Corrigé – Loi binomiale : problèmes

Mathématiques – Terminale spécialité

Loi binomiale · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Au moins un, aucun, tous ★

Calcule la probabilité demandée ; donne la valeur exacte si elle est simple, sinon arrondis au millième.

a) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^5$
$\approx 0{,}410$

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{10}$
$\approx 0{,}401$

c) $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = 1 - \dfrac{16}{81} = \dfrac{65}{81}$

d) $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}98^{20}$
$\approx 0{,}332$

e) $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

f) *Au moins deux : on retire aussi* $X = 1$.
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}8^6 - 6 \times 0{,}2 \times 0{,}8^5 = 1 - 0{,}262\,144 - 0{,}393\,216 = 0{,}34464$

g) $P(X = 0) = (1 - 0{,}15)^8 = 0{,}85^8$
$\approx 0{,}272$

h) Le contraire est « 7 succès », un seul chemin.
$P(X \leqslant 6) = 1 - P(X = 7) = 1 - 0{,}9^7$
$\approx 0{,}522$

Exercice 2 – Le plus petit entier n ★

Détermine le plus petit entier naturel n qui vérifie l'inégalité, en utilisant le logarithme népérien.

a) $0{,}9^n \leqslant 0{,}5$
$\iff n \ln 0{,}9 \leqslant \ln 0{,}5$ *(*ln *est croissante et* $\ln(q^n) = n \ln q$*)*
$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$ *(on divise par* $\ln 0{,}9 < 0$ *: le sens change)*
$\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$, donc le plus petit entier est $n = 7$.

b) $0{,}8^n < 0{,}01$
$\iff n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}01$ *(*ln *est croissante et* $\ln(q^n) = n \ln q$*)*
$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ *(on divise par* $\ln 0{,}8 < 0$ *: le sens change)*
$\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$, donc le plus petit entier est $n = 21$.

c) $1-0{,}7^n \geqslant 0{,}99$

$\iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}01$ *(on isole la puissance)*

$\iff n\ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}01$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7}$ *(on divise par $\ln 0{,}7<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} \approx 12{,}91$, donc le plus petit entier est $n=13$.

d) $0{,}95^n \leqslant 0{,}1$

$\iff n\ln 0{,}95 \leqslant \ln 0{,}1$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95}$ *(on divise par $\ln 0{,}95<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95} \approx 44{,}89$, donc le plus petit entier est $n=45$.

e) $1-0{,}6^n > 0{,}999$

$\iff 0{,}6^n < 0{,}001$ *(on isole la puissance)*

$\iff n\ln 0{,}6 < \ln 0{,}001$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}6}$ *(on divise par $\ln 0{,}6<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}6} \approx 13{,}52$, donc le plus petit entier est $n=14$.

f) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}05$

$\iff n\ln\dfrac{5}{6} \leqslant \ln 0{,}05$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln\dfrac{5}{6}}$ *(on divise par $\ln\dfrac{5}{6}<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln\dfrac{5}{6}} \approx 16{,}43$, donc le plus petit entier est $n=17$.

g) $0{,}99^n \leqslant 0{,}5$

$\iff n\ln 0{,}99 \leqslant \ln 0{,}5$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}99}$ *(on divise par $\ln 0{,}99<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}99} \approx 68{,}97$, donc le plus petit entier est $n=69$.

h) $1-0{,}75^n \geqslant 0{,}9$

$\iff 0{,}75^n \leqslant 0{,}1$ *(on isole la puissance)*

$\iff n\ln 0{,}75 \leqslant \ln 0{,}1$ *(ln est croissante et $\ln(q^n)=n\ln q$)*

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}75}$ *(on divise par $\ln 0{,}75<0$: le sens change)*

$\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}75} \approx 8{,}00$, donc le plus petit entier est $n=9$.

Exercice 3 – Lire le tableau de la calculatrice ★

1. On lit $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}440$.
   $P(X > 9) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0{,}440 = 0{,}56$.

2. Le contraire de $X \geqslant 13$ est $X \leqslant 12$.
   $P(X \geqslant 13) = 1 - P(X \leqslant 12) \approx 1 - 0{,}821 = 0{,}179$.

3. $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}016 \leqslant 0{,}025$ et $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}043 > 0{,}025$: $a = 5$.

4. $P(X \leqslant 15) \approx 0{,}974 < 0{,}975$ et $P(X \leqslant 16) \approx 0{,}988 \geqslant 0{,}975$: $b = 16$.

5. $P(5 \leqslant X \leqslant 16) = P(X \leqslant 16) - P(X \leqslant 4) \approx 0{,}988 - 0{,}016 = 0{,}972$.
   Dans au moins 95 % des cas, X prend une valeur entre 5 et 16 : c'est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Exercice 4 – Les visiteurs du site ★★

1. Le nombre d'acheteurs suit $\mathcal{B}(30\,;\,0{,}04)$.
   Contraire : aucun acheteur, $0{,}96^{30}$.
   $p_{30} = 1 - 0{,}96^{30} \approx 0{,}706$.

2. Le contraire de « au moins un achat » est « aucun achat » : n échecs, de probabilité $0{,}96^n$.
   $p_n = 1 - 0{,}96^n$.

3. $1 - 0{,}96^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}96^n \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}96 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}96}$ (car $\ln 0{,}96 < 0$).
   $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}96} \approx 112{,}81$: il faut au moins 113 visiteurs.

4. La boucle augmente n tant que $1 - 0{,}96^n < 0{,}99$; elle s'arrête au premier n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.
   Le programme affiche 113 : on retrouve le résultat de la question 3.

Exercice 5 – Les billets de tombola ★★

1. $X \sim \mathcal{B}(15\,;\,0{,}1)$.
   « Au moins deux » : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.
   $P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}9^{15} - 15 \times 0{,}1 \times 0{,}9^{14} \approx 0{,}451$.

2. $P(X = 0) = 0{,}9^n$ et $P(X = 1) = \dbinom{n}{1} \times 0{,}1 \times 0{,}9^{n-1} = 0{,}1n \times 0{,}9^{n-1}$.
   On retire ces deux probabilités à 1.
   L'expression mélange n et $0{,}9^n$: on ne peut pas isoler n avec le logarithme, on cherche le seuil avec un programme.

3. La fonction part de $n = 2$ et augmente n tant que $P(X \geqslant 2) < 0{,}9$.
   Elle renvoie 38 : il faut acheter au moins 38 billets pour avoir au moins deux billets gagnants avec une probabilité d'au moins 0,9.

Exercice 6 – La pièce est-elle équilibrée ? ★★

1. $P(X \leqslant 39) \approx 0{,}018$ et $P(X \leqslant 40) \approx 0{,}028$: $a = 40$.

2. $P(X \leqslant 59) \approx 0{,}972$ et $P(X \leqslant 60) \approx 0{,}982$: $b = 60$.

3. $P(40 \leqslant X \leqslant 60) = P(X \leqslant 60) - P(X \leqslant 39) \approx 0{,}965$ (au moins 0,95).

4. 63 n'est pas dans $[40\,;\,60]$.
   On rejette l'hypothèse « la pièce est équilibrée » au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

Exercice 7 – Le surbooking ★★★

1. 105 passagers, succès « il se présente », $p = 0{,}92$, indépendance : $X \sim \mathcal{B}(105\,;\,0{,}92)$.
   $E(X) = 105 \times 0{,}92 = 96{,}6$ passagers en moyenne.

2. Il manque des places si $X > 100$, c'est-à-dire $X \geqslant 101$.
   $P(X > 100) = 1 - P(X \leqslant 100) \approx 0{,}071$.

3. `risque(N)` calcule $1 - P(X \leqslant 100)$ quand on vend N billets.
   La boucle augmente N tant que le risque avec un billet de plus reste $\leqslant 0{,}05$; le programme affiche 104.
   Vérification : avec 104 billets, le risque vaut environ $0{,}029$; avec 105, environ $0{,}071 > 0{,}05$.
   La compagnie peut vendre au plus 104 billets.

Exercice 8 – Le dépistage groupé ★★★

1. Le mélange est négatif si les 10 personnes sont saines : $0{,}98^{10}$.
   $P(\text{positif}) = 1 - 0{,}98^{10} \approx 0{,}183$.

2. $1 - 0{,}98^k \leqslant 0{,}2 \iff 0{,}98^k \geqslant 0{,}8 \iff k \ln 0{,}98 \geqslant \ln 0{,}8$
   $\iff k \leqslant \dfrac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98}$ (on divise par $\ln 0{,}98 < 0$: le sens change).
   $\dfrac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98} \approx 11{,}05$: ici on cherche le plus **grand** entier, $k = 11$.

3. Les 50 mélanges sont indépendants, chacun positif avec la probabilité $q = 1 - 0{,}98^{10}$: $Y \sim \mathcal{B}(50\,;\,q)$.
   $E(Y) = 50q \approx 9{,}15$: environ 9 mélanges à retester en moyenne.
   À la calculatrice (avec q non arrondi) : $P(Y \leqslant 5) \approx 0{,}085$.

Exercice 9 – Une annonce à vérifier ★★★

1. 200 clients choisis dans une très grande population : 200 épreuves assimilées à des tirages avec remise, identiques et indépendantes, de succès « satisfait », $p = 0{,}95$.
   $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}95)$ et $E(X) = 200 \times 0{,}95 = 190$.

2. $P(X \leqslant 183) \approx 0{,}024$ et $P(X \leqslant 184) \approx 0{,}044$: $a = 184$.
   $P(X \leqslant 195) \approx 0{,}974$ et $P(X \leqslant 196) \approx 0{,}991$: $b = 196$.

3. $178 < 184$: l'observation sort de l'intervalle $[184\,;\,196]$.
   Au seuil de 95 %, on rejette l'annonce : avec 95 % de satisfaits, un résultat aussi bas serait très rare.

4. 190 est dans $[184\,;\,196]$: on ne rejette pas l'annonce.
   Mais cela ne prouve pas qu'elle est vraie : avec 94 % de satisfaits, par exemple, 190 serait aussi très plausible.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *np est l'espérance, pas une probabilité.*
$P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}92^{10} \approx 0{,}566$.

b) $\ln 0{,}85 < 0$ *: en divisant, le sens change.*
$n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}85} \approx 24{,}07$, donc $n \geqslant 25$.

c) *Il faut l'entier supérieur :* $n = 30$ *ne vérifie pas l'inégalité.*
Le plus petit entier est $n = 31$.

d) $1 - P(X = 0)$ *donne « au moins un » : il faut aussi retirer* $P(X = 1)$.
$P(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}7^{12} - 12 \times 0{,}3 \times 0{,}7^{11} \approx 0{,}915$.

e) *Une observation dans l'intervalle ne démontre rien.*
On dit seulement qu'on ne rejette pas l'hypothèse au seuil de 95 %.

f) *En retirant* 1 *puis en multipliant par* -1*, le sens change.*
$0{,}9^n \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9} \approx 28{,}43$, donc $n \geqslant 29$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. Le plus petit entier n tel que $0{,}7^n \leqslant 0{,}05$ est :

Réponse C : 9
$n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} \approx 8{,}40$, donc $n = 9$ (on arrondit à l'entier supérieur).

2. On répète 6 fois une épreuve de succès 0,15. La probabilité d'au moins un succès vaut environ :

Réponse A : 0,623
$1 - 0{,}85^6 \approx 0{,}623$; $0{,}9 = 6 \times 0{,}15$ n'est pas une probabilité ; $0{,}377$ est la probabilité d'aucun succès.

3. $0{,}6^n < 0{,}01$ équivaut à :

Réponse D : $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$
$n \ln 0{,}6 < \ln 0{,}01$, puis on divise par $\ln 0{,}6 < 0$: le sens change.

4. Une boucle `while p < 0.95: n = n + 1` (où `p` est recalculé avec `n`) s'arrête :

Réponse B : au premier n tel que $p \geqslant 0{,}95$
La boucle tourne tant que la condition est vraie et s'arrête dès qu'elle devient fausse.

5. L'observation sort de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. On :

Réponse D : rejette l'hypothèse, avec un risque d'environ 5 %
On rejette l'hypothèse, mais on peut se tromper : c'est le risque d'environ 5 %.

6. $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$. $P(X \geqslant 2)$ est égal à :

Réponse A : $1 - P(X \leqslant 1)$
Le contraire de « au moins 2 » est « au plus 1 ».

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).