49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Rappels de 2nde : logique et raisonnement

À retenir : $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement si P est vraie et Q fausse (contre-exemple). Si elle est vraie, P est suffisante et Q nécessaire. Sa réciproque peut être fausse. Non « P et Q » = « non P ou non Q ». Non $(x < 3)$: $x \geqslant 3$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur des propriétés de 2nde** — Ici, x désigne un réel et n un entier. Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est vrai, fais une démonstration. Si c'est faux, donne un contre-exemple et vérifie-le.

(a) Pour tout réel x, si $x < -3$, alors $x^2 > 9$.

(b) Pour tout réel x, si $x > 2$, alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

(c) Pour tout réel x, si $x^2 = 2x$, alors $x = 2$.

(d) Pour tout entier n, si n est impair, alors $3n + 1$ est pair.

(e) Pour tout réel x, si $x \in]-2\,;4]$, alors $x \in [-2\,;4[$.

(f) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : négations, « ou » et intervalles** — Ici, x désigne un réel et n un entier.

(a) Écris la négation de « $x > -1$ et $x < 6$ ».

(b) Donne un entier n pour lequel « $n < 8$ » et « $n > 8$ » sont fausses toutes les deux. Écris ensuite la négation de « $n < 8$ ».

(c) Mila dit : « Pour $n = 12$, la proposition « n est pair ou $n > 10$ » est fausse, car ses deux parties sont vraies. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Écris « $x \notin [0\,;7[$ » avec des inégalités et le mot « ou ».

(e) Écris la négation de l'implication « si $x \geqslant 1$, alors $x^3 \geqslant 1$ ».

(f) La proposition « $-2 \in]-2\,;5]$ ou $5 \in]-2\,;5]$ » est-elle vraie ? Justifie.

Ex. 3 ★★☆ **Condition nécessaire, condition suffisante** — Pour chaque question, écris les deux implications et teste chacune : donne une preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

(a) x est un réel. Complète par « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante » : « $x = -5$ » est une condition … pour « $x^2 = 25$ ».

(b) a et b sont des réels. Complète de la même façon : « $ab > 0$ » est une condition … pour « $a > 0$ et $b > 0$ ».

Ex. 3 (suite)

(c) x est un réel. Kenza affirme : « $x^2 < 4$ est une condition suffisante pour $-2 < x < 2$, mais pas nécessaire. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Complète par « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit » : « Pour que $M(x\,;y)$ soit sur la droite d'équation $y = 2x + 1$, … que M ait pour coordonnées $(1\,;3)$. »

Ex. 4 ★★☆ **Corriger le raisonnement d'un élève** — Pour chaque élève, trouve l'erreur de raisonnement. Rédige ensuite une réponse correcte.

(a) Inès calcule $n^2 + n + 11$ pour $n = 0$, 1 et 2. Elle trouve 11, 13 et 17, qui sont premiers. Elle conclut : « pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 11$ est premier ».

(b) Tom : « Si $ABCD$ est un carré, ses diagonales ont la même longueur. Donc, si ses diagonales ont la même longueur, $ABCD$ est un carré. » Teste avec $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$, $C(4\,;2)$ et $D(0\,;2)$.

(c) Pour montrer que « pour tout réel x, si $x < 2$, alors $x^2 < 4$ » est fausse, Noé propose $x = 3$, car $3^2 = 9$ et $9 \geqslant 4$.

(d) Sarah affirme que « si n est multiple de 10, alors n est pair » est fausse, car 7 n'est pas pair.

Ex. 5 ★★★ **Un encadrement, sa réciproque et ses bornes** — x désigne un réel. On note P : « $x \in [1\,;3]$ », Q : « $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ » et R : « $x^2 \leqslant 9$ ».

(a) Développe $(x-1)(x-3)$. Étudie ensuite le signe de ce produit, puis démontre que $P \Leftrightarrow Q$.

(b) Démontre que $P \Rightarrow R$.

(c) Écris la réciproque de $P \Rightarrow R$ et démontre qu'elle est fausse. Quels réels x la mettent en défaut ?

(d) « $x^2 \leqslant 9$ » est-elle une condition nécessaire ou une condition suffisante pour « $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ » ? Justifie.

(e) Mehdi écrit : « $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]1\,;3[$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 6 ★★★ **Multiples de 6 : « et » ou « ou » ?** — n désigne un entier naturel. On note A : « n est un multiple de 6 », B : « n est pair » et C : « n est un multiple de 3 ».

(a) Démontre que, si A est vraie, alors « B et C » est vraie.

(b) Écris la réciproque de $A \Rightarrow B$. Est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(c) Démontre que, si « B et C » est vraie, alors A est vraie. Tu peux écrire $n = 3m$ et raisonner sur la parité de m.

Ex. 6 **(suite)**

(d) Hugo affirme : « $A \Leftrightarrow (B$ ou $C)$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Combien d'entiers n compris entre 1 et 30 vérifient « B ou C » ? Justifie sans tous les lister.

Ex. 7 ★★★ **Fonction inverse : quand l'ordre s'inverse-t-il ?** — a et b désignent des réels non nuls. On étudie l'implication (I) : « si $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ».

(a) Zoé teste $a = 2$ et $b = 5$. Elle en conclut que (I) est vraie pour tous réels non nuls a et b. A-t-elle raison ? Justifie.

(b) Pour $a = 3$ et $b = 1$, l'implication (I) est-elle vraie ? Justifie.

(c) Démontre que (I) est vraie pour tous réels a et b strictement positifs. Tu peux calculer $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

(d) On suppose $a > 0$ et $b > 0$. Écris la réciproque de (I) et démontre-la. Que peux-tu conclure ?

(e) On suppose maintenant $a < 0$ et $b < 0$. L'implication (I) est-elle encore vraie ? Justifie.

2. *Condition nécessaire, condition suffisante*

À retenir : Si $P \Rightarrow Q$ est vraie : P est suffisante (« il suffit »), Q est nécessaire (« il faut »). Teste toujours les deux sens. Si les deux sont vrais, la condition est nécessaire et suffisante. Ex. : $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$, mais la réciproque est fausse ($x = 1$).

Ex. 8 ★☆☆ **Nécessaire, suffisante ou les deux ?** — Complète par « nécessaire », « suffisante », « nécessaire et suffisante » ou « ni l'une ni l'autre ». Justifie en testant les deux implications.

(a) Pour un réel x, « $x > 3$ » est une condition … pour « $x^2 > 9$ ».

(b) Pour un entier n, « n est multiple de 6 » est une condition … pour « n est pair ».

(c) Pour un quadrilatère $ABCD$, « $ABCD$ a quatre angles droits » est une condition … pour « $ABCD$ est un carré ».

(d) Pour des réels a et b, « $a \times b = 0$ » est une condition … pour « $a = 0$ ».

(e) Pour un entier n, « n est pair » est une condition … pour « n est multiple de 3 ».

(f) Pour un réel x, « $2x + 1 > 7$ » est une condition … pour « $x > 3$ ».

Ex. 9 ★☆☆ **« Il faut » ou « il suffit » ?** — Vrai ou faux ? Justifie : une démonstration si c'est vrai, un contre-exemple vérifié si c'est faux.

(a) « Pour qu'un entier n soit divisible par 10, il suffit qu'il soit pair. »

(b) « Pour qu'un réel x vérifie $x^2 - 5x = 0$, il suffit que $x = 5$. »

(c) « Pour qu'un réel x vérifie $x^2 \geqslant 4$, il faut que $x \geqslant 2$. »

(d) « Pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A, il faut que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. »

(e) « Pour que le produit $(x - 1)(x + 3)$ soit nul, il faut que $x = 1$. »

Ex. 10 ★★☆ **Deux solutions distinctes : à quelle condition ?** — Soit m un réel. On considère l'équation (E_m) : $x^2 + 4x + m = 0$, d'inconnue réelle x.

(a) Exprime le discriminant Δ de (E_m) en fonction de m.

(b) Élise affirme : « $m < 0$ est une condition nécessaire pour que (E_m) ait deux solutions distinctes. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) « $m < 0$ » est-elle une condition suffisante pour que (E_m) ait deux solutions distinctes ? Justifie.

(d) Détermine une condition nécessaire et suffisante portant sur m pour que (E_m) ait deux solutions distinctes.

Ex. 11 ★★☆ **Une liste, puis une preuve dans les deux sens** — Pour un entier naturel n, on note P : « n est multiple de 4 » et Q : « n^2 est multiple de 8 ». Ben écrit ce programme :

```
L = [n for n in range(1, 21) if (n * n) % 8 == 0]
print(L)
```

(a) Qu'affiche ce programme ?

(b) Démontre que, pour tout entier naturel n, $P \Rightarrow Q$.

(c) Kenza affirme : « Le programme démontre qu'il suffit que n^2 soit multiple de 8 pour que n soit multiple de 4. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Complète en justifiant les deux sens : « n est pair » est une condition … pour « n^2 est multiple de 8 ». Pour l'un des sens, raisonne par contraposée.

Ex. 12 ★★★ **Ben corrige quatre copies** — Chaque élève s'est trompé. Explique l'erreur à l'aide d'un contre-exemple vérifié ou d'une démonstration, puis écris une conclusion correcte. Dans les calculs, x désigne un réel et n un entier.

(a) Léa écrit : « Pour avoir $\frac{1}{x} < 1$ (avec $x \neq 0$), il faut avoir $x > 1$. »

(b) Karim écrit : « Un carré a ses quatre côtés de même longueur, donc avoir quatre côtés de même longueur est une condition suffisante pour être un carré. »

Ex. 12 (suite)

(c) Nina écrit : « 6 est multiple de 3 et n'est pas multiple de 9, donc "n est multiple de 9" n'est pas une condition suffisante pour "n est multiple de 3". »

(d) Hugo résout $x(x-3) = 2x$: « Je divise par x, d'où $x - 3 = 2$, donc $S = \{5\}$. »

Ex. 13 ★★★ **Un paramètre devant le carré** — Soit m un réel. On considère l'équation $(E_m) : (m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$, d'inconnue réelle x.

(a) Résous (E_m) dans le cas $m = 1$.

(b) On suppose $m \neq 1$. Montre que le discriminant de (E_m) est $\Delta = 12 - 8m$.

(c) Déduis-en une condition nécessaire et suffisante sur m pour que (E_m) ait deux solutions distinctes.

(d) « $m < \frac{3}{2}$ » est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante ou ni l'une ni l'autre pour que (E_m) ait deux solutions distinctes ? Justifie les deux sens.

(e) Même question pour la condition « $m \leqslant 1$ ».

Ex. 14 ★★★ **Quand $n^2 - 1$ est-il multiple de 3 ?** — Pour un entier naturel n, on note P : « n n'est pas multiple de 3 » et Q : « $n^2 - 1$ est multiple de 3 ».

(a) Qu'affiche ce programme ?

```
L = [n for n in range(15) if (n**2 - 1) % 3 == 0]
print(L)
```

(b) Tom affirme : « L'affichage prouve que $P \Leftrightarrow Q$ pour tout entier naturel n. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Distingue deux cas selon le reste de la division de n par 3 pour démontrer que $P \Rightarrow Q$.

(d) Démontre par contraposée que $Q \Rightarrow P$.

(e) Complète, puis justifie : « Pour que $n^2 - 1$ soit multiple de 3, il faut et il suffit que ... ».

3. *Quantificateurs et négation*

À retenir : Nier : « pour tout » ↔ « il existe », même ordre, mêmes ensembles, seule la propriété finale est niée. Non « tous... » = « au moins un... ne... pas » (pas « aucun ») ; non $(x < 3) : x \geqslant 3$; non (A et B) = non A ou non B.

Ex. 15 ★☆☆ **Écrire la négation** — (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écris la négation de chaque proposition, sans utiliser « aucun ».

(a) « Tous les termes de la suite (u_n) sont positifs. »

(b) « Il existe un réel x tel que $x^2 = -4$. »

(c) « Pour tout réel x de $[0\,;3]$, $f(x) < 7$. »

(d) « Le cube d'un réel négatif est négatif. »
(écris d'abord le quantificateur caché)

Ex. 15 (suite)

(e) « Il existe un entier n tel que $n > 10$ et n est impair. »

(f) « Pour tout réel x de $]0\,;1]$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < x$. »

Ex. 16 ★☆☆ **Exemple ou contre-exemple ?** — Vrai ou faux ? Justifie : démonstration, exemple ou contre-exemple vérifié.

(a) « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant n$. »

(b) « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$. »

(c) « Il existe un réel x tel que $x^2 = 3x$. »

(d) « Pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 11$ est un nombre premier. »

(e) « Il existe un réel x tel que $x^2 + 2x + 2 = 0$. »

Ex. 17 ★★☆ **L'ordre des quantificateurs** — On considère deux propositions.
P_1 : « pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y > x^2$ ».
P_2 : « il existe un réel y tel que, pour tout réel x, $y > x^2$ ».

(a) Démontre que P_1 est vraie.

(b) Écris la négation de P_2.

(c) Démontre que P_2 est fausse. Tu peux utiliser $x = |y| + 1$.

(d) Léo écrit : « la négation de P_1 est : il existe un réel y tel que, pour tout réel x, $y \leqslant x^2$ ». Trouve son erreur et corrige-la.

Ex. 18 ★★☆ **Chasser les contre-exemples en Python** — P : « pour tout entier n de 1 à 50, n est multiple de 4 ou $n^2 - 1$ est multiple de 3 ».
Ce programme doit mettre dans `L` les contre-exemples de P :

```
L = [n for n in range(1, 51) if ......]
print(L)
print(len(L))
```

(a) Écris la négation de P.

(b) Complète la condition du programme.

(c) Vérifie à la main que $n = 6$ est un contre-exemple. Que peux-tu conclure sur P ?

(d) Selon le reste de n dans la division par 3, trouve quand $n^2 - 1$ est multiple de 3. Déduis-en le nombre affiché par la dernière ligne.

Ex. 19 ★★★ **Une fonction sous la loupe** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. On considère la proposition P : « il existe un réel x tel que $f(x) < 1$ ».

(a) Écris la négation de P.

(b) P est-elle vraie ou fausse ? Démontre-le en étudiant le signe de $f(x) - 1$.

(c) Lina nie « pour tout réel x, $f(x) > 1$ et $f(x) < 10$ » en écrivant « pour tout réel x, $f(x) \leqslant 1$ et $f(x) \geqslant 10$ ». Repère ses erreurs et corrige.

Ex. 19 **(suite)**

(d) La proposition « pour tout réel x, $f(x) > 1$ et $f(x) < 10$ » est-elle vraie ? Justifie.

(e) Vrai ou faux ? Justifie : « il existe un réel x tel que $f(x) > 1$ et $f(x) < 10$ ».

Ex. 20 ★★★ **Quand l'ensemble et l'ordre changent tout** — E désigne $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On considère A : « pour tout $n \in E$, il existe $m \in E$ tel que $m < n$ » et B : « il existe $m \in E$ tel que, pour tout $n \in E$, $m \leqslant n$ ».

(a) Écris la négation de A, puis celle de B, sans changer l'ensemble E.

(b) Dans cette question, $E = \mathbb{N}$. Vrai ou faux pour A, puis pour B ? Justifie.

(c) Dans cette question, $E = \mathbb{Z}$. A est-elle vraie ou fausse ? Justifie.

(d) Yanis affirme : « avec $E = \mathbb{Z}$, A et B ont la même valeur de vérité, car elles utilisent les mêmes quantificateurs ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 21 ★★★ **Quantificateurs cachés** — P : « le produit de deux entiers consécutifs est pair ». T : « l'inverse d'un réel non nul est inférieur ou égal à ce réel ».

(a) Réécris P avec « pour tout », puis écris sa négation.

(b) Démontre P en distinguant deux cas selon la parité.

(c) Sami nie « tous les carrés des entiers de 1 à 10 sont strictement inférieurs à 50 » par « aucun de ces carrés n'est strictement inférieur à 50 ». Corrige sa négation.

(d) Montre que la phrase de départ de Sami et la négation qu'il a écrite sont fausses toutes les deux.

(e) Réécris T avec « pour tout » et écris sa négation. Vrai ou faux pour T ? Justifie.

4. *Statut des lettres et des égalités*

À retenir : Une identité est vraie pour tout (« pour tout » sous-entendu) : on la démontre par un calcul général. Un contre-exemple suffit à la réfuter, mais des essais ne la prouvent pas. Avec un paramètre : avant de diviser par $m - 1$, on traite le cas $m = 1$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : variable, inconnue ou paramètre ?** — Pour chaque phrase, donne le rôle de la lettre demandée (variable, inconnue ou paramètre) et justifie en une phrase.

(a) « Résoudre l'équation $mx^2 - 3x + 5 = 0$ d'inconnue x, où m est un réel. » Quel est le rôle de m ? Quel est celui de x ?

(b) « Pour tout entier naturel n, $w_n = n^2 + 1$. » Quel est le rôle de n ?

(c) « Résoudre $4x + 7 = 19$. » Quel est le rôle de x ? Résous ensuite l'équation.

Ex. 22 **(suite)**

(d) « On considère la parabole d'équation $y = x^2 + c$, où c est un réel. » Quel est le rôle de c ?

(e) Lucas écrit : « Dans $g(x) = 5 - 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$, la lettre x est l'inconnue. » A-t-il raison ? Justifie.

(f) « Pour tout réel t, $(t + 1)^2 \geqslant 0$. » La lettre t est-elle une inconnue ? Justifie.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : identité ou équation ?** — Justifie chaque réponse par un calcul général ou par un contre-exemple vérifié.

(a) Montre que l'égalité $(x - 4)^2 = x^2 + 16$ n'est pas une identité. Résous-la ensuite comme une équation d'inconnue x.

(b) Démontre que, pour tout réel x, $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$.

(c) Inès vérifie que $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = -2$. Elle écrit : « J'ai démontré l'identité. » A-t-elle raison ? Démontre ensuite l'égalité.

(d) L'égalité $x^2 + 4x = (x + 2)^2$ est-elle une identité ou une équation ? Donne l'ensemble de ses solutions.

(e) L'égalité $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$ est une identité. Réécris-la en faisant apparaître le « pour tout » sous-entendu, puis écris sa négation.

Ex. 24 ★★☆ **La division interdite de Léa** — Pour un réel m, on résout l'équation $(m - 2)x = m^2 - 4$, d'inconnue x. Léa écrit : « Je divise par $m - 2$ et j'obtiens $x = m + 2$. Donc, pour tout m, l'équation a une seule solution. »

(a) Pour $m = 2$, écris l'équation obtenue et donne l'ensemble de ses solutions.

(b) Quelle erreur Léa a-t-elle commise ? Explique.

(c) Discute, selon les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation.

(d) Détermine la valeur de m pour laquelle l'équation a pour unique solution 7.

Ex. 25 ★★☆ **Nombre de solutions selon le paramètre** — Pour un réel m, on étudie l'équation (E_m) : $mx^2 - 4x + 2 = 0$, d'inconnue x.

(a) Pour $m = 0$, l'équation (E_0) est-elle du second degré ? Résous-la.

(b) On suppose $m \neq 0$. Calcule le discriminant Δ de (E_m) en fonction de m.

(c) Discute, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de (E_m).

(d) Détermine m pour que -1 soit solution de (E_m), puis trouve l'autre solution.

Ex. 26 ★★★ **Trois essais ne font pas une identité** — On considère l'égalité (E) : $x^3 + 11x = 6x^2 + 6$, où x est un réel. Noé la teste pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$. Il conclut : « C'est une identité. »

(a) Vérifie que (E) est vraie pour $x = 1$, pour $x = 2$ et pour $x = 3$.

(b) Écris avec « pour tout » la phrase « (E) est une identité », puis sa négation. Noé a-t-il raison ? Justifie.

(c) Ben écrit ce programme :

```
L = [x for x in range(-5, 6) if x**3 + 11*x != 6*x**2 + 6]
print(L)
```

Quelle liste affiche-t-il ? Suffit-elle pour résoudre (E) dans $\mathbb{R}$? Justifie.

(d) Développe $(x-1)(x-2)(x-3)$, puis résous (E) dans $\mathbb{R}$.

Ex. 27 ★★★ **Un carré qui dépend du paramètre** — Pour un réel m, on étudie l'équation $(m-1)x^2 = m+3$, d'inconnue x.

(a) Résous l'équation pour $m = 3$, puis pour $m = 0$.

(b) Pour $m = 1$, peut-on diviser par $m - 1$? Résous l'équation dans ce cas.

(c) Pour $m \neq 1$, étudie le signe de $\frac{m+3}{m-1}$. Déduis-en, selon m, le nombre de solutions.

(d) Détermine la valeur de m pour laquelle 2 est solution, puis donne l'autre solution.

(e) Existe-t-il un réel m pour lequel l'égalité est vraie pour tout réel x (identité) ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Une famille de fonctions et l'affirmation de Mia** — Pour un réel a, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par $f_a(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 9$. Mia affirme : « Pour tout réel a, l'équation $f_a(x) = 0$, d'inconnue x, a exactement deux solutions. »

(a) Quel est le rôle de x dans la définition de f_a, puis dans l'équation $f_a(x) = 0$? Quel est le rôle de a ?

(b) Démontre que $f_a(x) = (x - a - 3)(x - a + 3)$. Sur quelles lettres porte le « pour tout » sous-entendu ?

(c) Mia a-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine les valeurs de a pour lesquelles 0 est solution de $f_a(x) = 0$. Donne alors l'autre solution.

(e) Détermine les valeurs de a pour lesquelles les deux solutions sont strictement positives.

5. *Contraposée, absurde, disjonction des cas*

À retenir : Contraposée de $P \Rightarrow Q$: (non Q) $\Rightarrow$ (non P). Elle a la même valeur de vérité que $P \Rightarrow Q$, contrairement à la réciproque $Q \Rightarrow P$. Absurde : on suppose le contraire et on arrive à une contradiction. Cas : on les couvre tous ($n = 2k$ ou $n = 2k+1$, k entier).

Ex. 29 ★★☆ **Automatismes : contraposée ou réciproque ?** — Réponds à chaque question en rédigeant les implications sous la forme « si…, alors… ».

(a) Écris la contraposée de « si $x > 3$, alors $x^2 > 9$ ».

(b) Écris la contraposée de « si l'entier n est multiple de 6, alors n est pair ».

(c) Jade dit que la contraposée de « si $ABCD$ est un carré, alors ses diagonales ont la même longueur » est « si $ABCD$ n'est pas un carré, alors ses diagonales n'ont pas la même longueur ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Pour démontrer « si n^2 est impair, alors l'entier n est impair », Noé écrit : « Soit $n = 2k+1$, k entier. Alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. » Quelle implication a-t-il démontrée ? Justifie.

(e) Dans la situation de Noé, écris l'implication qu'il faut démontrer pour raisonner par contraposée.

(f) Vrai ou faux ? « Si une implication est vraie, alors sa réciproque est vraie. » Justifie.

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : les bonnes briques d'une preuve** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier et x un réel.

(a) On sait que n est impair. Écris n à l'aide d'un entier k, puis montre que $n^2 + 2n$ est impair.

(b) Sacha écrit : « $n^2 + 3 = 2 \times \frac{n^2+3}{2}$, donc $n^2 + 3$ est pair. » Explique pourquoi ce n'est pas une preuve, puis donne un contre-exemple.

(c) Pour étudier n selon son reste dans la division par 3, Maël distingue les cas $n = 3k$ et $n = 3k+1$, avec k entier. Sa disjonction est-elle complète ? Justifie.

(d) Pour simplifier $|x| + x$, Zoé distingue les cas $x > 0$ et $x < 0$. Sa disjonction est-elle complète ? Justifie.

(e) On veut démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif. Écris la supposition de départ, puis la contradiction obtenue.

Ex. 31 ★★☆ **Disjonction des cas sur les entiers** — Dans tout l'exercice, n désigne un entier.

(a) En distinguant deux cas, démontre que $n^2 + n + 1$ est impair.

(b) Déduis-en que l'équation $n^2 + n + 1 = 2026$ n'a aucune solution entière.

(c) Justifie que les cas $n \leqslant 0$ et $n \geqslant 1$ couvrent tous les entiers, puis démontre que $n^2 \geqslant n$.

(d) Vrai ou faux : « pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$ » ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Choisir son raisonnement** — Annonce chaque raisonnement dès la première ligne.

(a) Démontre par contraposée que, pour tout entier n : si $5n + 3$ est pair, alors n est impair.

(b) Choisis un raisonnement adapté et démontre que, pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{x}{x+1} \neq 1$.

Ex. 32 **(suite)**

(c) Qu'affiche ce programme ? Que peux-tu en conclure pour « pour tout entier n, si n^2 est multiple de 4, alors n est multiple de 4 » ?

```
L = [n for n in range(1, 30) if n**2 % 4 == 0 and n % 4 != 0]
print(L)
```

(d) Quelle condition écrire dans ce programme pour chercher un contre-exemple à « si n^2 est multiple de 9, alors n l'est aussi » ? Qu'affiche-t-il alors ? Conclus.

Ex. 33 ★★★ **Contraposée ou réciproque : corriger deux copies** — Lina doit démontrer : « pour tout entier n, si $7n$ est pair, alors n est pair ». Elle écrit : « Soit n pair : $n = 2k$, donc $7n = 14k = 2 \times 7k$ est pair. » Malo dit qu'il raisonne par contraposée en démontrant « si $7n$ est impair, alors n est impair ».

(a) Écris la réciproque de l'implication à démontrer. Quelle implication Lina a-t-elle réellement démontrée ? Sa copie prouve-t-elle l'énoncé ? Justifie.

(b) Malo raisonne-t-il vraiment par contraposée ? Justifie.

(c) Écris la contraposée de l'implication à démontrer, puis démontre l'énoncé par contraposée.

(d) Vrai ou faux : « pour tout entier n, si $6n$ est pair, alors n est pair » ? Justifie.

(e) Pour que $6n$ soit pair, « n pair » est-elle une condition nécessaire, suffisante, ou nécessaire et suffisante ? Et pour que $7n$ soit pair ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Disjonction des cas : restes et valeur absolue** — n désigne un entier et x un réel. En Python, `a % 3` donne le reste de la division de `a` par 3. Inès conjecture : « pour tout entier n, $n^2 + 1$ n'est pas un multiple de 3 ». Elle écrit :

```
L = [n for n in range(50) if (n**2 + 1) % 3 == 0]
print(L)
```

(a) Factorise $n^3 - n$ en un produit de trois entiers consécutifs.

(b) En distinguant les cas selon le reste de la division de n par 3, démontre que $n^3 - n$ est un multiple de 3.

(c) Qu'affiche le programme d'Inès ? Ce résultat démontre-t-il sa conjecture ? Justifie.

(d) Démontre la conjecture d'Inès.

(e) Démontre que, pour tout réel x, $x^2 - |x| + \frac{1}{4} \geqslant 0$.

Ex. 35 ★★★ **Raisonner par l'absurde** — On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Dans chaque démonstration, annonce le raisonnement, écris clairement la supposition, puis la contradiction obtenue.

(a) Démontre qu'il n'existe pas de plus grand entier pair.

(b) Démontre que le nombre $5 - 3\sqrt{2}$ est irrationnel.

(c) Vrai ou faux : « la somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle » ? Justifie.

Ex. 35 **(suite)**

(d) Démontre qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 2$. Indication : calcule $(a - b) + (a + b)$.

6. *Ensembles, couples et produit cartésien*

À retenir : Un couple est ordonné : $(2\,;7) \neq (7\,;2)$, mais $\{2\,;7\} = \{7\,;2\}$. $A \times B$ contient des couples, et $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$; $A \cap B$ contient des éléments. On écrit $3 \in A$ mais $\{3\} \subset A$; $\emptyset \subset A$.

Ex. 36 ★☆☆ **Appartenance, inclusion, couples : vrai ou faux ?** — Automatismes. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) $\{7\} \in \{1\,;7\,;9\}$.

(b) $\emptyset \subset \{1\,;7\,;9\}$.

(c) $\{9\,;4\} = \{4\,;9\}$, donc $(9\,;4) = (4\,;9)$.

(d) $(3\,;-2) \in \mathbb{N}^2$.

(e) Si $A = \{1\,;2\,;3\,;4\}$, alors $\text{Card}(A^2) = 8$.

(f) Un code est formé d'une lettre parmi X, Y, Z suivie d'un chiffre de 0 à 9. Il y a exactement 13 codes possibles.

(g) Pour tout réel x : si $x \in [-3\,;1]$ ou $x \in [0\,;5]$, alors $x \in [0\,;1]$.

Ex. 37 ★☆☆ **Intersection, réunion, complémentaire** — Automatismes. On note $E = \{1\,;2\,;\ldots\,;20\}$. A est l'ensemble des multiples de 4 de E, et B l'ensemble des multiples de 5 de E.

(a) Écris A, B et $A \cap B$ en extension.

(b) Écris $A \cup B$ en extension, puis donne $\text{Card}(A \cup B)$.

(c) Vérifie sur cet exemple que $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

(d) Donne $\text{Card}(\overline{A})$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

(e) Écris $[-4\,;3] \cap]0\,;8[$ puis $[-4\,;3] \cup]0\,;8[$ sous la forme d'un intervalle.

(f) Écris le complémentaire de $[2\,;10]$ dans l'ensemble de référence $[0\,;10]$, puis son complémentaire dans $\mathbb{R}$.

Ex. 38 ★★☆ **Lister et comparer $A \times B$ et $B \times A$** — On note $A = \{0\,;1\,;2\}$ et $B = \{1\,;3\}$.

(a) Complète le tableau à double entrée pour lister les couples de $A \times B$ (la ligne donne a, la colonne donne b).

$\times$	**1**	**3**
0	…	…
1	…	…
2	…	…

Ex. 38 **(suite)**

(b) Déduis-en $\text{Card}(A \times B)$. Calcule ensuite $\text{Card}(B \times A)$ et $\text{Card}(A^2)$ sans les lister.

(c) Le couple $(3\,;1)$ appartient-il à $A \times B$? Et à $B \times A$? Qu'en conclus-tu pour ces deux ensembles ?

(d) Inès écrit : « $A \cap B = \{(1\,;1)\}$ ». A-t-elle raison ? Corrige son erreur.

(e) Combien de couples $(a\,;b)$ de A^2 vérifient $a < b$? Justifie.

Ex. 39 ★★☆ **Une grille de points dans le plan** — On note $A = \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$ et $B = \{0\,;1\,;2\,;3\}$. Dans un repère, chaque couple $(x\,;y)$ de $A \times B$ est le couple de coordonnées d'un point. On obtient ainsi une grille de points.

(a) Combien de points compte la grille ? Justifie.

(b) Combien de points de la grille sont sur la droite d'équation $y = x + 1$? Donne leurs coordonnées.

(c) Que contient la liste `L` ? Qu'affiche ce programme ?

```
L = [ [x, y] for x in range(-2, 3) for y in range(4) if y == x**2]
print(L)
print(len(L))
```

(d) Écris une liste en compréhension `M` qui contient les points `[x, y]` de la grille tels que $y > x$. Donne ensuite `len(M)`.

Ex. 40 ★★★ **Quand a-t-on $A \times B = B \times A$?** — Dans cet exercice, A et B sont des ensembles. On cherche à quelle condition $A \times B = B \times A$.

(a) On prend $A = \{1\,;4\}$ et $B = \{4\,;7\}$. Écris $A \times B$ et $B \times A$ en extension, puis donne leurs cardinaux.

(b) Avec ces mêmes ensembles, Chloé affirme : « $A \times B$ et $B \times A$ ont le même cardinal, donc $A \times B = B \times A$. » A-t-elle raison ? Justifie.

(c) On suppose A et B non vides et $A \times B = B \times A$. Démontre que $A \subset B$, puis que $A = B$.

(d) Vrai ou faux ? « Pour tous ensembles A et B, si $A \times B = B \times A$, alors $A = B$. » Justifie.

(e) Pour A et B non vides, la condition « $A = B$ » est-elle nécessaire, suffisante, ou nécessaire et suffisante pour avoir $A \times B = B \times A$? Justifie.

Ex. 41 ★★★ **Deux lancers de dé : compter les couples** — On lance deux fois un dé à six faces et on note le résultat $(x\,;y)$: x au premier lancer, y au second. On note $A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$. C est l'ensemble des résultats où $x + y$ est pair, et D l'ensemble des résultats qui contiennent au moins un 6.

(a) Explique pourquoi l'ensemble des résultats est A^2. Les résultats $(2\,;5)$ et $(5\,;2)$ sont-ils les mêmes ? Donne $\text{Card}(A^2)$.

(b) Démontre, en distinguant des cas, que $x + y$ est pair si et seulement si x et y ont la même parité. Déduis-en $\text{Card}(C)$.

Ex. 41 **(suite)**

(c) Léo dit : « Il y a 6 résultats avec $x = 6$ et 6 avec $y = 6$, donc $\text{Card}(D) = 12$. » Corrige son erreur et donne $\text{Card}(D)$.

(d) Complète la condition pour que `L` contienne les couples de $C \cap D$, écrits `[x, y]`. Qu'affiche le programme ?

```
A = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
L = [ [x, y] for x in A for y in A if ... ]
print(len(L))
```

(e) Déduis-en $\text{Card}(C \cup D)$. Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Intervalles et rectangles du plan** — On note $I = [-1\,;4[$ et $J = [2\,;6]$. Dans un repère, un point $M(x\,;y)$ est repéré par son couple de coordonnées $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Détermine $I \cap J$ et $I \cup J$ sous forme d'intervalles. Justifie.

(b) Traduis avec « ou » la condition « $(x\,;y) \notin I \times J$ », puis donne un point $P(x\,;y)$ tel que $x \in I$ et $P \notin I \times J$.

(c) Les points $M(3\,;5)$ et $N(5\,;3)$ appartiennent-ils à $I \times J$? à $J \times I$? Justifie.

(d) Démontre que $(I \times J) \cap (J \times I) = (I \cap J)^2$.

(e) Décris l'ensemble des points dont le couple de coordonnées appartient à $(I \times J) \cap (J \times I)$, puis calcule l'aire de cette figure.

7. *Listes en Python*

À retenir : Les indices vont de 0 à `len(L) - 1`, donc `L[len(L)]` provoque une erreur. `range(a, b)` s'arrête à $b - 1$. `L.remove(v)` supprime la valeur v et `del L[i]` l'élément d'indice i. Exemple : `[k for k in range(2, 5)]` vaut `[2, 3, 4]`.

Ex. 43 ★☆☆ **Indices et modifications d'une liste** — Automatismes. On pose `L = [5, 8, 3, 8, 6, 1]`. Chaque question repart de cette liste initiale.

(a) Que vaut `L[1]` ?

(b) Que vaut `L[len(L) - 1]` ?

(c) Que se passe-t-il si on demande `L[6]` ? Justifie.

(d) Écris la liste `L` obtenue après `L.remove(8)`.

(e) Écris la liste `L` obtenue après `del L[3]`.

(f) On exécute `L.append(0)`, puis `L[0] = 2`. Écris la liste `L` obtenue.

(g) Python refuse la ligne `if L[2] = 3:`. Corrige-la, puis dis si la condition obtenue est vraie.

Ex. 44 ★☆☆ **range et listes en compréhension** — Automatismes. `a % b` est le reste de la division de a par b, et `x**2` vaut x^2.

(a) Écris la liste `[k for k in range(4)]`.

(b) Quel entier `b` faut-il choisir pour que `[k for k in range(3, b)]` se termine par 12 ?

(c) Écris la liste `[x**2 for x in range(1, 8) if x % 3 == 1]`.

(d) Que vaut `len([n for n in range(10, 20) if n % 2 == 0 and n % 3 != 0])` ?

(e) On pose `M = [n for n in range(1, 10) if not n % 4 == 0 or n == 8]`. Les nombres 8 et 4 sont-ils dans `M` ? Justifie.

(f) Écris en compréhension la liste des multiples de 7 compris entre 1 et 50.

Ex. 45 ★★☆ **Parcourir par les indices ou par les valeurs** — On considère le programme suivant ; `a % b` est le reste de la division de a par b.

```
L = [4, 9, 2, 7, 5]
S = 0
for i in range(len(L)):
    if i % 2 == 0:
        S = S + L[i]
print(S)
```

(a) Fais le tableau des valeurs prises par `i` et prévois ce qu'affiche le programme.

(b) Lina remplace la ligne 3 par `for x in L:`, puis `i` par `x` et `L[i]` par `x`. Qu'affiche son programme ? Explique la différence.

(c) Complète la condition pour que `T` contienne les éléments d'indice impair de `L`, puis donne `T`.

```
T = []
for i in range(len(L)):
    if ..........:
        T.append(L[i])
```

Ex. 46 ★★☆ **Corriger un programme, puis conclure** — Noé veut obtenir la liste `V` des valeurs de $n^2 - 3n + 5$ pour n entier de 0 à 9. Il écrit le programme suivant.

```
for n in range(9):
    V = []
    V.append(n**2 - 3*n + 5)
print(V)
```

(a) Qu'affiche ce programme ? Repère ses deux erreurs.

(b) Écris le programme corrigé et donne la liste `V` qu'il affiche.

Ex. 46 (suite)

(c) Noé écrit cette fonction pour savoir si une liste contient une valeur paire. Pourquoi `existe_pair([3, 4])` renvoie-t-il False ? Corrige-la, puis donne `existe_pair(V)`.

```
def existe_pair(L):
    for x in L:
        if x % 2 == 0:
            return True
        return False
```

(d) Noé affirme : « pour tout entier naturel n, $n^2 - 3n + 5$ est un nombre premier ». A-t-il raison ? Justifie à l'aide de `V`.

Ex. 47 ★★★ **Une conjecture testée, puis démontrée** — Léa étudie les nombres $n^2 + 3n$ pour n entier naturel. Dans le programme, `a % b` est le reste de la division de a par b et `x**2` vaut x^2.

```
L = []
for n in range(1, 8):
    L.append(n**2 + 3*n)
print(L)
C = [x for x in L if x % 2 == 1]
print(C)
```

(a) Fais le tableau des valeurs prises par `n`, puis prévois exactement les deux lignes affichées.

(b) Léa conclut : « pour tout entier naturel n, $n^2 + 3n$ est pair, puisque le programme l'a vérifié ». Sa preuve est-elle valable ? Justifie.

(c) Démontre en distinguant deux cas que, pour tout entier naturel n, $n^2 + 3n$ est pair.

(d) Écris une liste en compréhension qui donne les entiers n de 0 à 11 tels que $n^2 + 3n$ n'est pas multiple de 4, puis donne son contenu.

(e) Écris la négation de « pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est multiple de 4, alors $n^2 + 3n$ est multiple de 4 ». Laquelle des deux propositions est vraie ? Démontre-le.

Ex. 48 ★★★ **Une fonction qui parcourt une liste** — On considère la fonction suivante, où L est une liste de nombres réels et `x**2` vaut x^2.

```
def f(L):
    for x in L:
        if x**2 - 5*x + 6 < 0:
            return True
    return False
```

(a) Complète la phrase à l'aide d'un quantificateur : `f(L)` renvoie True si et seulement si ...

(b) Prévois ce que renvoient `f([1, 2.5, 4])` et `f([0, 1, 2, 3, 4, 5])`, en détaillant les valeurs testées.

(c) Démontre que, pour toute liste L formée uniquement d'entiers, `f(L)` renvoie False.

(d) Mehdi affirme : « pour tester "pour tout x de L, $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$", il suffit de calculer `not f(L)` ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 48 **(suite)**

(e) Sans faire tourner de programme, donne la valeur de `not f([k/3 for k in range(4, 10)])`. Justifie.

Ex. 49 ★★★ **Couples d'un produit cartésien filtrés par un programme** — Dans ce programme, un couple $(a\,;b)$ est représenté par la liste `[a, b]` et `a % b` est le reste de la division de a par b.

```
A = [1, 2, 3, 4]
B = [0, 1, 2]
P = []
for a in A:
    for b in B:
        if a > b and not (a + b) % 2 == 0:
            P.append([a, b])
print(len(P))
print(P)
```

(a) Combien de fois la ligne `if` est-elle exécutée ? Relie ce nombre à $\mathrm{Card}(A \times B)$.

(b) Dresse un tableau à double entrée des couples de $A \times B$ retenus, puis prévois exactement l'affichage.

(c) Écris sans `not` une condition qui retient exactement les autres couples de $A \times B$, puis donne leur nombre sans les lister.

(d) Après le programme, on exécute `P.remove([3, 0])` puis `del P[2]`. Que vaut P ? Que vaut `P[len(P) - 1]` ? Et `P[len(P)]` ?