Loi binomiale : calculs – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Loi binomiale · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice autorisée. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- Pour justifier : deux issues (succès de probabilité p), n répétitions **identiques et indépendantes**. Sans remise dans une petite population : pas de loi binomiale.
- p est la probabilité de ce que X compte : si X compte les échecs, son paramètre est $1-p$.
- $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$: sans le coefficient binomial, on n'a qu'un seul chemin.
- $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1)$: l'entier change quand on passe au contraire.
- « Moins de k » se traduit par $X \leqslant k-1$; « au plus k » par $X \leqslant k$.
- $V(X)=np(1-p)$ est la variance ; l'écart-type est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exercice 1 – Reconnaître une loi binomiale ★

Dans chaque cas, dis si X suit une loi binomiale. Si oui, nomme le succès et donne les paramètres ; sinon, dis ce qui manque.

a) On lance 10 fois un dé équilibré ; X compte les 1 obtenus.

b) Une urne contient 3 boules rouges et 7 blanches. On tire 5 boules avec remise ; X compte les boules blanches.

c) Même urne, mais on tire 5 boules successivement **sans remise** ; X compte les boules blanches.

d) On sème 20 graines ; chacune germe avec la probabilité 0,85, indépendamment des autres. X compte les graines qui **ne germent pas**.

e) On lance une pièce jusqu'à obtenir « pile » ; X compte les lancers effectués.

f) Un standard reçoit 8 appels ; chacun est une réclamation avec la probabilité 0,3, indépendamment des autres. X compte les réclamations.

g) Dans un stock de 5 000 téléphones dont 2 % sont défectueux, on en prélève 50 ; on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. X compte les défectueux.

h) On lance 6 fois deux dés équilibrés ; X compte les lancers dont la somme vaut 10.

Exercice 2 – Calculer P(X = k) avec la formule ★

Calcule avec $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Donne la valeur exacte quand elle est simple, sinon arrondis au millième.

a) $X \sim \mathcal{B}(4\,;\,0{,}5)$: calcule $P(X=2)$.

b) $X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}2)$: calcule $P(X=0)$.

c) $X \sim \mathcal{B}(3\,;\,\dfrac{1}{3})$: calcule $P(X=1)$.

d) $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}3)$: calcule $P(X=3)$.

e) $X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}6)$: calcule $P(X=8)$.

f) $X \sim \mathcal{B}(7\,;\,0{,}4)$: calcule $P(X = 2)$.

g) $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}05)$: calcule $P(X = 1)$.

h) $X \sim \mathcal{B}(12\,;\,0{,}5)$: calcule $P(X = 6)$.

Exercice 3 – Au plus, au moins, entre ★

$X \sim \mathcal{B}(25\,;\,0{,}4)$. Écris chaque probabilité à l'aide de $P(X \leqslant \dots)$, puis calcule-la à la calculatrice, arrondie au millième.

a) $P(X \leqslant 8)$

b) $P(X < 8)$

c) $P(X \geqslant 12)$

d) $P(X > 15)$

e) $P(7 \leqslant X \leqslant 13)$

f) $P(5 < X < 10)$

g) $P(X \geqslant 1)$

h) $P(X \geqslant 10)$

Exercice 4 – Les tirs au but ★★

Une joueuse marque chaque tir au but avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres tirs. Elle tire 6 fois. X compte les buts marqués. Arrondis au millième.

1. Justifie que X suit une loi binomiale ; donne ses paramètres.
2. Calcule la probabilité qu'elle marque les 6 tirs.
3. Calcule $P(X = 4)$.
4. Calcule la probabilité qu'elle marque au moins 5 tirs.

Exercice 5 – La chaîne de production ★★

Un composant électronique est défectueux avec la probabilité 0,03. On prélève 200 composants dans une production très grande ; on assimile ce prélèvement à 200 tirages avec remise. X compte les composants défectueux. Arrondis au millième.

1. Donne la loi de X.
2. Calcule $E(X)$ et interprète.
3. Calcule $V(X)$, puis $\sigma(X)$.
4. Calcule à la calculatrice $P(X \leqslant 6)$ et $P(X > 10)$.

Exercice 6 – Retrouver n et p ★★

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, avec $E(X) = 12$ et $V(X) = 4{,}8$. Arrondis au millième.

1. Montre que $1 - p = \dfrac{V(X)}{E(X)}$, puis calcule p.
2. Calcule n.
3. Calcule $P(X = 12)$.
4. Calcule $\sigma(X)$.

Exercice 7 – Le tableau de la loi ★★

$X \sim \mathcal{B}(4\,;\,0{,}3)$. Donne les valeurs exactes.

1. Complète le tableau de la loi de X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					

2. Vérifie que la somme des probabilités vaut 1.
3. Calcule $E(X)$ à partir du tableau, puis avec la formule $E(X) = np$.
4. Quelle est la valeur de X la plus probable ?

Exercice 8 – Les fléchettes ★★★

Un joueur lance 10 fléchettes ; chacune atteint le centre avec la probabilité 0,25, indépendamment des autres. Il gagne 5 points par fléchette au centre et perd 1 point par fléchette hors du centre. X compte les fléchettes au centre et G est le total de points. Arrondis au millième.

1. Donne la loi de X.
2. Montre que $G = 6X - 10$.
3. Calcule la probabilité que le total de points soit strictement positif.
4. Calcule $E(G)$ et interprète.

Exercice 9 – Deux machines ★★★

Une usine fabrique des pièces sur deux machines : la machine A en produit 60 %, dont 2 % sont défectueuses ; la machine B produit le reste, dont 5 % sont défectueuses. Arrondis au millième.

1. On choisit une pièce au hasard. Montre que la probabilité qu'elle soit défectueuse vaut 0,032.
2. On prélève 50 pièces dans un stock assez grand pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise. Y compte les pièces défectueuses. Donne la loi de Y et $E(Y)$.
3. Calcule la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.
4. Calcule la probabilité qu'au moins deux pièces soient défectueuses.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige (arrondis au millième).

a) $X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}3)$. « $P(X=2) = 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 0{,}030\,87$. »

b) $X \sim \mathcal{B}(15\,;\,0{,}6)$. « $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X \leqslant 9)$. »

c) $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}1)$. « $\sigma(X) = 50 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 4{,}5$. »

d) « On tire 4 cartes sans remise dans un jeu de 32 ; X compte les cœurs : $X \sim \mathcal{B}(4\,;\,0{,}25)$. »

e) « Une ampoule dure plus de 1 000 h avec la probabilité 0,85. Sur 12 ampoules indépendantes, X compte celles qui tombent en panne avant 1 000 h : $X \sim \mathcal{B}(12\,;\,0{,}85)$. »

f) $X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}5)$. « $P(X < 3) = P(X \leqslant 3)$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $X \sim \mathcal{B}(6\,;\,0{,}5)$. $P(X=3)$ vaut :

   A $\dfrac{1}{64}$ **B** $\dfrac{5}{16}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** $\dfrac{3}{64}$

2. $X \sim \mathcal{B}(40\,;\,0{,}2)$. $V(X)$ vaut :

   A 8 **B** $\sqrt{6{,}4}$ **C** 32 **D** $6{,}4$

3. X suit une loi binomiale. $P(X \geqslant 4)$ est égal à :

   A $1 - P(X \leqslant 3)$ **B** $1 - P(X \leqslant 4)$ **C** $P(X \leqslant 4)$ **D** $1 - P(X = 4)$

4. Dans quel cas X suit-elle une loi binomiale ?

   A On tire 3 boules sans remise dans une urne de 8 ; X compte les rouges

   B On lance un dé jusqu'au premier 6 ; X compte les lancers

   C On lance 7 fois une pièce truquée ; X compte les « face » **D** On lance deux dés ; X est la somme

5. $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec $E(X) = 6$ et $V(X) = 4{,}2$. Alors :

   A $n = 20$ et $p = 0{,}3$ **B** $n = 20$ et $p = 0{,}7$ **C** $n = 60$ et $p = 0{,}1$ **D** $n = 10$ et $p = 0{,}6$

6. $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}1)$. $P(X = 0)$ vaut environ :

   A 0 **B** $0{,}1$ **C** $0{,}651$ **D** $0{,}349$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).