1. Proposition vraie ou fausse, contre-exemple

Ex. 1 ★☆☆ Proposition ou pas ?

(a) C'est une proposition, et elle est vraie : $4 \times 9 = 36$.

(b) Ce n'est pas une proposition : c'est une consigne. On ne peut pas dire qu'elle est vraie ou fausse.

(c) Ce n'est pas une proposition : c'est une expression. Elle n'affirme rien.

(d) C'est une proposition, et elle est fausse : $51 = 3 \times 17$, donc 51 a d'autres diviseurs que 1 et 51.

(e) C'est une proposition, et elle est vraie : $8 \geqslant 0$ et $8^2 = 64$.

(f) C'est une proposition, et elle est fausse : -5 est plus à gauche que -2 sur la droite graduée, donc $-5 < -2$.

Ex. 2 ★☆☆ Un contre-exemple suffit

(a) Avec $a = 2$ et $b = 5$: $(2+5)^2 = 49$, mais $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, et $49 \neq 29$.

(b) Avec $a = 9$ et $b = 16$, deux réels positifs : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, et $5 \neq 7$.

(c) Avec $x = 0{,}25$: $\frac{1}{0{,}25} = 4$, et $4 > 0{,}25$.
Donc l'inégalité $\frac{1}{x} < x$ est fausse pour cette valeur.

(d) La phrase veut dire : « pour tout nombre premier p, p est impair ». Contre-exemple : 2 est premier (ses seuls diviseurs sont 1 et 2), mais il est pair.

(e) La phrase veut dire : « pour tout réel x, $x^2 > x$ ».
Contre-exemple : $x = 0{,}5$, car $0{,}5^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$.

(f) Avec $x = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, et $3 \neq -3$.

(g) $n = 0$ est bien un entier naturel : $2 \times 0 + 1 = 1$ et $0 + 1 = 1$, et $1 > 1$ est faux.

Ex. 3 ★★☆ Une proposition qui dépend de n

(a) $5^2 + 3 = 28 = 4 \times 7$, donc $P(5)$ est vraie. $6^2 + 3 = 39 = 4 \times 9 + 3$: 39 n'est pas un multiple de 4, donc $P(6)$ est fausse.

(b) Non. Ses calculs sont justes (4, 12 et 52 sont des multiples de 4), mais trois exemples ne démontrent pas un « pour tout ». Il faut un calcul valable pour tous les entiers impairs.

Ex. 3 (suite)

(c) Si $n = 2k + 1$, alors $n^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1)$. Comme $k^2 + k + 1$ est un entier, $n^2 + 3$ est un multiple de 4. Conclusion : pour tout entier n impair, $P(n)$ est vraie.

(d) Si $n = 2k$, alors $n^2 + 3 = 4k^2 + 3 = 2(2k^2 + 1) + 1$. Comme $2k^2 + 1$ est un entier, $n^2 + 3$ est impair. Un nombre impair n'est pas un multiple de 4. Conclusion : pour tout entier n pair, $P(n)$ est fausse.

Ex. 4 ★★☆ Démontrer, illustrer ou réfuter

(a) Vrai. Pour tout réel x : $(x+3)^2 - (x-3)^2 = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x$. Le calcul vaut pour toutes les valeurs de x, donc la proposition est vraie.

(b) Vrai. Exemple : $x = 2$, qui est bien non nul : $2^2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$. Un exemple suffit pour prouver un « il existe ».

(c) Non. $-2 \notin \mathbb{N}$: son contre-exemple n'est pas pris dans l'ensemble indiqué, il ne compte pas. En fait, la proposition est vraie. Pour $n = 0$: $0^3 = 0$ et $0 \geqslant 0$. Pour $n \geqslant 1$: $n^2 \geqslant 1$, donc $n^3 = n \times n^2 \geqslant n \times 1 = n$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $n^3 \geqslant n$.

(d) Faux. Contre-exemple : $x = 3$. On a $(3-2)^2 = 1$ et $3^2 - 4 = 5$, or $1 < 5$. Un seul contre-exemple suffit : la proposition est fausse.

Ex. 5 ★★★ Le piège de $n^2 + n + 41$

(a) $1^2 + 1 + 41 = 43$, $2^2 + 2 + 41 = 47$ et $3^2 + 3 + 41 = 53$. Aucun de ces nombres n'est divisible par 2, 3, 5 ou 7, et $7^2 = 49$, $8^2 = 64$: il suffit de tester ces diviseurs.
Donc 43, 47 et 53 sont premiers : $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

(b) Non. Trois exemples qui marchent ne prouvent pas un « pour tout ». De plus, $40^2 + 40 + 41 = 1600 + 40 + 41 = 1681$ et $41^2 = 1681$: ce nombre vaut 41×41, il n'est pas premier. $P(40)$ est fausse, $n = 40$ est un contre-exemple : la proposition de Léa est fausse.

(c) $41^2 + 41 + 41 = 41 \times (41 + 1 + 1) = 41 \times 43$. Ce nombre est divisible par 41, il n'est donc pas premier. $P(41)$ est fausse : c'est un deuxième contre-exemple.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Distinguons deux cas. Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier : $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$ est pair. Si n est impair, $n = 2k + 1$: $n^2 + n = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$ est pair. Dans les deux cas $n^2 + n$ est pair, donc $n^2 + n + 41$ est un nombre pair plus 41, il est impair. Conclusion : pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 41$ est impair.

Ex. 6 ★★★ **Un nombre, son carré, son inverse**

(a) Pour tout réel x : $x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Un carré est positif, donc $x^2 - (2x - 1) \geqslant 0$. Conclusion : pour tout réel x, $x^2 \geqslant 2x - 1$.

(b) Soit $x > 0$. D'après la question précédente, $x^2 \geqslant 2x - 1$, donc $x^2 + 1 \geqslant 2x$. On divise par $x > 0$: l'inégalité garde son sens, et $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$. Conclusion : pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

(c) Faux. Contre-exemple : $x = -1$, qui est un réel non nul. On a $-1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$, et $-2 < 2$. La proposition est fausse : le résultat précédent n'est valable que pour $x > 0$.

(d) Non. Ses calculs sont justes (2,5, 4,25 et 2,5 sont plus grands que 2), mais des exemples ne prouvent pas un « pour tout ». Contre-exemple : $x = 1$, car $1 + \frac{1}{1} = 2$, et $2 > 2$ est faux. La proposition de Zoé est fausse.

Ex. 7 ★★★ **Nombres premiers et parité**

(a) Faux. La phrase veut dire : « pour tous nombres premiers p et q, $p + q$ est pair ». Contre-exemple : 2 et 3 sont premiers, et $2 + 3 = 5$ est impair. La proposition est fausse.

(b) Vrai. Exemple : 17 et 23 sont premiers (leurs seuls diviseurs sont 1 et eux-mêmes), et $17 + 23 = 40$. Un exemple suffit pour prouver un « il existe ».

(c) On a $a + b = (a - b) + 2b$. Distinguons deux cas. Si $a - b$ est pair, $a - b = 2k$ avec k entier : $a + b = 2k + 2b = 2(k + b)$ est pair. Si $a - b$ est impair, $a - b = 2k + 1$: $a + b = 2(k + b) + 1$ est impair. Dans les deux cas, $a + b$ et $a - b$ ont la même parité.

(d) D'après la question précédente, distinguons deux cas. Si $a + b$ et $a - b$ sont impairs, $a + b = 2p + 1$ et $a - b = 2q + 1$ avec p, q entiers : $(2p + 1)(2q + 1) = 2(2pq + p + q) + 1$ est impair. Si $a + b$ et $a - b$ sont pairs, $a + b = 2p$ et $a - b = 2q$: $(a + b)(a - b) = 4pq$ est un multiple de 4. Conclusion : $(a + b)(a - b)$ est soit impair, soit un multiple de 4.

Ex. 7 **(suite)**

(e) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $2026 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec a et b entiers. Or $2026 = 2 \times 1013$ est pair, et $2026 = 4 \times 506 + 2$ n'est pas un multiple de 4. C'est contraire à la question précédente. Conclusion : 2026 ne peut pas s'écrire $a^2 - b^2$ avec a et b entiers.

2. *« Pour tout » et « il existe »*

Ex. 8 ★☆☆ **Faire apparaître le quantificateur caché**

(a) « Pour tous entiers pairs a et b, $a + b$ est pair. » Le « pour tout » était caché.

(b) « Il existe un entier n qui est multiple de 3 et multiple de 5. » Par exemple, $n = 15$ convient, mais ce n'était pas demandé.

(c) « Pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$. »

(d) « Il existe un nombre premier p qui est pair. » Ici, « peut être » signifie « il existe ».

(e) « Pour tout rectangle $ABCD$, $AC = BD$. »

(f) « Il existe un réel x tel que $3x + 1 = 0$. » Ici, $x = -\frac{1}{3}$ convient.

Ex. 9 ★☆☆ **Exemple, contre-exemple ou démonstration**

(a) Vraie. Pour $n = 11$: $3 \times 11 - 4 = 33 - 4 = 29$. Un exemple suffit pour un « il existe ».

(b) Fausse. Contre-exemple : $x = -3$. On a $2 \times (-3) = -6$ et $-6 < -3$, donc $2x < x$.

(c) Vraie. Pour tout entier naturel k, $10k + 5 = 5(2k + 1)$, où $2k + 1$ est un entier.
Donc $10k + 5$ est un multiple de 5, quel que soit k.

(d) Fausse. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 \neq -9$. La propriété échoue pour toutes les valeurs de x.

(e) Fausse. Contre-exemple : $n = 1$. On a $(1 + 1)^2 = 4$ et $1^2 + 1 = 2$, or $4 \neq 2$.

(f) Vraie. $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ et $13^2 = 169$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle de côtés 5, 12 et 13 est rectangle. Un exemple suffit.

Ex. 10 ★★☆ **L'ensemble change tout**

(a) Pour tout entier x, $3x$ est un multiple de 3. Or $10 = 3 \times 3 + 1$ n'est pas un multiple de 3.
Donc $3x \neq 10$ pour tous les entiers x : la propriété échoue pour toutes les valeurs. Dans $\mathbb{Z}$, P est fausse.

Ex. 10 **(suite)**

(b) Pour $x = \frac{10}{3}$, on a $3 \times \frac{10}{3} = 10$, et $\frac{10}{3} \in \mathbb{Q}$. Un exemple suffit : dans $\mathbb{Q}$, P est vraie.

(c) Non : $-1 \notin \mathbb{N}^*$, donc ce n'est pas un contre-exemple. Pour tout x de $\mathbb{N}^*$, on a $x \geqslant 1$, donc $5x \geqslant 5 \times 1 = 5$. Conclusion : dans $\mathbb{N}^*$, Q est vraie.

(d) Contre-exemple : $x = 0$, qui appartient à $\mathbb{N}$. On a $5 \times 0 = 0$ et $0 < 5$. Conclusion : dans $\mathbb{N}$, Q est fausse.

Ex. 11 ★★☆ **Des exemples ne prouvent rien**

(a) $(4+1)^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. Or 9 est impair, donc $P(4)$ est vraie.

(b) Non. Quatre exemples qui marchent ne prouvent pas un « pour tout » : rien ne garantit le résultat pour les autres entiers. Il faut un calcul valable pour tout entier k.

(c) Pour tout entier k, $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$. Or $2k$ est pair, donc $2k + 1$ est impair. Le calcul vaut pour tout entier k : $P(k)$ est toujours vraie.

(d) Non. « Il existe » signifie « au moins un ». Que $Q(1)$ soit fausse ne prouve rien. Pour $k = 3$: $(3+1)^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 7 \times 1$, donc $Q(3)$ est vraie. Il existe donc un entier k tel que $Q(k)$ soit vraie : Tom a tort.

Ex. 12 ★★★ **Quand un « il existe » est faux**

(a) Il suffit d'un exemple. Pour $n = 4$: $A(4) = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20 = 10 \times 2$. $A(4)$ est un multiple de 10. La proposition est donc vraie.

(b) Non. « Il existe » veut dire « au moins un » : il peut y avoir plusieurs entiers qui conviennent. Par exemple, $A(4) = 20 = 10 \times 2$, $A(5) = 25 + 5 = 30 = 10 \times 3$ et $A(-5) = 25 - 5 = 20$. Au moins trois entiers conviennent : Lina a tort.

(c) Distinguons deux cas. Si $n = 2k$: $A(n) = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$, avec $2k^2 + k$ entier. Si $n = 2k + 1$: $A(n) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$, avec $2k^2 + 3k + 1$ entier. Dans les deux cas, $A(n)$ est le double d'un entier. Donc, pour tout entier n, $A(n)$ est pair.

(d) Elle est fausse : il faut montrer que la propriété échoue pour toutes les valeurs. D'après la question précédente, pour tout entier n, on peut écrire $A(n) = 2m$ avec m entier. Alors $n^2 + n + 7 = 2m + 7 = 2(m+3) + 1$: ce nombre est impair, quel que soit l'entier n. Aucun entier ne convient, donc la proposition est fausse.

Ex. 13 ★★★ **Sommes d'entiers consécutifs**

(a) La phrase cache un « pour tout » : « pour tout entier n, $n + (n+1) + (n+2)$ est un multiple de 3 ». Démonstration : $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$, et $n + 1$ est un entier. La somme est donc un multiple de 3. Ce calcul vaut pour tous les entiers n : la proposition est vraie.

(b) Faux. Contre-exemple : $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ et $14 = 4 \times 3 + 2$. Le reste n'est pas nul, donc 14 n'est pas un multiple de 4. La phrase d'Inès est fausse.

(c) La somme de quatre entiers consécutifs vaut $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$. On cherche $4n + 6 = 74$, soit $4n = 68$ et $n = 17$. Vérification : $17 + 18 + 19 + 20 = 74$. Un exemple suffit : la proposition est vraie.

(d) Elle est fausse. D'après la première question, pour tout entier n, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. Or $74 = 3 \times 24 + 2$ n'est pas un multiple de 3. La propriété échoue donc pour toutes les valeurs de n : aucun triplet d'entiers consécutifs n'a pour somme 74.

Ex. 14 ★★★ **Un nombre et son carré : l'ensemble compte**

(a) « Pour tout réel x, $x \leqslant x^2$ ». Cette phrase est fausse. Contre-exemple : $x = 0{,}5$, car $x^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$. Dans $\mathbb{R}$, la phrase de Noé est donc fausse.

(b) On a $n^2 - n = n(n-1)$. Distinguons deux cas. Si $n = 0$: $n^2 - n = 0$, donc $n^2 \geqslant n$. Si $n \geqslant 1$: $n > 0$ et $n - 1 \geqslant 0$, donc le produit $n(n-1)$ est positif ou nul. Dans les deux cas, $n^2 - n \geqslant 0$. Donc, pour tout entier naturel n, $n^2 \geqslant n$.

(c) Soit n un entier avec $n \leqslant -1$. Un carré est positif ou nul, donc $n^2 \geqslant 0$. Or $n < 0$, donc $n < 0 \leqslant n^2$. Ainsi, pour tout entier $n \leqslant -1$, $n^2 \geqslant n$.

(d) Elle est fausse. D'après les deux questions précédentes, $n^2 \geqslant n$ pour tout entier n positif ou nul et pour tout entier $n \leqslant -1$, donc pour tout entier n. La propriété $n^2 < n$ échoue donc pour toutes les valeurs. Conclusion : la phrase de Noé est vraie dans $\mathbb{Z}$ mais fausse dans $\mathbb{R}$, l'ensemble change tout.

3. *Et, ou, négation*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : écrire une négation**

(a) La négation est « $x \geqslant -6$ ». Attention : ce n'est pas $x > -6$. Pour $x = -6$, « $x < -6$ » est fausse, donc -6 doit vérifier la négation.

(b) La négation est « $y < -4$ ». Le cas d'égalité $y = -4$ rend « $y \geqslant -4$ » vraie : il ne va donc pas dans la négation.

(c) La négation est « n est impair ».

(d) « t est positif » signifie $t \geqslant 0$. La négation est donc « $t < 0$ » : t est strictement négatif.

(e) On retourne chaque comparaison et on remplace « et » par « ou ». La négation est « $x \leqslant -8$ ou $x > 1$ ».

(f) On nie chaque partie et on remplace « et » par « ou ». La négation est « a est impair ou b n'est pas un multiple de 5 ».

(g) non (P ou Q) est (non P) et (non Q). La négation est donc « $z \neq 0$ et $z \leqslant 10$ ».

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux avec « et », « ou »**

(a) Vraie. $9 = 3 \times 3$ est un multiple de 3 et $9 = 3^2$ est un carré. Les deux sont vraies : le « ou » est inclusif, donc la proposition est vraie.

(b) Fausse. 14 est pair, mais $14 = 4 \times 3 + 2$ n'est pas un multiple de 4. Pour que « et » soit vraie, il faut que les deux soient vraies.

(c) Vraie. $\sqrt{16} = 4$ est vraie. Il suffit qu'une des deux soit vraie, même si $2^3 = 8 \neq 6$.

(d) Fausse. $-5 > -3$ est fausse, car $-5 < -3$. Une seule partie fausse suffit à rendre « et » fausse (alors que $25 > 9$ est vraie).

(e) Vraie. $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, qui n'est pas supérieur à 0,5 : la première est fausse. Mais $0{,}5 \times 2 = 1$ est vraie, donc la proposition est vraie.

(f) Fausse. $21 = 3 \times 7$ n'est pas premier, et 21 est impair. Les deux sont fausses, donc « ou » est fausse.

Ex. 17 ★★☆ **Compter avec « et », « ou »**

(a) 15 : V, V, V, V (impair et multiple de 3 : « ou » est vraie aussi, car il est inclusif). 10 : F, F, F, F. 7 : V, F, F, V. 6 : F, V, F, V.

(b) Ce sont les multiples de 3 impairs : 3, 9, 15 et 21. Donc « P et Q » est vraie pour 4 entiers.

Ex. 17 **(suite)**

(c) Non. Les 4 entiers 3, 9, 15, 21 sont à la fois impairs et multiples de 3 : Jade les compte deux fois. Le bon nombre est $12 + 8 - 4 = 16$. Conclusion : « P ou Q » est vraie pour 16 entiers.

(d) non (P ou Q) est (non P) et (non Q) : « n est pair et n n'est pas un multiple de 3 ». Ce sont 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22. On retrouve $24 - 16 = 8$. Conclusion : 8 entiers.

Ex. 18 ★★☆ **Encadrement, intervalles et négation**

(a) Pour $x = -1$: $-1 \geqslant -1$ est vraie et $-1 < 4$ est vraie, donc « P et Q » est vraie : -1 la vérifie. Pour $x = 4$: $4 \geqslant -1$ est vraie, mais $4 < 4$ est fausse. Une partie est fausse, donc « P et Q » est fausse : 4 ne la vérifie pas.

(b) « $x \geqslant -1$ et $x < 4$ » signifie $x \in [-1\,;+\infty[\cap]-\infty\,;4[$, c'est-à-dire $x \in [-1\,;4[$: -1 est inclus, 4 est exclu.

(c) Non. Pour $x = 5$, « P et Q » est fausse, car $5 < 4$ est fausse. La proposition de Hugo est fausse elle aussi, car $5 < -1$ est fausse. Or une proposition et sa négation ne peuvent pas être fausses toutes les deux. Il faut retourner chaque comparaison ET échanger « et » avec « ou ». La bonne négation est « $x < -1$ ou $x \geqslant 4$ », c'est-à-dire $x \in]-\infty\,;-1[\cup [4\,;+\infty[$.

(d) Distinguons deux cas. Si $x < 4$, alors Q est vraie. Si $x \geqslant 4$, alors $x \geqslant -1$, donc P est vraie. Dans les deux cas, « P ou Q » est vraie. Attention : le « ou » est inclusif. Pour $x \in [-1\,;4[$, P et Q sont vraies toutes les deux, et « P ou Q » est donc vraie aussi. Conclusion : l'ensemble est $\mathbb{R}$ tout entier ($[-1\,;+\infty[\cup]-\infty\,;4[= \mathbb{R}$).

Ex. 19 ★★★ **Table de vérité et négation d'un « et »**

(a) Lignes dans l'ordre : V, V : F, F, V, F ; V, F : F, V, F, V ; F, V : V, F, F, V ; F, F : V, V, F, V.

(b) Sur chaque ligne, les colonnes « P et Q » et « non P ou non Q » ont des valeurs contraires.
Donc « (non P) ou (non Q) » est vraie exactement quand « P et Q » est fausse : c'est sa négation.

(c) Avec $a = 4$ et $b = 7$: « a et b sont pairs » est fausse, car 7 est impair. « Aucun des deux n'est pair » est fausse aussi, car 4 est pair. Une proposition et sa négation ne peuvent pas être fausses toutes les deux, donc Malo a tort. La bonne négation est « a est impair ou b est impair », c'est-à-dire « au moins un des deux est impair ».

(d) On échange « et » avec « ou » et on nie chaque partie : « KLM n'est pas rectangle ou KLM n'est pas isocèle ».

Ex. 19 **(suite)**

(e) Le plus long côté est $[KM]$. Si KLM était rectangle, il le serait en L et, d'après le théorème de Pythagore, on aurait $KM^2 = KL^2 + LM^2$. Or $KM^2 = 7^2 = 49$ et $KL^2 + LM^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Comme $49 \neq 50$, KLM n'est pas rectangle.
Donc « rectangle et isocèle » est fausse (même si KLM est isocèle en L). Conclusion : c'est la négation qui est vraie.

Ex. 20 ★★★ **Démontrer un « ou » sur des entiers**

(a) $3 + 8 = 11$ est impair, mais $3 \times 8 = 24$ est pair. Une des deux propositions est vraie, ce qui suffit pour un « ou ». Conclusion : R est vraie.

(b) $6 + 10 = 16$ et $6 \times 10 = 60$ sont pairs : les deux propositions sont vraies. Le « ou » des mathématiques est inclusif, il est vrai aussi quand les deux sont vraies. Conclusion : R est vraie, Lina a tort.

(c) Distinguons deux cas. Cas 1 : a est pair ou b est pair. Si $a = 2k$ avec k entier, alors $a \times b = 2 \times (k \times b)$ est pair. Si $b = 2k$, alors $a \times b = 2 \times (a \times k)$ est pair. Cas 2 : a et b sont impairs, $a = 2k + 1$ et $b = 2m + 1$ avec k, m entiers. Alors $a + b = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1)$ est pair. Dans les deux cas, une des deux propositions est vraie. Conclusion : R est vraie pour tous entiers a et b.

(d) La négation de « A ou B » est « (non A) et (non B) », et la négation de « pair » est « impair ».
Donc la négation de R est « $a + b$ est impair et $a \times b$ est impair ». Comme R est toujours vraie, sa négation est toujours fausse.

Ex. 21 ★★★ **Fonction affine, intervalles et négation**

(a) $3x - 4 < 5$ équivaut à $3x < 9$, puis à $x < 3$ (on divise par $3 > 0$). $-2x + 1 < -9$ équivaut à $-2x < -10$, puis à $x > 5$: on divise par $-2 < 0$, donc le sens de l'inégalité change.

(b) La négation de P est $x \geqslant 3$, pas $x > 3$: pour $x = 3$, $3 \times 3 - 4 = 5$ n'est pas strictement inférieur à 5, donc 3 vérifie la négation. La négation de Q est $x \leqslant 5$: pour $x = 5$, $-2 \times 5 + 1 = -9$ n'est pas strictement inférieur à -9.

(c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'un réel x vérifie « P et Q », c'est-à-dire $x < 3$ et $x > 5$. Alors $5 < x < 3$, donc $5 < 3$, ce qui est faux. Conclusion : « P et Q » est fausse pour tout réel x.

Ex. 21 **(suite)**

(d) non (P ou Q) est (non P) et (non Q) : « $x \geqslant 3$ et $x \leqslant 5$ ». Conclusion : les réels qui la vérifient forment l'intervalle $[3\,;5]$.

(e) Non. L'intersection correspond au « et » : aucun réel n'est à la fois < 3 et > 5, donc cet ensemble est vide. Pourtant $x = 0$ vérifie P, car $3 \times 0 - 4 = -4 < 5$, donc il vérifie « P ou Q ». Le « ou » correspond à la réunion. Conclusion : l'ensemble est $]-\infty\,;3[\cup]5\,;+\infty[$.

4. *Implication, réciproque, équivalence*

Ex. 22 ★★★ **Vrai ou faux : des implications**

(a) Faux. Contre-exemple : $x = 0$. On a $0^2 = 0$ et $4 \times 0 = 0$, donc $x^2 = 4x$ est vraie, mais $0 \neq 4$.

(b) Vrai. Supposons $x \in [2\,;5]$: $2 \leqslant x \leqslant 5$. Comme $0 < 2$ et $5 < 6$, on a $0 \leqslant x < 6$, donc $x \in [0\,;6[$.

(c) Faux. Contre-exemple : $x = -1$. On a $-1 < 2$ (l'hypothèse est vraie), mais $\frac{1}{-1} = -1$ et $-1 < \frac{1}{2}$ (la conclusion est fausse).

(d) Faux. Contre-exemple : $n = 13$. 13 est premier, mais $13 + 2 = 15 = 3 \times 5$ n'est pas premier.

(e) Faux. Contre-exemple : on lance un dé équilibré à six faces, A = « obtenir 1, 2 ou 3 » et B = « obtenir 1, 2 ou 4 ». On a $P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$, mais $A \cup B =$ « obtenir 1, 2, 3 ou 4 », donc $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \neq 1$.

(f) Vrai. Supposons $n + 1$ pair : $n + 1 = 2k$ avec k entier. Alors $n = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$ avec $k - 1$ entier, donc n est impair.

Ex. 23 ★★★ **Le seul cas qui rend une implication fausse**

(a) Dans l'ordre : V, F, V, V. L'implication est fausse seulement quand P est vraie et Q fausse ; quand P est fausse, elle est vraie.

(b) 9 est impair et $9 = 3 \times 3$ n'est pas premier : c'est le contre-exemple. 10 n'est pas impair : il ne réfute rien. 11 est impair et premier : l'implication est vérifiée.

(c) $-4 < 3$ et $(-4)^2 = 16$, or $16 \geqslant 9$: -4 est le contre-exemple. Pour 2 : $2 < 3$ et $2^2 = 4 < 9$, c'est vérifié. Pour 5 : $5 < 3$ est faux, cela ne réfute rien.

Ex. 23 **(suite)**

(d) Le losange a quatre côtés de même longueur (c'est sa définition), mais ses diagonales ont des longueurs différentes ($6 \neq 8$), donc ce n'est pas un carré : c'est le contre-exemple. Le carré vérifie l'implication. Le rectangle de 2 cm sur 9 cm n'a pas quatre côtés égaux : il ne réfute rien.

(e) 14 est pair et $14 = 4 \times 3 + 2$ n'est pas un multiple de 4 : c'est le contre-exemple. 7 n'est pas pair : il ne réfute rien. $8 = 4 \times 2$ est pair et multiple de 4 : c'est vérifié.

Ex. 24 ★★☆ **L'implication, puis la réciproque**

(a) L'implication est vraie : si $n = 10k$ avec k entier, alors $n = 2 \times (5k)$, donc n est pair. Réciproque : « si n est pair, alors n est un multiple de 10 ». Elle est fausse : 4 est pair, mais 4 n'est pas un multiple de 10.
Conclusion : il n'y a pas équivalence.

(b) On a $3x - 4 > 11 \Leftrightarrow 3x > 15 \Leftrightarrow x > 5$ (on ajoute 4, puis on divise par $3 > 0$: chaque étape se lit dans les deux sens).
Donc l'implication est vraie, et sa réciproque « si $3x - 4 > 11$, alors $x > 5$ » aussi. Conclusion : $x > 5 \Leftrightarrow 3x - 4 > 11$.

(c) L'implication est fausse : pour $a = 2$ et $b = -2$, on a $a + b = 0$, mais $a \neq 0$. Réciproque : « si $a = 0$ et $b = 0$, alors $a + b = 0$ ». Elle est vraie, car $0 + 0 = 0$.
Conclusion : il n'y a pas équivalence.

(d) L'implication est vraie : un rectangle est un parallélogramme, et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Réciproque : « si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un rectangle ». Elle est fausse : un parallélogramme qui a un angle de $60°$ a des diagonales qui se coupent en leur milieu, mais il n'a pas d'angle droit, donc ce n'est pas un rectangle.
Conclusion : il n'y a pas équivalence.

Ex. 25 ★★☆ **Ben corrige des copies**

(a) Noé n'a pas changé le sens de l'inégalité en divisant par $-2 < 0$. Correction : $-2x > 4 \Leftrightarrow x < -2$. Vérification : pour $x = -3$, $-2 \times (-3) + 6 = 12 > 10$; pour $x = 0$, qui vérifie $x > -2$, on obtient 6, qui n'est pas supérieur à 10. Conclusion : l'ensemble des solutions est $]-\infty\,;-2[$.

(b) « $x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$ » est vraie, mais la réciproque est fausse : $(-6)^2 = 36$ et $-6 \neq 6$. Correction : $x^2 = 36 \Leftrightarrow$ ($x = 6$ ou $x = -6$).

Ex. 25 **(suite)**

(c) La réciproque « si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 » est bien vraie, mais une implication et sa réciproque n'ont pas forcément la même vérité. Et un exemple ne démontre pas un « pour tout ».
L'implication est fausse : $9 = 3 \times 3$ est un multiple de 3, mais $9 = 6 \times 1 + 3$ n'est pas un multiple de 6.

(d) Ce triangle n'est pas équilatéral : l'hypothèse est fausse, donc ce cas ne réfute rien. Un contre-exemple devrait être un triangle équilatéral qui n'est pas isocèle. Or l'implication est vraie : un triangle équilatéral a trois côtés égaux, donc au moins deux, et il est isocèle.

(e) Élise n'a pas comparé le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres. Le plus grand côté est $[LM]$: $LM^2 = 10^2 = 100$ et $KL^2 + KM^2 = 36 + 64 = 100$. Comme $LM^2 = KL^2 + KM^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, KLM est rectangle en K.

Ex. 26 ★★★ **Pythagore dans les deux sens**

(a) Théorème : si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Réciproque (on échange hypothèse et conclusion) : si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A. Les deux sont vraies, donc on a une équivalence : ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

(b) Le plus grand côté est $[ST]$: $ST^2 = 29^2 = 841$ et $RS^2 + RT^2 = 400 + 441 = 841$. On a $ST^2 = RS^2 + RT^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R, le sommet opposé à $[ST]$.

(c) Non. Raisonnons par l'absurde : si UVW était rectangle, son hypoténuse serait son plus grand côté $[UW]$. Le théorème de Pythagore donnerait alors $UW^2 = UV^2 + VW^2$. Or $UW^2 = 256$ et $UV^2 + VW^2 = 81 + 144 = 225$, et $256 \neq 225$. On peut donc conclure : UVW n'est pas rectangle.

(d) Faux. On prend $A = S$, $B = R$ et $C = T$: $AB = 20$, $AC = 29$ et $BC = 21$. Alors $AB^2 + AC^2 = 400 + 841 = 1241$ et $BC^2 = 441$, donc $AB^2 + AC^2 > BC^2$: l'hypothèse est vraie. Pourtant ce triangle est rectangle en R (question 2), donc la conclusion est fausse. C'est un contre-exemple, et la phrase de Mathis est fausse.

Ex. 27 ★★★ **Carrés : quand peut-on écrire $\Leftrightarrow$?**

(a) Supposons $x > 5$. Alors $x - 5 > 0$, et $x + 5 > 10 > 0$. Le produit de deux nombres positifs est positif, donc $(x-5)(x+5) > 0$. Or $(x-5)(x+5) = x^2 - 25$, donc $x^2 - 25 > 0$, c'est-à-dire $x^2 > 25$. L'implication est vraie.

(b) Réciproque : si $x^2 > 25$, alors $x > 5$. Elle est fausse. Contre-exemple : pour $x = -6$, $x^2 = 36 > 25$ (l'hypothèse est vraie), mais $-6 < 5$ (la conclusion est fausse). Une implication vraie peut donc avoir une réciproque fausse : il n'y a pas d'équivalence.

(c) Supposons $x < -5$. Alors $x + 5 < 0$ et $x - 5 < -10 < 0$. Le produit de deux nombres négatifs est positif, donc $(x-5)(x+5) > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 25 > 0$, soit $x^2 > 25$. Conclusion : l'implication est vraie.

(d) L'implication $x - 2 = 7 \Rightarrow (x-2)^2 = 49$ est vraie, mais sa réciproque est fausse, car $x - 2 = -7$ donne aussi 49. Le premier $\Leftrightarrow$ est donc faux, et une solution est perdue. Correction : $(x-2)^2 = 49 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 9$ ou $x = -5$. Vérification : $(9-2)^2 = 49$ et $(-5-2)^2 = 49$. Les solutions sont 9 et -5.

Ex. 28 ★★★ **Équivalence ou pas ? Entiers et losanges**

(a) Supposons n impair : $n = 2k + 1$ avec k entier. Alors $n^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 2(2k^2 + 2k + 2)$. Comme $2k^2 + 2k + 2$ est un entier, $n^2 + 3$ est pair. L'implication est vraie.

(b) Réciproque : si $n^2 + 3$ est pair, alors n est impair. Comme n est soit pair soit impair, il suffit de montrer que le cas « n pair » est impossible. Si $n = 2k$ avec k entier, alors $n^2 + 3 = 4k^2 + 3 = 2(2k^2 + 1) + 1$, qui est impair. Donc, si $n^2 + 3$ est pair, n ne peut pas être pair : il est impair. La réciproque est vraie, d'où l'équivalence : n est impair si et seulement si $n^2 + 3$ est pair.

(c) On échange l'hypothèse et la conclusion : si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.

Ex. 28 (suite)

(d) Les triangles EOF et EOH sont rectangles en O. D'après le théorème de Pythagore, $EF^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ et $EH^2 = 3^2 + 5^2 = 34$. Comme $10 \neq 34$, on a $EF \neq EH$: $EFGH$ n'est pas un losange, alors que ses diagonales sont perpendiculaires. C'est un contre-exemple : la réciproque est fausse, et il n'y a pas d'équivalence.

(e) Non. Des exemples ne démontrent pas une phrase qui vaut pour tout entier. Sens direct : si $n = 4k$ avec k entier, alors $n^2 = 16k^2 = 4 \times 4k^2$, donc n^2 est multiple de 4 : ce sens est vrai. Réciproque : elle est fausse. Pour $n = 6$, $n^2 = 36 = 4 \times 9$ est multiple de 4, mais $6 = 4 \times 1 + 2$ ne l'est pas.
Donc l'équivalence est fausse.

5. *Contraposée*

Ex. 29 ★☆☆ **Écrire une contraposée**

(a) Si $x^2 \leqslant 9$, alors $x \leqslant 3$.
(La négation de $>$ est $\leqslant$.)

(b) Si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 6.

(c) Si $3x - 1 \neq 5$, alors $x \neq 2$.
(On a bien $3 \times 2 - 1 = 5$ dans l'implication de départ.)

(d) Si $a \times b < 16$, alors $a < 4$ ou $b < 4$.
(La négation de « $a \geqslant 4$ et $b \geqslant 4$ » est « $a < 4$ ou $b < 4$ ».)

(e) Si $x \neq 4$ et $x \neq -4$, alors $x^2 \neq 16$.
(Le « ou » devient « et » dans la négation.)

(f) Si $x^2 > 4$, alors $x < 1$ ou $x > 2$.
(La négation de l'encadrement $1 \leqslant x \leqslant 2$ est « $x < 1$ ou $x > 2$ ».)

Ex. 30 ★☆☆ **Réciproque, contraposée ou ni l'une ni l'autre ?**

(a) C'est la réciproque : on a échangé les deux propositions sans les nier.

(b) C'est la contraposée : on a nié les deux propositions et on les a échangées. Elle est vraie, car l'implication de départ est vraie et une implication et sa contraposée ont toujours la même vérité.

(c) Non. Hugo a nié les deux propositions sans les échanger. Son implication est la contraposée de la réciproque. Elle n'a aucun lien de vérité avec l'implication de départ.

Ex. 30 **(suite)**

(d) Faux. Contre-exemple : un losange dont les diagonales mesurent 6 et 8. Ses côtés mesurent $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Ses diagonales n'ont pas la même longueur, donc ce n'est pas un carré, et pourtant c'est un losange.

Ex. 31 ★★☆ **Démontrer par contraposée avec la parité**

(a) Si n est impair, alors n^2 est impair.

(b) Raisonnons par contraposée. Supposons n impair : il existe un entier k tel que $n=2k+1$. Alors $n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$. Comme $2k^2+2k$ est un entier, n^2 est impair. La contraposée est donc vraie.

(c) Une implication et sa contraposée ont toujours la même vérité. La contraposée est vraie, donc pour tout entier n : si n^2 est pair, alors n est pair.

(d) Non. Tom a démontré « si n est pair, alors n^2 est pair », c'est-à-dire la réciproque. Démontrer la réciproque ne prouve rien sur l'implication de départ.

Ex. 32 ★★☆ **Un triangle qui n'est pas rectangle**

(a) L'hypoténuse est le plus grand côté, donc $[RT]$. L'angle droit serait au sommet opposé, c'est-à-dire en S.

(b) Si $RT^2 \neq RS^2+ST^2$, alors le triangle RST n'est pas rectangle en S.

(c) On a $RT^2=14^2=196$ et $RS^2+ST^2=64+121=185$. Comme $196\neq 185$, la contraposée du théorème de Pythagore donne : RST n'est pas rectangle en S. Il ne peut pas l'être en R ni en T, car l'hypoténuse serait alors plus courte que $[RT]$. Conclusion : RST n'est pas rectangle.

(d) Son calcul est juste : $8^2+14^2=260\neq 121=11^2$. Mais il prouve seulement que RST n'est pas rectangle en R. Pour conclure qu'il n'est pas rectangle du tout, il faut tester le plus grand côté $[RT]$, comme à la question précédente.

Ex. 33 ★★★ **Corriger deux élèves, puis démontrer**

(a) Non. Léna part de « n est pair » et arrive à « $7n+4$ est pair ». Elle a donc démontré « si n est pair, alors $7n+4$ est pair », c'est-à-dire la réciproque de I. Démontrer la réciproque ne prouve rien sur I.

(b) Non. Malik a nié les deux propositions sans les échanger. Son implication est la contraposée de la réciproque de I, pas celle de I. La contraposée de I est : « si n est impair, alors $7n+4$ est impair ».

Ex. 33 **(suite)**

(c) Raisonnons par contraposée : montrons que si n est impair, alors $7n+4$ est impair. Supposons n impair : $n=2k+1$ avec k entier. Alors $7n+4=14k+7+4=14k+11=2(7k+5)+1$. Comme $7k+5$ est un entier, $7n+4$ est impair. La contraposée est vraie, donc I est vraie.

(d) Léna a démontré « si n est pair, alors $7n+4$ est pair », et la question précédente démontre « si $7n+4$ est pair, alors n est pair ». L'implication et sa réciproque sont vraies toutes les deux, donc l'équivalence « $7n+4$ est pair $\Leftrightarrow$ n est pair » est vraie.

Ex. 34 ★★★ **Un produit et une négation avec « ou »**

(a) Non. Avec $x=8$ et $y=3$, « $x>6$ ou $y>6$ » est vraie, car $8>6$. Mais « $x\leqslant 6$ ou $y\leqslant 6$ » est aussi vraie, car $3\leqslant 6$. Une proposition et sa négation ne peuvent pas être vraies en même temps. La bonne négation est « $x\leqslant 6$ et $y\leqslant 6$ ». La contraposée de I est donc : « si $x\leqslant 6$ et $y\leqslant 6$, alors $x\times y\leqslant 36$ ».

(b) Raisonnons par contraposée. Supposons $0\leqslant x\leqslant 6$ et $0\leqslant y\leqslant 6$. Comme $y\geqslant 0$, en multipliant $x\leqslant 6$ par y, on obtient $x\times y\leqslant 6y$. Comme $y\leqslant 6$, on a $6y\leqslant 36$. Donc $x\times y\leqslant 36$. La contraposée est vraie, donc I est vraie.

(c) La réciproque de I est : « si $x>6$ ou $y>6$, alors $x\times y>36$ ». Elle est fausse. Contre-exemple : $x=7$ et $y=1$. On a bien $7>6$, mais $x\times y=7$ et $7\leqslant 36$. Une implication vraie peut donc avoir une réciproque fausse.

(d) Contre-exemple : $x=-10$ et $y=-10$. On a $x\times y=100>36$, mais ni $x>6$ ni $y>6$: I est fausse. Pour la contraposée, on a $x\leqslant 6$ et $y\leqslant 6$, mais $x\times y=100>36$: elle est fausse aussi. Comme prévu, l'implication et sa contraposée ont la même vérité.

Ex. 35 ★★★ **Ce parallélogramme est-il un rectangle ?**

(a) La contraposée est : « si le triangle ABC n'est pas rectangle en B, alors $ABCD$ n'est pas un rectangle ».

(b) Dans ABC, le plus grand côté est $[AC]$. C'est donc la seule hypoténuse possible, avec l'angle droit en B. On a $AC^2=16^2=256$ et $AB^2+BC^2=144+81=225$. Comme $256\neq 225$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en B. D'après la question 1, $ABCD$ n'est donc pas un rectangle.

Ex. 35 **(suite)**

(c) Le calcul de Yanis est juste, mais pas le nom de la propriété. La réciproque de Pythagore sert à prouver qu'un triangle EST rectangle. Ici, il faut la contraposée du théorème : « si $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en B ». Il doit aussi préciser le sommet : B, opposé au plus grand côté $[AC]$.

(d) Il faut $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 144 + 81 = 225$, donc $AC = 15$ cm. Si $AC = 15$, on a $AC^2 = 225 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. Le parallélogramme $ABCD$ a alors un angle droit : c'est un rectangle. Si $AC \neq 15$, alors $AC^2 \neq 225 = AB^2 + BC^2$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en B, donc $ABCD$ n'est pas un rectangle. Conclusion : $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $AC = 15$ cm.

6. *Disjonction des cas*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : écrire un entier avec k**

(a) $(2k+3)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 3 + 3^2 = 4k^2 + 12k + 9$.

(b) $n^2 + 5n = 4k^2 + 10k = 2 \times (2k^2 + 5k)$. Comme k est entier, $2k^2 + 5k$ est un entier.
Donc $n^2 + 5n$ est pair.

(c) $n^2 + 2n = (4k^2 + 4k + 1) + (4k + 2) = 4k^2 + 8k + 3 = 2 \times (2k^2 + 4k + 1) + 1$, et $2k^2 + 4k + 1$ est un entier.
Donc $n^2 + 2n$ est impair.

(d) Il faut écrire : « $n = 2k + 1$ avec k entier ». Si k est un réel quelconque, par exemple $k = 0{,}25$, alors $2k + 1 = 1{,}5$, qui n'est même pas un entier.

(e) $37 = 2 \times 18 + 1$, avec $k = 18$. $-9 = 2 \times (-5) + 1$, avec $k = -5$: l'entier k peut être négatif.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : signes, valeur absolue et cas**

(a) Non : le réel 0 n'est dans aucun des deux cas. On peut prendre par exemple « $x \geqslant 0$ » ou « $x < 0$ ».

(b) Si $x < 0$, alors $|x| = -x$. Par exemple, $|-4| = 4 = -(-4)$.

(c) Si $x < 3$, alors $x - 3 < 0$, donc $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$. Par exemple, pour $x = 1$: $|1 - 3| = 2 = 3 - 1$.

(d) Si $x > 2$, alors $x - 2 > 0$ et $x + 5 > 7 > 0$. Un produit de deux nombres positifs est positif : $(x - 2)(x + 5) > 0$.

Ex. 37 **(suite)**

(e) Si $-5 < x < 2$, alors $x - 2 < 0$ et $x + 5 > 0$. Un produit de deux nombres de signes contraires est négatif : $(x - 2)(x + 5) < 0$.

(f) Non. Par exemple, pour $x = -2$: $|-2-1| = 3$ et $3 \geqslant -3$. Mais tester quatre valeurs ne prouve pas une proposition « pour tout » : il y a une infinité de réels. Il faut un raisonnement valable pour tout x, par exemple en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$.

Ex. 38 ★★☆ **Une preuve à compléter**

(a) Son calcul est juste, mais elle ne traite qu'un seul cas, celui où n est pair, puis elle généralise. Il manque le cas où n est impair.

(b) Si $n = 2k + 1$ avec k entier : $n^2 + 3n + 1 = (4k^2 + 4k + 1) + (6k + 3) + 1 = 4k^2 + 10k + 5 = 2(2k^2 + 5k + 2) + 1$. Comme $2k^2 + 5k + 2$ est un entier, $n^2 + 3n + 1$ est impair.

(c) Un entier est soit pair, soit impair : les deux cas couvrent tous les entiers. Dans chaque cas, $n^2 + 3n + 1$ est impair. Donc, pour tout entier n, $n^2 + 3n + 1$ est impair.

(d) Pour tout entier n, $n^2 + 3n + 1$ est impair, alors que 1000 est pair.
Donc $n^2 + 3n + 1$ ne peut jamais valoir 1000 : l'équation n'a aucune solution entière.

Ex. 39 ★★☆ **Valeur absolue : deux cas**

(a) Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$, donc $x + |x| = 2x$. Comme $x \geqslant 0$, on a $2x \geqslant 0$.

(b) Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, donc $x + |x| = x - x = 0$, et $0 \geqslant 0$. Par exemple, $-2 + |-2| = 0$.

(c) Un réel est soit positif ou nul, soit strictement négatif : les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$ couvrent tous les réels, sans oublier 0. Dans chaque cas, $x + |x| \geqslant 0$. Donc, pour tout réel x, $x + |x| \geqslant 0$.

(d) Distinguons deux cas. Si $x \geqslant 0$: $2x = 6$, donc $x = 3$, qui vérifie bien $x \geqslant 0$. Si $x < 0$: $x + |x| = 0$, et $0 \neq 6$, donc ce cas ne donne aucune solution. L'équation a une seule solution : $x = 3$
(vérification : $3 + |3| = 6$).

Ex. 40 ★★★ **Entiers consécutifs et multiples de 8**

(a) Non. Elle obtient $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$ et $5 \times 6 = 30$, qui sont tous pairs. Mais il y a une infinité d'entiers : vérifier quelques valeurs ne prouve pas une proposition « pour tout ». Il faut une démonstration.

(b) Distinguons deux cas. Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier : $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(2k^2+k)$, et $2k^2+k$ est un entier, donc $n(n+1)$ est pair. Si n est impair, $n = 2k+1$: $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2(2k^2+3k+1)$, et $2k^2+3k+1$ est un entier, donc $n(n+1)$ est pair. Un entier est pair ou impair, donc les deux cas couvrent tout. Conclusion : pour tout entier n, $n(n+1)$ est pair.

(c) $n^2 - n = (n-1) \times n$. Posons $m = n-1$: c'est un entier, et $n^2 - n = m(m+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs. D'après la question précédente, il est pair. Donc, pour tout entier n, $n^2 - n$ est pair.

(d) $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$, sans oublier le double produit $2 \times 2k \times 1 = 4k$.
Donc $n^2 - 1 = 4k(k+1)$.

(e) Soit n impair, $n = 2k+1$. D'après la question précédente, $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Or $k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair : $k(k+1) = 2m$ avec m entier. Alors
$n^2 - 1 = 4 \times 2m = 8m$, qui est un multiple de 8.
Conclusion : pour tout entier impair n, $n^2 - 1$ est un multiple de 8. Vérification : $11^2 - 1 = 120 = 8 \times 15$.

Ex. 41 ★★★ **Le carré d'un entier et la division par 3**

(a) $14 = 3 \times 4 + 2$ et $-7 = 3 \times (-3) + 2$: ces deux nombres sont de la forme $3k+2$. Dans la division par 3, le reste d'un entier vaut toujours 0, 1 ou 2. Les trois cas couvrent donc tous les entiers.

(b) Distinguons trois cas. Si $n = 3k$: $n^2 = 9k^2 = 3 \times 3k^2$, de la forme $3q$ avec $q = 3k^2$ entier. Si $n = 3k+1$: $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2+2k) + 1$, avec $q = 3k^2 + 2k$ entier. Si $n = 3k+2$: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, avec $q = 3k^2 + 4k + 1$ entier.

(c) Les trois cas couvrent tous les entiers, et chacun donne $n^2 = 3q$ ou $n^2 = 3q+1$. Donc, pour tout entier n, le reste de n^2 dans la division par 3 vaut 0 ou 1. Le reste 2 est impossible : un carré n'est jamais de la forme $3q+2$.

Ex. 41 **(suite)**

(d) Non. $2\,027 = 3 \times 675 + 2$ est de la forme $3q+2$, alors qu'un carré d'entier ne l'est jamais.
Donc 2 027 n'est pas le carré d'un entier
(d'ailleurs $45^2 = 2\,025$ et $46^2 = 2\,116$).

(e) D'après la question c), pour tout entier n, $n^2 = 3q$ ou $n^2 = 3q+1$ avec q entier.
Donc $n^2 + 1 = 3q+1$ ou $n^2 + 1 = 3q+2$: son reste dans la division par 3 vaut 1 ou 2, jamais 0.
Conclusion : pour tout entier n, $n^2 + 1$ n'est pas un multiple de 3.

Ex. 42 ★★★ **Le produit $x \times |x|$**

(a) Faux. Contre-exemple : $x = -4$. On a $x \times |x| = -4 \times 4 = -16$, alors que $x^2 = (-4)^2 = 16$, et $-16 \neq 16$.

(b) Distinguons deux cas : $x \geqslant 0$ ou $x < 0$. Tout réel est dans l'un des deux, et 0 est bien compris. Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$, donc $x \times |x| = x^2$. Si $x < 0$, $|x| = -x$, donc $x \times |x| = -x^2$.

(c) Distinguons deux cas. Si $x \geqslant 0$: $x \times |x| = x^2 \geqslant 0$, donc il est positif ou nul, comme x (nul seulement si $x = 0$). Si $x < 0$: $x^2 > 0$, donc $x \times |x| = -x^2 < 0$, il est négatif comme x. Les deux cas couvrent tous les réels.
Conclusion : $x \times |x|$ a toujours le même signe que x.

(d) Distinguons deux cas. Si $x \geqslant 0$: l'équation devient $x^2 = -9$, impossible car un carré est positif. Si $x < 0$: elle devient $-x^2 = -9$, soit $x^2 = 9$, donc $x = 3$ ou $x = -3$. Seul -3 vérifie $x < 0$. Vérification : $-3 \times |-3| = -3 \times 3 = -9$. L'équation a une seule solution : -3.

(e) Distinguons deux cas. Si $x \geqslant 0$: $x \times |x| = x^2$, donc $x \times |x| \leqslant x^2$ est vrai (il y a égalité). Si $x < 0$:
$x \times |x| = -x^2$, et comme $x^2 > 0$, on a $-x^2 < 0 < x^2$, donc $x \times |x| < x^2$. Les deux cas couvrent tous les réels.
Conclusion : pour tout réel x, $x \times |x| \leqslant x^2$.

7. *Raisonnement par l'absurde*

Ex. 43 ★☆☆ **Écrire la bonne supposition**

(a) Supposons qu'il existe un plus grand multiple de 5, que l'on note M.

(b) Supposons que l'entier n est pair.

(c) Supposons que $x \leqslant -2$
(la négation de $x > -2$ est $x \leqslant -2$, et non $x < -2$).

Ex. 43 **(suite)**

(d) Supposons que 0 a un inverse : il existe un réel y tel que $0 \times y = 1$.

(e) Supposons que $\sqrt{5} = 2{,}236$.
(On obtiendrait $5 = 2{,}236^2 = 4{,}999696$, ce qui est faux.)

(f) Supposons que $a < -1$ ou $a > 3$
(la négation d'un encadrement est un « ou »).

Ex. 44 ★☆☆ **Quel raisonnement choisir ?**

(a) Un contre-exemple, car la proposition est fausse : pour $x = 0{,}5$, on a $x^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$.

(b) Le raisonnement par l'absurde, car la conclusion est négative (« il n'existe pas »). Si $2n = 7$, alors un entier pair serait égal à l'entier impair 7 : c'est impossible.

(c) La disjonction des cas, car on traite séparément n pair ($n = 2k$) et n impair ($n = 2k + 1$). Ces deux cas couvrent tous les entiers.

(d) Le raisonnement par contraposée, car l'hypothèse « n^2 est impair » est difficile à utiliser. On démontre plutôt : « si n est pair, alors n^2 est pair ».

(e) La disjonction des cas, car $|x|$ ne s'écrit pas de la même façon selon le signe de x. On distingue $x \geqslant 0$ (alors $|x| = x$) et $x < 0$
(alors $|x| = -x > 0 > x$).

Ex. 45 ★★☆ **Pas de plus petit réel strictement positif**

(a) Lucas a supposé exactement ce qu'il veut démontrer. Il faut partir de la négation : « Supposons qu'il existe un plus petit réel strictement positif, que l'on note r. »

(b) Comme $r > 0$, on a $\frac{r}{2} > 0$. De plus, $r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0$, donc $\frac{r}{2} < r$. Ainsi, $\frac{r}{2}$ est un réel strictement positif plus petit que r.

(c) Cela contredit l'hypothèse selon laquelle r est le plus petit réel strictement positif. La supposition est donc fausse : il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

(d) Non. La contraposée concerne une implication « si P, alors Q » : on démontre alors « si non Q, alors non P ». Ici, il n'y a pas d'implication. Lucas a supposé le contraire de la conclusion, puis il a obtenu une contradiction : c'est un raisonnement par l'absurde.

Ex. 46 ★★☆ **$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel**

(a) Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel : il s'écrit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers, avec $q \neq 0$, et où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

(b) On élève au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p^2 est pair. Si p était impair, alors p^2 serait impair d'après la propriété admise : c'est impossible.
Donc p est pair.

(c) On a $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$, donc $4k^2 = 2q^2$, puis $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair. Si q était impair, alors q^2 serait impair, ce qui est impossible.
Donc q est pair.

(d) p et q sont tous les deux pairs : on peut donc simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle la fraction est irréductible. La supposition est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Ex. 47 ★★★ **Aucune différence de deux carrés égale à 6**

(a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe des entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 6$. En développant, on obtient $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.
On a donc $(a + b)(a - b) = 6$.

(b) $(a + b) + (a - b) = 2a$. Ce nombre est pair. Si l'un des deux nombres était pair, égal à $2m$, et l'autre impair, égal à $2p + 1$, leur somme $2m + 2p + 1 = 2(m + p) + 1$ serait impaire. Un même entier serait alors pair et impair : c'est une contradiction.
Donc $a + b$ et $a - b$ sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

(c) On écrit $a + b = 2m + 1$ et $a - b = 2p + 1$. Alors $(a + b)(a - b) = (2m + 1)(2p + 1) = 4mp + 2m + 2p + 1 = 2(2mp + m + p) + 1$: ce produit est impair. Or il vaut 6, qui est pair. Un entier impair serait égal à un entier pair : c'est une contradiction.

(d) On a $(2m)(2p) = 4mp = 6$, donc $2mp = 3$. Le nombre $2mp$ est pair et 3 est impair : un entier pair serait égal à un entier impair, c'est une contradiction. Les deux cas possibles (vus à la question précédente) mènent tous les deux à une contradiction. La supposition est donc fausse : il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 6$.

Ex. 47 **(suite)**

(e) Mia a tort. Avec $a = 4$ et $b = 3$: $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$. Ces entiers existent bien, donc sa proposition est fausse. La démonstration ne s'applique pas ici : $(a+b)(a-b) = 7$ est un produit impair, et le cas « deux impairs » ne donne plus de contradiction.

Ex. 48 ★★★ **Angles et côtés impossibles**

(a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'un triangle ait deux angles droits. Son troisième angle mesure alors $180° - 90° - 90° = 0°$. Or un angle mesure strictement plus de $0°$: c'est une contradiction. La supposition est fausse : un triangle ne peut pas avoir deux angles droits.

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que le quatrième angle ne soit pas aigu, c'est-à-dire qu'il mesure au moins $90°$ (la négation de « aigu » n'est pas « obtus »). Les trois autres angles mesurent chacun strictement plus de $90°$, donc la somme des quatre angles est strictement supérieure à $3 \times 90° + 90° = 360°$. Or cette somme vaut exactement $360°$: c'est une contradiction. La supposition est fausse : le quatrième angle de $RSTU$ est aigu.

(c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'un quadrilatère ait trois angles droits et un quatrième angle aigu. Ce quatrième angle mesure $360° - 3 \times 90° = 90°$. Il n'est donc pas aigu, ce qui contredit la supposition. La supposition est fausse : Élise a tort.

(d) Raisonnons par l'absurde. Supposons que KLM soit rectangle. Son hypoténuse est alors le plus grand côté, $[KM]$. D'après le théorème de Pythagore, on aurait $KM^2 = KL^2 + LM^2$. Or $KM^2 = 11^2 = 121$ et $KL^2 + LM^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, et $121 \neq 100$. C'est une contradiction avec le théorème de Pythagore. La supposition est fausse : KLM n'est pas rectangle.

Ex. 49 ★★★ **Absurde ou contraposée ?**

(a) La négation de « A ou B » est « non A et non B ». La négation de « $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$ » est donc « $a < 5$ et $b < 5$ ».

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a + b = 10$ et que $a < 5$ et $b < 5$. En additionnant les deux inégalités, on obtient $a + b < 5 + 5 = 10$. Cela contredit l'hypothèse $a + b = 10$. La supposition est fausse : si $a + b = 10$, alors $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$.

Ex. 49 **(suite)**

(c) Rose a tort, pour deux raisons. D'abord, son implication est fausse : pour $a = 2$ et $b = 8$, on a $a < 5$, mais $a + b = 2 + 8 = 10$. Son erreur vient de la négation : celle de « $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$ » est « $a < 5$ et $b < 5$ ». Ensuite, même corrigée, l'implication « si $a < 5$ et $b < 5$, alors $a + b \neq 10$ » est la contraposée de P : la démontrer, c'est raisonner par contraposée. Par l'absurde, on suppose à la fois $a + b = 10$ et la négation de la conclusion, puis on obtient une contradiction.

(d) La réciproque de P est : « si $a \geqslant 5$ ou $b \geqslant 5$, alors $a + b = 10$ ». Elle est fausse. Contre-exemple : $a = 6$ et $b = 1$. On a bien $a \geqslant 5$, mais $a + b = 6 + 1 = 7 \neq 10$.