49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Proposition vraie ou fausse, contre-exemple

À retenir : « Pour tout » faux : un seul contre-exemple suffit, pris dans l'ensemble indiqué et vérifié. « Pour tout » vrai : un calcul général. « Il existe » vrai : un exemple. Des exemples ne prouvent jamais un « pour tout ».

Ex. 1 ★☆☆ **Proposition ou pas ?** — Automatismes. Dis si la phrase est une proposition. Si c'est le cas, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie.

(a) « $4 \times 9 = 36$ »

(b) « Calcule 12×15. »

(c) « $3x + 1$ »

(d) « 51 est un nombre premier. »

(e) « $\sqrt{64} = 8$ »

(f) « $-5 > -2$ »

Ex. 2 ★☆☆ **Un contre-exemple suffit** — Automatismes. Chaque proposition est fausse. Donne un contre-exemple pris dans l'ensemble indiqué, et vérifie-le par le calcul.

(a) « Pour tous réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. »

(b) « Pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. »

(c) « Pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x} < x$. »

(d) « Un nombre premier est impair. » Fais d'abord apparaître le quantificateur caché.

(e) « Le carré d'un réel est strictement plus grand que ce réel. » Fais d'abord apparaître le quantificateur caché.

(f) « Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = x$. »

(g) « Pour tout entier naturel n, $2n + 1 > n + 1$. »

Ex. 3 ★★☆ **Une proposition qui dépend de n** — Pour un entier n, on note $P(n)$: « $n^2 + 3$ est un multiple de 4 ».

(a) Dis si $P(5)$ est vraie, puis si $P(6)$ est vraie. Justifie par un calcul.

(b) Inès vérifie que $P(1)$, $P(3)$ et $P(7)$ sont vraies. Elle conclut : « pour tout entier n impair, $P(n)$ est vraie, c'est démontré ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Démontre que pour tout entier n impair, $P(n)$ est vraie. Écris $n = 2k + 1$, avec k un entier.

(d) Démontre que pour tout entier n pair, $n^2 + 3$ est impair. Déduis-en si $P(n)$ est vraie quand n est pair.

Ex. 4 ★★☆ **Démontrer, illustrer ou réfuter** — Justifie chaque réponse par une démonstration, un exemple ou un contre-exemple vérifié, selon le cas.

(a) « Pour tout réel x, $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$. » Vrai ou faux ?

(b) « Il existe un réel x non nul tel que $x^2 = 2x$. » Vrai ou faux ?

(c) Malo affirme que « pour tout entier naturel n, $n^3 \geqslant n$ » est fausse. Son contre-exemple : $n = -2$, car $(-2)^3 = -8$ et $-8 < -2$. A-t-il raison ? Justifie.

(d) « Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant x^2 - 4$. » Vrai ou faux ?

Ex. 5 ★★★ **Le piège de $n^2 + n + 41$** — Pour un entier naturel n, on note $P(n)$: « $n^2 + n + 41$ est un nombre premier ».

(a) Calcule $n^2 + n + 41$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Montre que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

(b) Léa en conclut : « Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie. » Calcule $40^2 + 40 + 41$ et 41^2, puis dis si Léa a raison. Justifie.

(c) Montre, sans calculatrice, que $41^2 + 41 + 41$ n'est pas un nombre premier.

(d) Démontre que pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 41$ est impair. Distingue le cas n pair et le cas n impair.

Ex. 6 ★★★ **Un nombre, son carré, son inverse** — Justifie chaque réponse par une démonstration ou par un contre-exemple vérifié.

(a) Démontre que pour tout réel x, $x^2 \geqslant 2x - 1$.

(b) Déduis-en que pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

(c) « Pour tout réel x non nul, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Zoé teste $x = 2$, $x = 4$ et $x = 0{,}5$, puis affirme : « Pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} > 2$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Nombres premiers et parité** — Justifie chaque réponse par une démonstration, un exemple ou un contre-exemple vérifié, selon le cas.

(a) « La somme de deux nombres premiers est toujours paire. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) « Il existe deux nombres premiers dont la somme est 40. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Démontre que pour tous entiers a et b, les nombres $a + b$ et $a - b$ ont la même parité.

(d) Déduis-en que pour tous entiers a et b, le produit $(a + b)(a - b)$ est soit impair, soit un multiple de 4.

Ex. 7 **(suite)**

(e) Déduis-en que 2026 ne peut pas s'écrire $a^2 - b^2$, avec a et b entiers. Rappel : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

2. *« Pour tout » et « il existe »*

À retenir : « Pour tout » vrai : un calcul général ; faux : un contre-exemple vérifié. « Il existe » vrai : un exemple ; faux : échec pour toutes les valeurs. Repère le quantificateur caché et l'ensemble : $2x = 7$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

Ex. 8 ★☆☆ **Faire apparaître le quantificateur caché** — Réécris chaque phrase avec « pour tout » ou « il existe », écrits en mots, en nommant la variable. Tu n'as pas à dire si la phrase est vraie.

(a) « La somme de deux entiers pairs est paire. »

(b) « Certains entiers sont à la fois multiples de 3 et de 5. »

(c) « La valeur absolue d'un réel est positive ou nulle. »

(d) « Un nombre premier peut être pair. »

(e) « Un rectangle a des diagonales de même longueur. »

(f) « L'équation $3x + 1 = 0$ a une solution réelle. »

Ex. 9 ★☆☆ **Exemple, contre-exemple ou démonstration** — Vrai ou faux ? Justifie : par un exemple, par un contre-exemple vérifié ou par un calcul valable pour toutes les valeurs.

(a) « Il existe un entier n tel que $3n - 4 = 29$. »

(b) « Pour tout réel x, $2x > x$. »

(c) « Pour tout entier naturel k, $10k + 5$ est un multiple de 5. »

(d) « Il existe un réel x tel que $x^2 = -9$. »

(e) « Pour tout entier n, $(n+1)^2 = n^2 + 1$. »

(f) « Il existe un triangle rectangle dont les côtés mesurent 5, 12 et 13. »

Ex. 10 ★★☆ **L'ensemble change tout** — On considère les propositions P : « il existe un nombre x tel que $3x = 10$ » et Q : « pour tout nombre x, $5x \geqslant 5$ ». Leur vérité dépend de l'ensemble dans lequel on prend x.

(a) On prend x dans $\mathbb{Z}$. La proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(b) On prend x dans $\mathbb{Q}$. La proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(c) Mehdi affirme : « Dans $\mathbb{N}^*$, Q est fausse : contre-exemple $x = -1$. » A-t-il raison ? Justifie, puis dis si Q est vraie dans $\mathbb{N}^*$.

(d) On prend x dans $\mathbb{N}$. La proposition Q est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

Ex. 11 ★★☆ **Des exemples ne prouvent rien** — Pour un entier k, on note $P(k)$: « $(k+1)^2 - k^2$ est impair » et $Q(k)$: « $(k+1)^2 - k^2$ est un multiple de 7 ».

(a) Calcule $(k+1)^2 - k^2$ pour $k = 4$. La proposition $P(4)$ est-elle vraie ?

(b) Yanis teste $k = 0, 1, 2, 3$, trouve chaque fois un nombre impair et conclut : « pour tout entier k, $P(k)$ est vraie ». Est-ce une preuve ? Justifie.

(c) Démontre que, pour tout entier k, $P(k)$ est vraie.

(d) Tom affirme : « $Q(1)$ est fausse, donc il n'existe aucun entier k tel que $Q(k)$ soit vraie. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Quand un « il existe » est faux** — Pour tout entier n, on pose $A(n) = n^2 + n$. Rédige chaque réponse avec soin.

(a) Démontre que la proposition « il existe un entier n tel que $A(n)$ est un multiple de 10 » est vraie.

(b) Lina affirme : « Pour un « il existe » vrai, il y a un seul entier qui convient : celui de la question précédente. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Démontre que pour tout entier n, $A(n)$ est pair. Distingue deux cas : $n = 2k$ et $n = 2k + 1$, avec k entier.

(d) La proposition « il existe un entier n tel que $n^2 + n + 7$ est pair » est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Sommes d'entiers consécutifs** — Inès étudie des sommes d'entiers consécutifs, comme $7 + 8 + 9$. Des entiers consécutifs s'écrivent n, $n+1$, $n+2$, … avec n entier.

(a) Réécris la phrase « la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 » avec « pour tout », puis démontre-la.

(b) Inès affirme : « De même, la somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) La proposition « il existe quatre entiers consécutifs dont la somme vaut 74 » est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(d) La proposition « il existe trois entiers consécutifs dont la somme vaut 74 » est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Un nombre et son carré : l'ensemble compte** — Noé affirme : « un nombre est toujours inférieur ou égal à son carré ». On étudie sa phrase selon l'ensemble dans lequel on prend ce nombre.

(a) Réécris la phrase de Noé avec « pour tout », pour un réel x. Est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(b) Démontre que pour tout entier naturel n, $n^2 \geqslant n$. Tu peux utiliser $n^2 - n = n(n-1)$.

(c) Démontre que pour tout entier $n \leqslant -1$, on a aussi $n^2 \geqslant n$.

Ex. 14 **(suite)**

(d) La proposition « il existe un entier n tel que $n^2 < n$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifie. Dans quel ensemble, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, la phrase de Noé est-elle vraie ?

3. *Et, ou, négation*

À retenir : Non $(x < a)$: $x \geqslant a$; non (P et Q) : (non P) ou (non Q), et inversement. Le « ou » est inclusif : vrai aussi si les deux sont vraies. Exemple : non ($x \geqslant 2$ et $x < 7$) : $x < 2$ ou $x \geqslant 7$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : écrire une négation** — x, y, t, z sont des réels ; n, a, b sont des entiers. Écris la négation de chaque proposition, sans utiliser le mot « non ».

(a) « $x < -6$ »

(b) « $y \geqslant -4$ »

(c) « n est pair »

(d) « le réel t est positif »

(e) « $x > -8$ et $x \leqslant 1$ »

(f) « a est pair et b est un multiple de 5 »

(g) « $z = 0$ ou $z > 10$ »

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux avec « et », « ou »** — Dis si chaque proposition est vraie ou fausse. Justifie.

(a) « 9 est un multiple de 3 ou 9 est le carré d'un entier »

(b) « 14 est pair et 14 est un multiple de 4 »

(c) « $\sqrt{16} = 4$ ou $2^3 = 6$ »

(d) « $-5 > -3$ et $(-5)^2 > (-3)^2$ »

(e) « $0{,}5 \times 0{,}5 > 0{,}5$ ou $0{,}5 \times 2 = 1$ »

(f) « 21 est un nombre premier ou 21 est pair »

Ex. 17 ★★☆ **Compter avec « et », « ou »** — On choisit un entier n de $E = \{1\,;2\,;\ldots\,;24\}$. On note P : « n est impair » et Q : « n est un multiple de 3 ».

(a) Complète le tableau avec V ou F.

n	P	Q	P et Q	P ou Q
15	?	?	?	?
10	?	?	?	?
7	?	?	?	?
6	?	?	?	?

(b) Donne la liste des entiers de E pour lesquels « P et Q » est vraie.

(c) Jade affirme : « P ou Q » est vraie pour 20 entiers de E, car E contient 12 impairs et 8 multiples de 3. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Écris la négation de « P ou Q » sans le mot « non », puis compte les entiers de E qui la vérifient.

Ex. 18 ★★☆ **Encadrement, intervalles et négation** — x est un réel. On note P : « $x \geqslant -1$ » et Q : « $x < 4$ ».

(a) Les réels -1 et 4 vérifient-ils « P et Q » ? Justifie.

(b) Écris l'ensemble des réels qui vérifient « P et Q » sous la forme d'un intervalle.

(c) Hugo écrit que la négation de « P et Q » est « $x < -1$ et $x \geqslant 4$ ». A-t-il raison ? Justifie et corrige si besoin.

(d) Détermine l'ensemble des réels qui vérifient « P ou Q ». Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Table de vérité et négation d'un « et »** — P et Q sont deux propositions, a et b sont des entiers. KLM est un triangle tel que $KL = LM = 5$ cm et $KM = 7$ cm.

(a) Complète la table de vérité.

P	Q	non P	non Q	P et Q	non P ou non Q
V	V	?	?	?	?
V	F	?	?	?	?
F	V	?	?	?	?
F	F	?	?	?	?

(b) Explique pourquoi cette table montre que « (non P) ou (non Q) » est la négation de « P et Q ».

(c) Malo affirme : « La négation de "a et b sont pairs" est "aucun des deux n'est pair" ». A-t-il raison ? Justifie avec $a = 4$ et $b = 7$, puis corrige.

(d) Écris la négation de « KLM est rectangle et KLM est isocèle », sans utiliser le mot « non ».

(e) Laquelle est vraie : la proposition de la question précédente ou sa négation ? Justifie par un calcul.

Ex. 20 ★★★ **Démontrer un « ou » sur des entiers** — a et b sont des entiers. On note R la proposition : « $a + b$ est pair ou $a \times b$ est pair ».

(a) Pour $a = 3$ et $b = 8$, la proposition R est-elle vraie ? Justifie.

(b) Pour $a = 6$ et $b = 10$, Lina dit : « R est fausse, car $a + b$ et $a \times b$ sont pairs tous les deux. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Démontre que R est vraie pour tous entiers a et b.

(d) Déduis-en que « $a + b$ est impair et $a \times b$ est impair » est fausse pour tous entiers a et b.

Ex. 21 ★★★ **Fonction affine, intervalles et négation** — x est un réel. On note P : « $3x - 4 < 5$ » et Q : « $-2x + 1 < -9$ ».

(a) Montre que P équivaut à « $x < 3$ » et que Q équivaut à « $x > 5$ ».

(b) Écris la négation de P, puis celle de Q, chacune sous la forme d'une inégalité sur x.

(c) Démontre que « P et Q » est fausse pour tout réel x.

Ex. 21 **(suite)**

(d) Écris la négation de « P ou Q » sans le mot « non », puis donne l'ensemble des réels qui la vérifient sous forme d'intervalle.

(e) Ilan affirme : « Les réels qui vérifient "P ou Q" forment $]-\infty\,;3[\cap]5\,;+\infty[$. » A-t-il raison ? Justifie et corrige.

4. *Implication, réciproque, équivalence*

À retenir : $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : P vraie et Q fausse. Sa réciproque $Q \Rightarrow P$ se démontre à part. Si les deux sont vraies : $P \Leftrightarrow Q$. Piège : « $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ » est fausse ($x = -1$).

Ex. 22 ★☆☆ **Vrai ou faux : des implications** — Vrai ou faux ? Justifie : si c'est vrai, démontre-le ; si c'est faux, donne un contre-exemple vérifié.

(a) Pour un réel x : si $x^2 = 4x$, alors $x = 4$.

(b) Pour un réel x : si $x \in [2\,;5]$, alors $x \in [0\,;6[$.

(c) Pour un réel x non nul : si $x < 2$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

(d) Pour un entier n : si n est premier, alors $n+2$ est premier.

(e) Pour deux événements A et B d'une même expérience aléatoire : si $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}5$, alors $P(A \cup B) = 1$.

(f) Pour un entier n : si $n+1$ est pair, alors n est impair.

Ex. 23 ★☆☆ **Le seul cas qui rend une implication fausse** — Un contre-exemple de « si P, alors Q » est un cas où P est vraie et Q est fausse.

(a) Complète la table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	?

(b) Pour « si n est impair, alors n est premier » : lequel des entiers 9, 10, 11 est un contre-exemple ? Justifie pour chacun.

(c) Pour « si $x < 3$, alors $x^2 < 9$ » : lequel des réels -4, 2, 5 est un contre-exemple ? Justifie pour chacun.

(d) Pour « si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un carré » : lequel est un contre-exemple, un carré, un losange de diagonales 6 cm et 8 cm ou un rectangle de 2 cm sur 9 cm ? Justifie.

(e) Pour « si n est pair, alors n est un multiple de 4 » : lequel des entiers 7, 8, 14 est un contre-exemple ? Justifie pour chacun.

Ex. 24 ★★☆ **L'implication, puis la réciproque** — Pour chaque implication : dis si elle est vraie, écris sa réciproque et dis si elle est vraie. Justifie chaque réponse, puis dis s'il y a équivalence.

(a) Pour un entier n : « si n est un multiple de 10, alors n est pair ».

(b) Pour un réel x : « si $x > 5$, alors $3x - 4 > 11$ ».

(c) Pour deux réels a et b : « si $a + b = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$ ».

(d) « Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales se coupent en leur milieu. »

Ex. 25 ★★☆ **Ben corrige des copies** — Chaque élève a fait une erreur de raisonnement. Trouve-la, explique-la et corrige-la.

(a) Noé écrit : $-2x + 6 > 10 \Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x > -2$.

(b) Inès écrit : « pour un réel x, $x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ ».

(c) Tom affirme que « si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 6 » est vraie, car sa réciproque est vraie et cela marche pour $n = 12$.

(d) Pour réfuter « si un triangle est équilatéral, alors il est isocèle », Sacha prend un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 6 cm, qui n'est pas isocèle.

(e) Pour le triangle KLM avec $KL = 6$, $LM = 10$ et $KM = 8$, Élise écrit : « $KL^2 + LM^2 = 136$ et $KM^2 = 64$, donc KLM n'est pas rectangle. »

Ex. 26 ★★★ **Pythagore dans les deux sens** — Le triangle RST a pour côtés $RS = 20$ cm, $ST = 29$ cm et $RT = 21$ cm. Le triangle UVW a pour côtés $UV = 9$ cm, $VW = 12$ cm et $UW = 16$ cm.

(a) Pour un triangle ABC, écris le théorème de Pythagore sous la forme « si…, alors… », puis sa réciproque. Que forment-ils ensemble ?

(b) Démontre que RST est rectangle et précise en quel sommet. Nomme le théorème que tu utilises.

(c) Lina écrit : « $UW^2 = 256$ et $UV^2 + VW^2 = 225$. Le théorème ne s'applique pas, on ne peut rien conclure. » Son raisonnement est-il correct ? Justifie.

(d) Mathis affirme : « pour tout triangle ABC, si $AB^2 + AC^2 > BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle ». Vrai ou faux ? Justifie avec le triangle RST.

Ex. 27 ★★★ **Carrés : quand peut-on écrire $\Leftrightarrow$?** — Dans tout l'exercice, x désigne un nombre réel.

(a) Démontre : si $x > 5$, alors $x^2 > 25$. Tu pourras développer $(x-5)(x+5)$.

(b) Écris la réciproque de l'implication de la question précédente. Est-elle vraie ? Justifie.

(c) Démontre : si $x < -5$, alors $x^2 > 25$. Quel est le signe de $x - 5$, et celui de $x + 5$?

(d) Hugo écrit : $(x-2)^2 = 49 \Leftrightarrow x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = 9$. Trouve l'erreur, puis résous correctement l'équation.

Ex. 28 ★★★ **Équivalence ou pas ? Entiers et losanges** — Dans les questions sur les entiers, n désigne un entier naturel.

(a) Démontre : si n est impair, alors $n^2 + 3$ est pair.

(b) Écris la réciproque de l'implication de la question précédente et démontre-la en supposant n pair. Conclus par une équivalence.

(c) Écris la réciproque de « si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires » (implication vraie, admise).

(d) $EFGH$ a ses diagonales perpendiculaires, qui se coupent en O : $OE = OG = 3$ cm, $OF = 1$ cm, $OH = 5$ cm. Calcule EF^2 et EH^2. Que peux-tu en déduire pour la réciproque ? Justifie.

(e) Yanis affirme : « n est multiple de 4 si et seulement si n^2 est multiple de 4 ; je l'ai vérifié pour $n = 4$, 8 et 12. » Est-ce exact ? Justifie.

5. *Contraposée*

À retenir : Contraposée de « si P, alors Q » : « si non Q, alors non P » (on nie les deux, « et » et « ou » s'échangent, puis on échange). Même vérité que l'implication, pas la réciproque ni « si non P, alors non Q ». Ex. : $x > 2 \Rightarrow x > 1$ devient $x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 2$.

Ex. 29 ★☆☆ **Écrire une contraposée** — Écris la contraposée de chaque implication. Ici, x, a et b sont des réels et n est un entier.

(a) « Si $x > 3$, alors $x^2 > 9$. »

(b) « Si n est un multiple de 6, alors n est pair. »

(c) « Si $x = 2$, alors $3x - 1 = 5$. »

(d) « Si $a \geqslant 4$ et $b \geqslant 4$, alors $a \times b \geqslant 16$. »

(e) « Si $x^2 = 16$, alors $x = 4$ ou $x = -4$. »

(f) « Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x^2 \leqslant 4$. »

Ex. 30 ★☆☆ **Réciproque, contraposée ou ni l'une ni l'autre ?** — On part de l'implication vraie : « Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un losange. »

(a) « Si un quadrilatère est un losange, alors c'est un carré. » Est-ce la réciproque ou la contraposée de l'implication de départ ? Justifie.

(b) « Si un quadrilatère n'est pas un losange, alors ce n'est pas un carré. » Est-ce la réciproque ou la contraposée ? Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Hugo affirme que « si un quadrilatère n'est pas un carré, alors ce n'est pas un losange » est la contraposée de l'implication de départ. A-t-il raison ? Justifie.

(d) Vrai ou faux ? « Si un quadrilatère n'est pas un carré, alors ce n'est pas un losange. » Justifie.

Ex. 31 ★★☆ **Démontrer par contraposée avec la parité** — Soit n un entier. On veut démontrer : « si n^2 est pair, alors n est pair ».

(a) Écris la contraposée de cette implication.

(b) Démontre cette contraposée en écrivant n à l'aide d'un entier k bien choisi.

(c) Conclus : pourquoi l'implication de départ est-elle démontrée ?

(d) Tom écrit : « Si $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair. J'ai démontré l'implication. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Un triangle qui n'est pas rectangle** — Le triangle RST vérifie $RS = 8$, $ST = 11$ et $RT = 14$ (en cm).

(a) Si RST était rectangle, quel côté serait l'hypoténuse et en quel sommet serait l'angle droit ? Justifie.

(b) Écris la contraposée du théorème de Pythagore adaptée à ce sommet.

(c) Démontre que le triangle RST n'est pas rectangle.

(d) Inès calcule $RS^2 + RT^2 = 260$ et $ST^2 = 121$, puis conclut : « RST n'est pas rectangle. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 33 ★★★ **Corriger deux élèves, puis démontrer** — Soit n un entier. On veut démontrer l'implication I : « si $7n + 4$ est pair, alors n est pair ». Léna rédige : « Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier, donc $7n + 4 = 14k + 4 = 2(7k + 2)$ est pair. Donc I est démontrée. »

(a) Léna a-t-elle démontré l'implication I ? Justifie.

(b) Malik propose de démontrer « si $7n + 4$ est impair, alors n est impair ». Est-ce la contraposée de I ? Justifie.

(c) Démontre I par contraposée. Précise ce que représente chaque lettre que tu introduis.

(d) En utilisant le travail de Léna et ta question précédente, dis si l'équivalence « $7n + 4$ est pair $\Leftrightarrow$ n est pair » est vraie. Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Un produit et une négation avec « ou »** — Dans les questions 1 à 3, x et y sont des réels positifs ou nuls. On étudie l'implication I : « si $x \times y > 36$, alors $x > 6$ ou $y > 6$ ».

(a) Clara affirme que la négation de « $x > 6$ ou $y > 6$ » est « $x \leqslant 6$ ou $y \leqslant 6$ ». A-t-elle raison ? Justifie avec $x = 8$ et $y = 3$, puis écris la contraposée de I.

(b) Démontre I par contraposée, en rédigeant.

(c) Écris la réciproque de I. Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Ici, x et y sont des réels quelconques. Montre que I devient fausse, et vérifie que ton contre-exemple rend aussi la contraposée fausse.

Ex. 35 ★★★ **Ce parallélogramme est-il un rectangle ?** — $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 12$, $BC = 9$ et une diagonale $AC = 16$ (en cm). On rappelle qu'un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

(a) On sait que : « si $ABCD$ est un rectangle, alors le triangle ABC est rectangle en B ». Écris la contraposée de cette implication.

(b) Démontre que $ABCD$ n'est pas un rectangle.

(c) Yanis écrit : « $16^2 \neq 12^2 + 9^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle. » Que faut-il corriger ? Justifie.

(d) On garde $AB = 12$ et $BC = 9$, mais on change la longueur AC. Pour quelle longueur AC le parallélogramme $ABCD$ est-il un rectangle ? Démontre-le.

6. *Disjonction des cas*

À retenir : Disjonction des cas : des cas qui couvrent tout ($n = 2k$ ou $n = 2k + 1$, k entier ; $x \geqslant 0$ ou $x < 0$), une conclusion par cas, puis je rassemble. Un seul cas ou des valeurs testées ne prouvent rien. Double produit : $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : écrire un entier avec k** — Dans tout l'exercice, n et k désignent des entiers. Réponds brièvement.

(a) Développe $(2k + 3)^2$ sans oublier le double produit.

(b) Pour $n = 2k$, écris $n^2 + 5n$ sous la forme $2 \times (\dots)$. Justifie que le facteur obtenu est un entier.

(c) Pour $n = 2k + 1$, écris $n^2 + 2n$ sous la forme $2 \times (\dots) + 1$.

(d) Samir écrit : « n est impair, donc $n = 2k + 1$ avec k réel. » Corrige sa phrase et explique pourquoi elle est fausse.

(e) Écris 37 puis -9 sous la forme $2k + 1$, en donnant l'entier k à chaque fois.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : signes, valeur absolue et cas** — x désigne un nombre réel. Réponds en justifiant brièvement.

(a) Les deux cas « $x > 0$ » et « $x < 0$ » couvrent-ils tous les réels ? Justifie et corrige si besoin.

(b) Écris $|x|$ sans valeur absolue lorsque $x < 0$.

(c) Écris $|x - 3|$ sans valeur absolue lorsque $x < 3$.

(d) Donne le signe de $(x - 2)(x + 5)$ lorsque $x > 2$.

(e) Donne le signe de $(x - 2)(x + 5)$ lorsque $-5 < x < 2$.

(f) Clara vérifie que $|x - 1| \geqslant x - 1$ pour $x = -2$, 0, 1 et 5. Elle en conclut que c'est vrai pour tout réel x. A-t-elle démontré la propriété ? Justifie.

Ex. 38 ★★☆ **Une preuve à compléter** — On veut démontrer que, pour tout entier n, $n^2 + 3n + 1$ est impair. Inès écrit : « Pour $n = 2k$, $n^2 + 3n + 1 = 4k^2 + 6k + 1 = 2(2k^2 + 3k) + 1$. C'est impair, donc c'est vrai pour tout entier n. »

(a) Quelle est l'erreur de raisonnement d'Inès ?

(b) Traite le cas où n est impair, en écrivant $n = 2k + 1$ avec k entier.

(c) Rédige la conclusion de la démonstration en rassemblant les cas.

(d) Déduis-en que l'équation $n^2 + 3n + 1 = 1000$ n'a aucune solution entière.

Ex. 39 ★★☆ **Valeur absolue : deux cas** — On veut démontrer que, pour tout réel x, $x + |x| \geqslant 0$.

(a) Dans le cas $x \geqslant 0$, simplifie $x + |x|$ et donne son signe.

(b) Dans le cas $x < 0$, simplifie $x + |x|$ et donne son signe.

(c) Explique pourquoi ces deux cas suffisent, puis conclus.

(d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x + |x| = 6$ en distinguant les deux cas.

Ex. 40 ★★★ **Entiers consécutifs et multiples de 8** — Dans tout l'exercice, n, k et m désignent des entiers. On étudie le produit de deux entiers consécutifs, puis le carré d'un entier impair.

(a) Romane calcule $n(n + 1)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et trouve toujours un nombre pair. Peut-elle conclure pour tout entier n ? Justifie.

(b) Démontre par disjonction des cas que, pour tout entier n, $n(n + 1)$ est pair.

(c) Déduis-en, sans faire de nouvelle disjonction des cas, que $n^2 - n$ est pair pour tout entier n.

(d) On suppose n impair et on écrit $n = 2k + 1$. Développe $n^2 - 1$, puis écris-le sous la forme $4k(k + 1)$.

(e) Démontre que, pour tout entier impair n, $n^2 - 1$ est un multiple de 8. Vérifie ensuite ce résultat avec $n = 11$.

Ex. 41 ★★★ **Le carré d'un entier et la division par 3** — Dans tout l'exercice, n, k et q désignent des entiers. On découpe les entiers en trois cas : $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.

(a) Écris 14 et -7 sous l'une des formes $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$. Pourquoi ces trois cas couvrent-ils tous les entiers ?

(b) Dans chacun des trois cas, écris n^2 sous la forme $3q$ ou $3q + 1$, en précisant l'entier q.

(c) Rédige la conclusion : quels restes n^2 peut-il laisser dans la division par 3 ? Lequel est impossible ?

(d) Mathis affirme : « 2 027 est le carré d'un entier. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide des questions précédentes.

(e) Démontre que, pour tout entier n, $n^2 + 1$ n'est pas un multiple de 3.

Ex. 42 ★★★ **Le produit $x \times |x|$** — Dans tout l'exercice, x désigne un nombre réel. On rappelle que $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$. On étudie le produit $x \times |x|$.

(a) Yanis affirme : « pour tout réel x, $x \times |x| = x^2$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

(b) Choisis deux cas qui couvrent tous les réels, et écris $x \times |x|$ sans valeur absolue dans chacun d'eux.

(c) Démontre que, pour tout réel x, $x \times |x|$ a le même signe que x.

(d) Résous l'équation $x \times |x| = -9$ en distinguant les cas. Combien a-t-elle de solutions ?

(e) Démontre que, pour tout réel x, $x \times |x| \leqslant x^2$.

7. *Raisonnement par l'absurde*

À retenir : Par l'absurde : je suppose la négation exacte de ce que je veux prouver (pour prouver $x < 3$: « supposons $x \geqslant 3$ »). J'arrive à une contradiction que je nomme, puis je conclus : « la supposition est fausse, donc… ». Ce n'est pas une contraposée.

Ex. 43 ★☆☆ **Écrire la bonne supposition** — On veut démontrer chaque proposition par l'absurde. Écris la phrase « Supposons que… » qui commence la démonstration.

(a) « Il n'existe pas de plus grand multiple de 5. »

(b) « L'entier n est impair. »

(c) « Le réel x vérifie $x > -2$. »

(d) « Le nombre 0 n'a pas d'inverse. »

(e) « $\sqrt{5} \neq 2{,}236$. »

(f) « Le réel a vérifie $-1 \leqslant a \leqslant 3$. »

Ex. 44 ★☆☆ **Quel raisonnement choisir ?** — Pour chaque proposition, indique le raisonnement le plus adapté (contre-exemple, contraposée, disjonction des cas ou absurde) et justifie ton choix en une phrase.

(a) « Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$. »

(b) « Il n'existe pas d'entier n tel que $2n = 7$. »

(c) « Pour tout entier n, $n^2 + n + 1$ est impair. »

(d) « Pour tout entier n, si n^2 est impair, alors n est impair. »

(e) « Pour tout réel x, $|x| \geqslant x$. »

Ex. 45 ★★☆ **Pas de plus petit réel strictement positif** — Lucas veut démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

(a) Lucas commence par : « Supposons qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif. » Explique son erreur, puis écris la bonne supposition.

(b) On note r le réel introduit par la bonne supposition. Montre que $\frac{r}{2}$ est un réel strictement positif et que $\frac{r}{2} < r$.

Ex. 45 (suite)

(c) Nomme la contradiction obtenue, puis rédige la conclusion.

(d) Lucas affirme : « J'ai fait une démonstration par contraposée. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 46 ★★☆ **$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel** — On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On admet la propriété suivante : le carré d'un entier impair est impair.

(a) Raisonnons par l'absurde. Écris la supposition en utilisant une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers et $q \neq 0$.

(b) Montre que $p^2 = 2q^2$. Déduis-en que p est pair, à l'aide de la propriété admise.

(c) On écrit $p = 2k$, avec k entier. Montre que $q^2 = 2k^2$, puis que q est pair.

(d) Nomme la contradiction obtenue, puis conclus.

Ex. 47 ★★★ **Aucune différence de deux carrés égale à 6** — On veut démontrer qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 6$.

(a) Écris la supposition qui commence une démonstration par l'absurde. Vérifie ensuite que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

(b) Calcule $(a+b) + (a-b)$. Déduis-en que $a+b$ et $a-b$ ne peuvent pas être l'un pair et l'autre impair.

(c) On suppose maintenant que $a+b$ et $a-b$ sont tous les deux impairs. Montre que l'on arrive à une contradiction et nomme-la.

(d) On suppose maintenant que $a+b$ et $a-b$ sont tous les deux pairs. Écris-les $2m$ et $2p$ avec m et p entiers, puis termine la démonstration.

(e) Mia affirme : « De la même façon, il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 7$. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Angles et côtés impossibles** — On admet : la somme des angles vaut 180° dans un triangle et 360° dans un quadrilatère ; tout angle mesure strictement plus de 0° ; un angle aigu mesure strictement moins de 90°, un angle obtus strictement plus de 90° ; dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

(a) Démontre par l'absurde qu'un triangle ne peut pas avoir deux angles droits.

(b) Le quadrilatère $RSTU$ a trois angles obtus. Démontre par l'absurde que son quatrième angle est aigu.

(c) Élise affirme : « Un quadrilatère peut avoir trois angles droits et un angle aigu. » Démontre par l'absurde qu'elle a tort.

(d) Le triangle KLM a pour côtés $KL = 6$, $LM = 8$ et $KM = 11$. Démontre par l'absurde qu'il n'est pas rectangle.

Ex. 49 ★★★ **Absurde ou contraposée ?** — a et b désignent deux réels. On veut démontrer la proposition P : « si $a + b = 10$, alors $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$ ».

(a) Écris la négation de « $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$ ».

(b) Démontre P par l'absurde : écris la supposition, puis nomme la contradiction obtenue.

(c) Rose affirme : « Démontrer P par l'absurde, c'est démontrer que si $a < 5$ ou $b < 5$, alors $a + b \neq 10$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Écris la réciproque de P. Est-elle vraie ? Justifie.