hypothèse **C** refait l'expérience jusqu'à rentrer dans l'intervalle **D** rejette l'hypothèse, avec un risque d'environ 5 %

6. $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$. $P(X \geqslant 2)$ est égal à :

   A $1 - P(X \leqslant 1)$ **B** $1 - P(X = 0)$ **C** $1 - P(X \leqslant 2)$ **D** $P(X = 2)$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).