Corrigé – Loi binomiale : calculs

Mathématiques – Terminale spécialité

Loi binomiale · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Reconnaître une loi binomiale ★

Dans chaque cas, dis si X suit une loi binomiale. Si oui, nomme le succès et donne les paramètres ; sinon, dis ce qui manque.

a) Succès : « obtenir 1 », $p = \dfrac{1}{6}$.
Les 10 lancers sont identiques et indépendants.
$X \sim \mathcal{B}(10\,;\,\dfrac{1}{6})$.

b) Succès : « tirer une blanche », $p = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$ (ce que X compte).
Avec remise : tirages identiques et indépendants.
$X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0{,}7)$.

c) *Pas de loi binomiale.*
Sans remise dans une urne de 10 boules, la composition change à chaque tirage : les tirages ne sont pas indépendants.

d) Succès : « la graine ne germe pas », $p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$. 20 épreuves identiques et indépendantes.
$X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}15)$.

e) *Pas de loi binomiale.*
Le nombre de lancers n'est pas fixé à l'avance : il n'y a pas n répétitions.

f) Succès : « l'appel est une réclamation », $p = 0{,}3$. 8 épreuves identiques et indépendantes.
$X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}3)$.

g) Succès : « le téléphone est défectueux », $p = 0{,}02$.
Le stock est grand : 50 tirages assimilés à des tirages avec remise, identiques et indépendants.
$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}02)$.

h) Somme 10 : $(4\,;6)$, $(5\,;5)$, $(6\,;4)$, soit 3 issues sur 36 : $p = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.
6 épreuves identiques et indépendantes : $X \sim \mathcal{B}(6\,;\,\dfrac{1}{12})$.

Exercice 2 – Calculer $\mathrm{P(X = k)}$ avec la formule ★

Calcule avec $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Donne la valeur exacte quand elle est simple, sinon arrondis au millième.

a) $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^2$
$= 6 \times 0{,}5^4$
$= 0{,}375$

b) $P(X=0) = \binom{5}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^5$
$= 0{,}8^5$
$= 0{,}327\,68 \approx 0{,}328$

c) $P(X=1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= \frac{4}{9}$

d) $P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7$
$= 120 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7$
$\approx 0{,}267$

e) $P(X=8) = \binom{8}{8} \times 0{,}6^8 \times 0{,}4^0$
$= 0{,}6^8$
$\approx 0{,}017$

f) $P(X=2) = \binom{7}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^5$
$= 21 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^5$
$\approx 0{,}261$

g) $P(X=1) = \binom{20}{1} \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^{19}$
$= 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19}$
$\approx 0{,}377$

h) $P(X=6) = \binom{12}{6} \times 0{,}5^6 \times 0{,}5^6$
$= 924 \times 0{,}5^{12}$
$\approx 0{,}226$

Exercice 3 – Au plus, au moins, entre ★

$X \sim \mathcal{B}(25\,;\,0{,}4)$. Écris chaque probabilité à l'aide de $P(X \leqslant \dots)$, puis calcule-la à la calculatrice, arrondie au millième.

a) $P(X \leqslant 8) = P(X \leqslant 8)$
$\approx 0{,}274$

b) $P(X < 8) = P(X \leqslant 7)$
$\approx 0{,}154$

c) $P(X \geqslant 12) = 1 - P(X \leqslant 11)$
$= 1 - 0{,}7323$
$\approx 0{,}268$

d) $P(X > 15) = 1 - P(X \leqslant 15)$
$= 1 - 0{,}9868$
$\approx 0{,}013$

e) $P(7 \leqslant X \leqslant 13) = P(X \leqslant 13) - P(X \leqslant 6)$
$= 0{,}9222 - 0{,}0736$
$\approx 0{,}849$

f) $P(5 < X < 10) = P(X \leqslant 9) - P(X \leqslant 5)$
$= 0{,}4246 - 0{,}0294$
$\approx 0{,}395$

g) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^{25}$
$0{,}6^{25} \approx 0{,}0000028$, donc $P(X \geqslant 1) \approx 1{,}000$ au millième près (presque certain, mais pas égal à 1).

h) $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9)$
$= 1 - 0{,}4246$
$\approx 0{,}575$

Exercice 4 – Les tirs au but ★★

1. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès « elle marque », $p = 0{,}8$.
   Les 6 tirs sont identiques et indépendants, et X compte les succès : $X \sim \mathcal{B}(6\,;\,0{,}8)$.

2. Un seul chemin : $P(X = 6) = 0{,}8^6 = 0{,}262144 \approx 0{,}262$.

3. $P(X = 4) = \binom{6}{4} \times 0{,}8^4 \times 0{,}2^2$
   $P(X = 4) = 15 \times 0{,}409\,6 \times 0{,}04 = 0{,}24576 \approx 0{,}246$.

4. « Au moins 5 » : $X = 5$ ou $X = 6$.
   $P(X = 5) = \binom{6}{5} \times 0{,}8^5 \times 0{,}2 = 6 \times 0{,}327\,68 \times 0{,}2 = 0{,}393216$.
   $P(X \geqslant 5) = 0{,}393216 + 0{,}262144 = 0{,}65536 \approx 0{,}655$.

Exercice 5 – La chaîne de production ★★

1. Succès : « le composant est défectueux », $p = 0{,}03$; 200 tirages identiques et indépendants.
   $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}03)$.

2. $E(X) = np = 200 \times 0{,}03 = 6$.
   Sur un grand nombre de prélèvements de 200 composants, on trouve en moyenne 6 composants défectueux.

3. $V(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}03 \times 0{,}97 = 5{,}82$.
   $\sigma(X) = \sqrt{5{,}82} \approx 2{,}412$.

4. $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}606$.
   $P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) \approx 1 - 0{,}960 = 0{,}040$.

Exercice 6 – Retrouver n et p ★★

1. $\dfrac{V(X)}{E(X)} = \dfrac{np(1-p)}{np} = 1-p$ (on simplifie par $np \neq 0$).
   $1-p = \dfrac{4{,}8}{12} = 0{,}4$, donc $p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

2. $np = 12$, donc $n = \dfrac{12}{0{,}6} = 20$.

3. $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}6)$.
   $P(X=12) = \binom{20}{12} \times 0{,}6^{12} \times 0{,}4^{8}$
   $P(X=12) = 125970 \times 0{,}6^{12} \times 0{,}4^{8} \approx 0{,}180$.

4. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}191$.

Exercice 7 – Le tableau de la loi ★★

1. $P(X=k) = \binom{4}{k} \times 0{,}3^{k} \times 0{,}7^{4-k}$, avec les coefficients $1, 4, 6, 4, 1$ (ligne 4 du triangle de Pascal).
   Par exemple $P(X=1) = 4 \times 0{,}3 \times 0{,}7^{3} = 4 \times 0{,}3 \times 0{,}343 = 0{,}4116$.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

2. $0{,}2401 + 0{,}4116 + 0{,}2646 + 0{,}0756 + 0{,}0081 = 1$.

3. $E(X) = 0 \times 0{,}2401 + 1 \times 0{,}4116 + 2 \times 0{,}2646 + 3 \times 0{,}0756 + 4 \times 0{,}0081$
   $E(X) = 0{,}4116 + 0{,}5292 + 0{,}2268 + 0{,}0324 = 1{,}2$.
   Avec la formule : $4 \times 0{,}3 = 1{,}2$: on retrouve la même valeur.

4. La plus grande probabilité du tableau est $0{,}4116$, pour $k = 1$: la valeur la plus probable est 1.

Exercice 8 – Les fléchettes ★★★

1. Succès : « la fléchette atteint le centre », $p = 0{,}25$; 10 lancers identiques et indépendants :
   $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}25)$.

2. X fléchettes rapportent $5X$ points ; les $10 - X$ autres en retirent $10 - X$.
   $G = 5X - (10 - X) = 5X - 10 + X = 6X - 10$.

3. $G > 0 \iff 6X - 10 > 0 \iff X > \dfrac{10}{6}$; comme X est entier, $G > 0 \iff X \geqslant 2$.
   $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$, avec $P(X=0) = 0{,}75^{10}$ et $P(X=1) = 10 \times 0{,}25 \times 0{,}75^{9}$.
   $P(G > 0) = 1 - 0{,}75^{10} - 10 \times 0{,}25 \times 0{,}75^{9} \approx 0{,}756$.

4. $E(X) = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$, et $E(6X - 10) = 6E(X) - 10$ (linéarité).
   $E(G) = 6 \times 2{,}5 - 10 = 5$.
   Sur un grand nombre de séries de 10 fléchettes, le joueur gagne en moyenne 5 points par série.

Exercice 9 – Deux machines ★★★

1. Probabilités totales (deux chemins mènent à « défectueuse ») :
   $p = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$.

2. 50 tirages identiques et indépendants, succès « la pièce est défectueuse » de probabilité 0,032 :
   $Y \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}032)$.
   $E(Y) = 50 \times 0{,}032 = 1{,}6$.

3. $P(Y = 0) = (1 - 0{,}032)^{50} = 0{,}968^{50} \approx 0{,}197$.

4. Contraire : au plus une.
   $P(Y \geqslant 2) = 1 - P(Y \leqslant 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$.
   $P(Y = 1) = 50 \times 0{,}032 \times 0{,}968^{49} \approx 0{,}325$.
   $P(Y \geqslant 2) \approx 0{,}478$ (calculé sans arrondir les étapes).

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige (arrondis au millième).

a) *C'est la probabilité d'un seul chemin : il manque le coefficient binomial.*
$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 10 \times 0{,}030\,87 = 0{,}3087 \approx 0{,}309$.

b) $1 - P(X \leqslant 9) = P(X \geqslant 10)$ *: la valeur 9 est perdue.*
$P(X \geqslant 9) = 1 - P(X \leqslant 8) \approx 0{,}610$.

c) $np(1-p)$ *est la variance, pas l'écart-type.*
$V(X) = 4{,}5$ et $\sigma(X) = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}121$.

d) *Sans remise dans un jeu de 32 cartes, les tirages ne sont pas indépendants.*
Après un cœur, il ne reste que 7 cœurs sur 31 cartes : X ne suit pas une loi binomiale.

e) X *compte les pannes : le succès est « tomber en panne avant 1 000 h ».*
$p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, donc $X \sim \mathcal{B}(12\,;\,0{,}15)$.

f) *« Moins de 3 » exclut 3 :* $X < 3 \iff X \leqslant 2$.
$P(X \leqslant 2) = \dfrac{1 + 8 + 28}{256} = \dfrac{37}{256} \approx 0{,}145$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $X \sim \mathcal{B}(6\,;\,0{,}5)$. $P(X = 3)$ vaut :

Réponse B : $\dfrac{5}{16}$
$\binom{6}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16}$; $\dfrac{1}{64}$ n'est qu'un chemin.

2. $X \sim \mathcal{B}(40\,;\,0{,}2)$. $V(X)$ vaut :

Réponse D : 6,4
$V(X) = 40 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 6{,}4$; 8 est l'espérance.

3. X suit une loi binomiale. $P(X \geqslant 4)$ est égal à :

Réponse A : $1 - P(X \leqslant 3)$
Le contraire de $X \geqslant 4$ est $X \leqslant 3$.

4. Dans quel cas X suit-elle une loi binomiale ?

Réponse C : On lance 7 fois une pièce truquée ; X compte les « face »
Seul le lancer de la pièce a un nombre fixé de répétitions identiques et indépendantes à deux issues.

5. $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec $E(X) = 6$ et $V(X) = 4{,}2$. Alors :

Réponse A : $n = 20$ et $p = 0{,}3$
$1 - p = \dfrac{4{,}2}{6} = 0{,}7$, donc $p = 0{,}3$ et $n = \dfrac{6}{0{,}3} = 20$.

6. $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}1)$. $P(X = 0)$ vaut environ :

Réponse D : 0,349
$P(X = 0) = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$; 0,651 est $P(X \geqslant 1)$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).