1. Rappels de 2nde : logique et raisonnement

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur des propriétés de 2nde**

(a) Vrai. Soit x un réel tel que $x < -3$. Alors $-x > 3 > 0$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $(-x)^2 > 3^2$, c'est-à-dire $x^2 > 9$. Donc, si $x < -3$, alors $x^2 > 9$.

(b) Vrai. Si $x > 2$, alors x et 2 sont dans $]0\,;+\infty[$. Sur cet intervalle, la fonction inverse est strictement décroissante.
Donc $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

(c) Faux. Contre-exemple : $x = 0$. On a $0^2 = 0$ et $2 \times 0 = 0$, donc l'hypothèse $x^2 = 2x$ est vraie. Mais $0 \neq 2$, donc la conclusion est fausse.

(d) Vrai. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec k entier. Donc $3n + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$, avec $3k + 2$ entier : $3n + 1$ est pair.

(e) Faux. Contre-exemple : $x = 4$. On a $4 \in]-2\,;4]$, car la borne 4 est fermée. Mais $4 \notin [-2\,;4[$, car la borne 4 est ouverte.

(f) Faux. Contre-exemple : $x = 0{,}5$. On a $x^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$, donc $x^2 < x$.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : négations, « ou » et intervalles**

(a) La négation est « $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 6$ » : le « et » devient « ou », et chaque inégalité est niée.

(b) Pour $n = 8$: « $8 < 8$ » est faux et « $8 > 8$ » est faux. Donc « $n > 8$ » n'est pas la négation de « $n < 8$ ». La négation de « $n < 8$ » est « $n \geqslant 8$ ».

(c) Elle a tort. 12 est pair et $12 > 10$: les deux parties sont vraies. Or le « ou » mathématique est inclusif : il suffit qu'une partie au moins soit vraie. La proposition est donc vraie.

(d) « $x \notin [0\,;7[$ » s'écrit « $x < 0$ ou $x \geqslant 7$ ».

(e) La négation de « si P, alors Q » est « P et non Q ». Ici, c'est « $x \geqslant 1$ et $x^3 < 1$ ».

(f) $-2 \notin]-2\,;5]$, car la borne -2 est ouverte. Mais $5 \in]-2\,;5]$, car la borne 5 est fermée. Une des deux parties est vraie, donc la proposition avec « ou » est vraie.

Ex. 3 ★★☆ **Condition nécessaire, condition suffisante**

(a) Si $x = -5$, alors $x^2 = 25$: c'est vrai. La réciproque « si $x^2 = 25$, alors $x = -5$ » est fausse : pour $x = 5$, on a $5^2 = 25$, mais $5 \neq -5$. Conclusion : « $x = -5$ » est une condition suffisante, mais pas nécessaire.

(b) « Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $ab > 0$ » est vraie : le produit de deux réels strictement positifs est strictement positif. « Si $ab > 0$, alors $a > 0$ et $b > 0$ » est fausse : pour $a = -2$ et $b = -3$, on a $ab = 6 > 0$, mais $a < 0$. Conclusion : « $ab > 0$ » est une condition nécessaire, mais pas suffisante.

(c) $x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0$. Le trinôme $x^2 - 4$ a pour racines -2 et 2 et son coefficient $a = 1$ est positif. Il est donc strictement négatif seulement entre ses racines : $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Les deux implications sont vraies. Conclusion : Kenza a tort, la condition est nécessaire et suffisante.

(d) Si M a pour coordonnées $(1\,;3)$, alors $2 \times 1 + 1 = 3$, donc M est sur la droite. La réciproque est fausse : $N(0\,;1)$ est sur la droite, car $2 \times 0 + 1 = 1$, mais N n'a pas pour coordonnées $(1\,;3)$. Conclusion : « il suffit ».

Ex. 4 ★★☆ **Corriger le raisonnement d'un élève**

(a) Inès a tort : trois exemples ne prouvent pas un « pour tout ». Contre-exemple : $n = 10$. On a $10^2 + 10 + 11 = 121 = 11 \times 11$, qui n'est pas premier. Conclusion : la proposition est fausse.

(b) Tom confond l'implication avec sa réciproque. On a $AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ et $BD = \sqrt{(0-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$: les diagonales ont la même longueur. Mais $AB = 4$ et $BC = 2$, donc $ABCD$ n'est pas un carré. Conclusion : la réciproque est fausse.

(c) La conclusion de Noé est juste, mais pas son contre-exemple. En effet, $3 < 2$ est faux : $x = 3$ ne vérifie pas l'hypothèse. Prenons $x = -3$: $-3 < 2$ et $(-3)^2 = 9$, avec $9 \geqslant 4$. L'hypothèse est vraie et la conclusion est fausse. Conclusion : la proposition est fausse.

(d) Sarah a tort. 7 n'est pas multiple de 10, donc l'hypothèse est fausse : l'implication n'est pas mise en défaut pour $n = 7$. Elle est même vraie pour tout n : si $n = 10k$ avec k entier, alors $n = 2 \times (5k)$ est pair. Conclusion : l'implication est vraie.

Ex. 5 ★★★ **Un encadrement, sa réciproque et ses bornes**

(a) $(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3$. Le produit s'annule en 1 et en 3. Si $x < 1$, les deux facteurs sont négatifs, donc le produit est positif. Si $1 < x < 3$, on a $x - 1 > 0$ et $x - 3 < 0$, donc le produit est négatif. Si $x > 3$, le produit est positif. Ainsi $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ si et seulement si $1 \leqslant x \leqslant 3$. Conclusion : $P \Leftrightarrow Q$.

(b) Si $x \in [1\,;3]$, alors $0 \leqslant x \leqslant 3$. La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $x^2 \leqslant 3^2$, soit $x^2 \leqslant 9$. Conclusion : $P \Rightarrow R$ est vraie.

(c) Réciproque : « si $x^2 \leqslant 9$, alors $x \in [1\,;3]$ ». Un contre-exemple doit vérifier R sans vérifier P. Or $x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$. Les contre-exemples sont donc les réels de $[-3\,;3]$ qui ne sont pas dans $[1\,;3]$, c'est-à-dire ceux de $[-3\,;1[$. Par exemple, pour $x = -2$: $(-2)^2 = 4 \leqslant 9$, mais $-2 \notin [1\,;3]$. Conclusion : $R \Rightarrow P$ est fausse.

(d) D'après les questions 1 et 2, si Q est vraie, alors P est vraie, donc R est vraie : $Q \Rightarrow R$ est vraie. En revanche, $R \Rightarrow Q$ est fausse. Pour $x = -2$, on a $x^2 = 4 \leqslant 9$, mais $(-2)^2 - 4 \times (-2) + 3 = 15 > 0$. Conclusion : « $x^2 \leqslant 9$ » est une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour « $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ ».

(e) Faux. Pour $x = 3$, on a $3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0 \leqslant 0$, mais $3 \notin]1\,;3[$ car la borne 3 est exclue. Conclusion : l'équivalence est fausse ; l'ensemble correct est l'intervalle fermé $[1\,;3]$.

Ex. 6 ★★★ **Multiples de 6 : « et » ou « ou » ?**

(a) Si n est un multiple de 6, alors $n = 6k$ avec k entier. Donc $n = 2 \times (3k)$ est pair, et $n = 3 \times (2k)$ est un multiple de 3. Conclusion : si A est vraie, alors « B et C » est vraie.

(b) Réciproque : « si n est pair, alors n est un multiple de 6 ». Elle est fausse. Contre-exemple : $n = 8$ est pair, mais $8 = 6 \times 1 + 2$, donc 8 n'est pas un multiple de 6.

(c) On écrit $n = 3m$ avec m entier. Raisonnons par l'absurde : supposons m impair, soit $m = 2p + 1$ avec p entier. Alors $n = 6p + 3 = 2(3p + 1) + 1$ est impair, ce qui contredit B.
Donc m est pair : $m = 2p$, et $n = 6p$. Conclusion : n est un multiple de 6, et avec la question 1, $A \Leftrightarrow (B$ et $C)$.

Ex. 6 (suite)

(d) Faux. L'implication $A \Rightarrow (B$ ou $C)$ est vraie, car A entraîne B. Sa réciproque est fausse. Contre-exemple : $n = 9 = 3 \times 3$ vérifie C, donc « B ou C » est vraie ; mais $9 = 6 \times 1 + 3$ n'est pas un multiple de 6. Conclusion : il faut « et », pas « ou ».

(e) Entre 1 et 30, il y a 15 entiers pairs et 10 multiples de 3. Le « ou » est inclusif : les entiers à la fois pairs et multiples de 3 ne se comptent qu'une fois. D'après les questions 1 et 3, ce sont exactement les multiples de 6 : il y en a 5. Conclusion : $15 + 10 - 5 = 20$ entiers vérifient « B ou C ».

Ex. 7 ★★★ **Fonction inverse : quand l'ordre s'inverse-t-il ?**

(a) Non. Un exemple ne prouve pas un « pour tout ». Il faut un cas où $a < b$ et $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$. Contre-exemple : $a = -1$ et $b = 2$. On a bien $-1 < 2$, mais $\frac{1}{a} = -1$ et $\frac{1}{b} = 0{,}5$, et $-1 < 0{,}5$. Conclusion : (I) est fausse pour certains réels non nuls.

(b) Ici $a < b$ est fausse, car $3 > 1$. Une implication n'est fausse que si son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse. Conclusion : (I) est vraie pour $a = 3$ et $b = 1$, même si $\frac{1}{3} > 1$ est fausse elle aussi.

(c) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Si $0 < a < b$, alors $b - a > 0$ et $ab > 0$, donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. Conclusion : si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(d) Réciproque : « si $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, alors $a < b$ ». Si $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, alors $\frac{b-a}{ab} > 0$. Or $ab > 0$, donc $b - a > 0$, soit $a < b$.
Conclusion : pour $a > 0$ et $b > 0$, $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(e) Oui. Si $a < b < 0$, alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ (produit de deux réels négatifs).
Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$, soit $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Conclusion : (I) est vraie dès que a et b sont de même signe ; elle n'est mise en défaut que si a et b sont de signes contraires, comme à la question 1.

2. *Condition nécessaire, condition suffisante*

Ex. 8 ★☆☆ **Nécessaire, suffisante ou les deux ?**

(a) Suffisante. Si $x > 3$, alors $x > 0$ et, comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $x^2 > 3^2 = 9$. La réciproque est fausse : pour $x = -4$, on a $x^2 = 16 > 9$, mais $-4 \leqslant 3$. La condition est donc suffisante, mais pas nécessaire.

Ex. 8 **(suite)**

(b) Suffisante. Si $n = 6k$ avec k entier, alors $n = 2 \times 3k$, donc n est pair. La réciproque est fausse : 4 est pair, mais 4 n'est pas multiple de 6.

(c) Nécessaire. Si $ABCD$ est un carré, alors il a quatre angles droits. La réciproque est fausse : un rectangle de côtés 2 cm et 5 cm a quatre angles droits, mais ce n'est pas un carré.

(d) Nécessaire. Si $a = 0$, alors $a \times b = 0 \times b = 0$. La réciproque est fausse : pour $a = 1$ et $b = 0$, on a $a \times b = 0$, mais $a \neq 0$.

(e) Ni l'une ni l'autre. 2 est pair, mais 2 n'est pas multiple de 3 : la condition n'est pas suffisante. 3 est multiple de 3, mais 3 n'est pas pair : elle n'est pas nécessaire.

(f) Nécessaire et suffisante. Pour tout réel x : $2x + 1 > 7 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$. Chaque étape se lit dans les deux sens (on ajoute -1, puis on divise par $2 > 0$).

Ex. 9 ★☆☆ **« Il faut » ou « il suffit » ?**

(a) Faux. La phrase signifie : « si n est pair, alors n est divisible par 10 ». Contre-exemple : 6 est pair, mais $6 = 0 \times 10 + 6$ n'est pas divisible par 10. Être pair est seulement une condition nécessaire.

(b) Vrai. La phrase signifie : « si $x = 5$, alors $x^2 - 5x = 0$ ». Pour $x = 5$: $5^2 - 5 \times 5 = 25 - 25 = 0$.

(c) Faux. La phrase signifie : « si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$ ». Contre-exemple : pour $x = -3$, on a $x^2 = 9 \geqslant 4$, mais $-3 < 2$.

(d) Vrai. La phrase signifie : « si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ». C'est le théorème de Pythagore, avec $[BC]$ comme hypoténuse.

(e) Faux. La phrase signifie : « si $(x - 1)(x + 3) = 0$, alors $x = 1$ ». Contre-exemple : pour $x = -3$, on a $(-3 - 1)(-3 + 3) = (-4) \times 0 = 0$, mais $-3 \neq 1$. Ce produit est nul si et seulement si $x = 1$ ou $x = -3$.

Ex. 10 ★★☆ **Deux solutions distinctes : à quelle condition ?**

(a) $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times m = 16 - 4m$.

(b) Non. Sa phrase signifie : « si (E_m) a deux solutions distinctes, alors $m < 0$ ». Contre-exemple : pour $m = 3$, $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. L'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$ a deux solutions, -1 et -3 (on vérifie : $1 - 4 + 3 = 0$ et $9 - 12 + 3 = 0$). Pourtant $3 \geqslant 0$. Élise a tort.

Ex. 10 **(suite)**

(c) Oui. Si $m < 0$, alors $-4m > 0$, donc $\Delta = 16 - 4m > 16 > 0$. L'équation a alors deux solutions distinctes. La condition « $m < 0$ » est donc suffisante, mais pas nécessaire (question précédente).

(d) (E_m) a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $16 - 4m > 0$, soit $m < 4$ (pour $m = 4$, $\Delta = 16 - 16 = 0$). Conclusion : « $m < 4$ » est une condition nécessaire et suffisante.

Ex. 11 ★★☆ **Une liste, puis une preuve dans les deux sens**

(a) Le programme garde les entiers de 1 à 20 dont le carré est multiple de 8. Il affiche `[4, 8, 12, 16, 20]`.

(b) Si n est multiple de 4, alors $n = 4k$ avec k entier. Donc $n^2 = 16k^2 = 8 \times 2k^2$, qui est multiple de 8. Conclusion : $P \Rightarrow Q$ est vraie.

(c) Non. Le programme teste seulement les entiers de 1 à 20 : il montre qu'il n'y a pas de contre-exemple parmi eux, mais l'affirmation porte sur tout entier naturel n. Un nombre fini d'exemples ne démontre pas une propriété « pour tout ». Il faudrait une démonstration. Kenza a donc tort de dire que c'est démontré.

(d) Nécessaire ? Raisonnons par contraposée : si n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec k entier, donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair, donc il n'est pas multiple de 8. Ainsi, si n^2 est multiple de 8, alors n est pair. Suffisante ? Non : 6 est pair, mais $6^2 = 36 = 8 \times 4 + 4$ n'est pas multiple de 8 (6 n'est d'ailleurs pas dans la liste affichée). Conclusion : la condition est nécessaire, mais pas suffisante.

Ex. 12 ★★★ **Ben corrige quatre copies**

(a) « Il faut $x > 1$ » signifie : si $\frac{1}{x} < 1$, alors $x > 1$. C'est faux. Contre-exemple : pour $x = -2$, $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} < 1$, mais $-2 \leqslant 1$. C'est l'autre sens qui est vrai : si $x > 1$, alors $x > 0$ et, comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{1} = 1$. Conclusion : pour avoir $\frac{1}{x} < 1$, il suffit d'avoir $x > 1$, mais ce n'est pas nécessaire.

Ex. 12 **(suite)**

(b) L'implication vraie est : si $ABCD$ est un carré, alors ses quatre côtés ont la même longueur. Dans une implication vraie, la condition d'arrivée est nécessaire, pas suffisante. Contre-exemple : $A(3\,;0)$, $B(0\,;4)$, $C(-3\,;0)$, $D(0\,;-4)$. Chaque côté mesure $\sqrt{3^2+4^2}=5$, mais les diagonales mesurent $AC=6$ et $BD=8$. Elles ne sont pas égales, donc $ABCD$ n'est pas un rectangle, donc pas un carré. Conclusion : avoir quatre côtés de même longueur est une condition nécessaire, non suffisante, pour être un carré.

(c) L'exemple de 6 montre seulement que l'implication « si n est multiple de 3, alors n est multiple de 9 » est fausse : $6=3\times 2$, mais $6=9\times 0+6$. Nina a testé le mauvais sens. Dans le sens direct, si $n=9k$ avec k entier, alors $n=3\times(3k)$ avec $3k$ entier, donc n est multiple de 3. Conclusion : « n est multiple de 9 » est une condition suffisante, non nécessaire, pour « n est multiple de 3 ».

(d) Hugo divise par x sans savoir si $x\neq 0$: il perd une solution. Correction : $x(x-3)=2x \Leftrightarrow x(x-3)-2x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$, car un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Vérification : $0\times(0-3)=0=2\times 0$ et $5\times 2=10=2\times 5$. Conclusion : $S=\{0\,;5\}$.

Ex. 13 ★★★ **Un paramètre devant le carré**

(a) Pour $m=1$, le terme en x^2 disparaît : (E_1) s'écrit $-2x+4=0$, soit $x=2$. L'équation (E_1) a une seule solution : $S=\{2\}$.

(b) Pour $m\neq 1$, (E_m) est du second degré avec $a=m-1$, $b=-2m$, $c=m+3$. Alors $\Delta=(-2m)^2-4(m-1)(m+3)=4m^2-4(m^2+2m-3)=12-8m$.

(c) Si $m=1$, il y a une seule solution (première question). Si $m\neq 1$, l'équation du second degré a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta>0$, c'est-à-dire $12-8m>0$, soit $m<\frac{3}{2}$. Conclusion : (E_m) a deux solutions distinctes si et seulement si $m<\frac{3}{2}$ et $m\neq 1$.

(d) Suffisante ? Non. Contre-exemple : $m=1$ vérifie $1<\frac{3}{2}$, mais (E_1) n'a qu'une solution. Nécessaire ? Oui : si (E_m) a deux solutions distinctes, alors $m<\frac{3}{2}$ et $m\neq 1$ d'après la question précédente, donc en particulier $m<\frac{3}{2}$. Conclusion : « $m<\frac{3}{2}$ » est une condition nécessaire, non suffisante.

Ex. 13 **(suite)**

(e) Suffisante ? Non. Contre-exemple : $m=1$ vérifie $1\leqslant 1$, mais (E_1) n'a qu'une solution. Nécessaire ? Non. Contre-exemple : $m=\frac{5}{4}$; on a $m\neq 1$ et $\Delta=12-8\times\frac{5}{4}=2>0$, donc deux solutions distinctes, mais $\frac{5}{4}>1$. Conclusion : « $m\leqslant 1$ » n'est ni nécessaire ni suffisante.

Ex. 14 ★★★ **Quand n^2-1 est-il multiple de 3 ?**

(a) Le programme garde les entiers n de 0 à 14 tels que n^2-1 est multiple de 3. Il affiche `[1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14]`.

(b) Non. Le programme ne teste que les entiers de 0 à 14 : ce sont des exemples, et des exemples ne prouvent pas une propriété « pour tout entier naturel n ». Il faut une démonstration valable pour tout n.

(c) Si n n'est pas multiple de 3, le reste vaut 1 ou 2. Cas 1 : $n=3k+1$ avec k entier ; $n^2-1=9k^2+6k=3(3k^2+2k)$. Cas 2 : $n=3k+2$; $n^2-1=9k^2+12k+3=3(3k^2+4k+1)$. Dans les deux cas, n^2-1 est multiple de 3. Conclusion : $P\Rightarrow Q$ est vraie.

(d) Raisonnons par contraposée : montrons que si n est multiple de 3, alors n^2-1 n'est pas multiple de 3. Si $n=3k$ avec k entier, alors $n^2-1=9k^2-1=3(3k^2-1)+2$, et le reste de la division par 3 vaut 2, donc n^2-1 n'est pas multiple de 3. La contraposée est vraie, donc $Q\Rightarrow P$ est vraie.

(e) Pour que n^2-1 soit multiple de 3, il faut et il suffit que n ne soit pas multiple de 3. En effet, $P\Rightarrow Q$ (troisième question) dit que P est suffisante, et $Q\Rightarrow P$ (quatrième question) dit que P est nécessaire. Conclusion : $P\Leftrightarrow Q$, donc P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

3. *Quantificateurs et négation*

Ex. 15 ★☆☆ **Écrire la négation**

(a) La proposition s'écrit « pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$ ». Sa négation : « il existe un entier naturel n tel que $u_n<0$ » (et non « aucun terme n'est positif »).

(b) « Pour tout réel x, $x^2\neq -4$. »

(c) « Il existe un réel x de $[0\,;3]$ tel que $f(x)\geqslant 7$. »
L'intervalle ne change pas, et la négation de $<$ est $\geqslant$.

(d) La phrase cache un « pour tout » : « pour tout réel $x\leqslant 0$, $x^3\leqslant 0$ ». Sa négation : « il existe un réel $x\leqslant 0$ tel que $x^3>0$ ».
(La phrase de départ est vraie : $x^3=x^2\times x$ est le produit d'un nombre positif par un nombre négatif.)

Ex. 15 **(suite)**

(e) « Pour tout entier n, $n \leqslant 10$ ou n est pair. » En effet, non (A et B) = (non A) ou (non B).

(f) « Il existe un réel x de $]0\,;1]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \geqslant x$. » On garde l'ordre (d'abord x, puis n) et les ensembles ; seule l'inégalité finale est niée.

Ex. 16 ★☆☆ **Exemple ou contre-exemple ?**

(a) Vrai. On a $n^2 - n = n(n-1)$. Distinguons deux cas. Si $n = 0$: $0 \geqslant 0$. Si $n \geqslant 1$: $n \geqslant 0$ et $n - 1 \geqslant 0$, donc $n(n-1) \geqslant 0$. Dans les deux cas, $n^2 \geqslant n$.

(b) Faux. Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$ donne $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Dans $\mathbb{N}$, la phrase est vraie ; dans $\mathbb{R}$, elle est fausse. L'ensemble change tout.

(c) Vrai. Exemple : $x = 3$ donne $3^2 = 9$ et $3 \times 3 = 9$. Un seul exemple suffit pour un « il existe ».

(d) Faux. Contre-exemple : $n = 10$ donne $10^2 + 10 + 11 = 121 = 11^2$, qui n'est pas premier.

(e) Faux. Il faut montrer que l'égalité est fausse pour tout réel x. Or $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Donc, pour tout réel x, $x^2 + 2x + 2 \neq 0$.

Ex. 17 ★★☆ **L'ordre des quantificateurs**

(a) Soit x un réel. Posons $y = x^2 + 1$. Alors $y - x^2 = 1 > 0$, donc $y > x^2$. Ce y dépend de x, ce qui est permis. Conclusion : P_1 est vraie.

(b) « Pour tout réel y, il existe un réel x tel que $y \leqslant x^2$. »

(c) Soit y un réel. Posons $x = |y| + 1$. Alors $x \geqslant 1$, donc $x^2 = x \times x \geqslant x$. D'où $x^2 \geqslant |y| + 1 > |y| \geqslant y$. On a trouvé x tel que $y \leqslant x^2$. La négation de P_2 est vraie. Conclusion : P_2 est fausse.

(d) Léo a bien nié l'inégalité, mais il a inversé l'ordre des quantificateurs. Il faut garder l'ordre : « il existe un réel x tel que, pour tout réel y, $y \leqslant x^2$ ».

Ex. 18 ★★☆ **Chasser les contre-exemples en Python**

(a) « Il existe un entier n de 1 à 50 tel que n n'est pas multiple de 4 et $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 3. » En effet, non (A ou B) = (non A) et (non B).

(b) La condition est `n % 4 != 0 and (n**2 - 1) % 3 != 0`, avec `and` et non `or`.

Ex. 18 **(suite)**

(c) $6 = 4 \times 1 + 2$: 6 n'est pas multiple de 4. De plus, $6^2 - 1 = 35 = 3 \times 11 + 2$ n'est pas multiple de 3. Donc 6 est un contre-exemple. Conclusion : P est fausse.

(d) Distinguons trois cas. Si $n = 3k$: $n^2 - 1 = 3 \times 3k^2 - 1$, qui n'est pas multiple de 3. Si $n = 3k + 1$: $n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$. Si $n = 3k + 2$: $n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k + 1)$.
Donc $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 3 si et seulement si n est multiple de 3. `L` contient donc les multiples de 3 qui ne sont pas multiples de 4. De 1 à 50, il y a 16 multiples de 3 (car $50 = 3 \times 16 + 2$), dont 4 multiples de 12 (12, 24, 36, 48). La dernière ligne affiche $16 - 4 = 12$.

Ex. 19 ★★★ **Une fonction sous la loupe**

(a) « Il existe » devient « pour tout », l'ensemble $\mathbb{R}$ reste le même et $<$ devient $\geqslant$. Non P : « pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$ ».

(b) Pour tout réel x, $f(x) - 1 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 1$. La négation de P est vraie.
Donc P est fausse.

(c) Lina a fait deux erreurs : elle a gardé « pour tout » au lieu de mettre « il existe », et elle a gardé « et » au lieu de mettre « ou ». En revanche, ses inégalités sont bien niées. La bonne négation est : « il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 1$ ou $f(x) \geqslant 10$ ».

(d) Pour $x = 5$: $f(5) = 25 - 20 + 5 = 10$, donc $f(5) \geqslant 10$. La condition « $f(5) < 10$ » est fausse. $x = 5$ est donc un contre-exemple, et la proposition est fausse.

(e) Il s'agit d'un « il existe » : un exemple suffit. Pour $x = 0$: $f(0) = 5$, et on a bien $5 > 1$ et $5 < 10$. La proposition est donc vraie.

Ex. 20 ★★★ **Quand l'ensemble et l'ordre changent tout**

(a) On échange les quantificateurs sans changer leur ordre ni l'ensemble, puis on nie la fin. Non A : « il existe $n \in E$ tel que, pour tout $m \in E$, $m \geqslant n$ ». Non B : « pour tout $m \in E$, il existe $n \in E$ tel que $m > n$ ».

(b) Avec $n = 0$: pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 0$. Non A est donc vraie, et A est fausse. Pour B, un exemple suffit : $m = 0$ convient, car tout entier naturel n vérifie $0 \leqslant n$. B est vraie. Dans $\mathbb{N}$, A est fausse et B est vraie.

(c) Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'entier $m = n - 1$ appartient à $\mathbb{Z}$ et vérifie $m < n$. Ici, m dépend de n.
Donc A est vraie dans $\mathbb{Z}$.

Ex. 20 **(suite)**

(d) Raisonnons par l'absurde : supposons B vraie dans $\mathbb{Z}$. Il existe alors $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Avec $n = m - 1$, on obtient $m \leqslant m - 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant -1$: c'est absurde.
Donc B est fausse, alors que A est vraie. Yanis a tort : l'ordre des quantificateurs compte. Dans A, m peut dépendre de n ; dans B, un même m devrait convenir pour tous les n.

Ex. 21 ★★★ **Quantificateurs cachés**

(a) P : « pour tout entier n, $n(n+1)$ est pair ». Négation : « il existe un entier n tel que $n(n+1)$ est impair ».

(b) Distinguons deux cas. Si n est pair, on écrit $n = 2k$ avec k entier : $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \times [k(2k+1)]$, qui est pair. Si n est impair, on écrit $n = 2k+1$: $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2 \times [(2k+1)(k+1)]$, qui est pair. Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair : P est vraie.

(c) La négation de « tous… » n'est pas « aucun… ». La phrase s'écrit « pour tout entier n de 1 à 10, $n^2 < 50$ ». Sa négation : « il existe au moins un entier n de 1 à 10 tel que $n^2 \geqslant 50$ ».

(d) Pour $n = 8$: $8^2 = 64$ et $64 \geqslant 50$. La phrase de départ est donc fausse. Pour $n = 1$: $1^2 = 1$ et $1 < 50$. Un carré au moins est strictement inférieur à 50, donc la phrase de Sami est fausse aussi. Une proposition et sa vraie négation ne peuvent pas être fausses en même temps : c'est une preuve de plus que Sami s'est trompé.

(e) T : « pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x} \leqslant x$ ». Négation : « il existe un réel x non nul tel que $\frac{1}{x} > x$ ». T est fausse. Contre-exemple : $x = \frac{1}{4}$ donne $\frac{1}{x} = 4$, et $4 > \frac{1}{4}$. Conclusion : la négation est vraie, donc T est fausse.

4. *Statut des lettres et des égalités*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : variable, inconnue ou paramètre ?**

(a) m est un paramètre : c'est un réel fixé mais quelconque, et chaque valeur de m donne une équation. x est l'inconnue : c'est le nombre que l'on cherche.

(b) n est une variable : elle parcourt $\mathbb{N}$ et sert à définir la suite (w_n).

(c) x est une inconnue, celle qu'on cherche. $4x + 7 = 19 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$. La seule solution est 3.

Ex. 22 **(suite)**

(d) c est un paramètre : pour chaque valeur de c, on obtient une parabole différente. Les lettres x et y sont des variables, ce sont les coordonnées d'un point de la courbe.

(e) Non. Ici, x est une variable : elle parcourt $\mathbb{R}$ pour définir la fonction g. Elle ne deviendrait une inconnue que si l'on résolvait une équation, par exemple $g(x) = 1$.

(f) Non. t est une variable : la phrase énonce une propriété vraie pour tous les réels t. On ne cherche aucune valeur particulière de t.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : identité ou équation ?**

(a) Pour $x = 1$: $(1-4)^2 = 9$ alors que $1^2 + 16 = 17$. L'égalité est donc fausse pour $x = 1$: ce n'est pas une identité. Comme équation : $x^2 - 8x + 16 = x^2 + 16 \Leftrightarrow -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La seule solution est 0.

(b) Pour tout réel x, on développe : $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = (4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) = 8x$. L'identité est démontrée.

(c) Non. Trois essais ne démontrent pas un « pour tout » : l'égalité pourrait être fausse pour une autre valeur. Démonstration : pour tout réel x, $(x+2)(x+4) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$. C'est bien une identité, mais c'est ce calcul général qui le prouve, pas les essais d'Inès.

(d) C'est une équation. En développant : $x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 0 = 4$, ce qui est impossible. L'ensemble des solutions est $\emptyset$. Par exemple, pour $x = 0$, on obtient 0 à gauche et 4 à droite.

(e) « Pour tout réel x, $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$. » Sa négation : « il existe un réel x tel que $(x+5)(x-5) \neq x^2 - 25$. » Cette négation est fausse, car l'identité est vraie : en développant, $(x+5)(x-5) = x^2 - 5x + 5x - 25 = x^2 - 25$.

Ex. 24 ★★☆ **La division interdite de Léa**

(a) Pour $m = 2$: $0 \times x = 0$, soit $0 = 0$. C'est vrai pour tout réel x : l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

(b) Léa a divisé par $m - 2$ sans traiter le cas où ce nombre est nul, c'est-à-dire $m = 2$. Dans ce cas, $x = 0$ est aussi solution alors que $0 \neq 2 + 2$. Sa conclusion « une seule solution pour tout m » est donc fausse.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Distinguons deux cas. Si $m = 2$: tout réel est solution. Si $m \neq 2$: on peut diviser par $m-2$, et $x = \frac{m^2-4}{m-2} = \frac{(m-2)(m+2)}{m-2} = m+2$. Conclusion : pour $m \neq 2$, il y a une seule solution, $m+2$; pour $m = 2$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

(d) Il faut $m \neq 2$ (sinon il y a une infinité de solutions) et $m+2 = 7$, donc $m = 5$. Vérification : $(5-2) \times 7 = 21$ et $5^2 - 4 = 21$. Conclusion : $m = 5$.

Ex. 25 ★★☆ **Nombre de solutions selon le paramètre**

(a) Non. Pour $m = 0$, on obtient $-4x + 2 = 0$, une équation du premier degré. $-4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Il y a une seule solution, $\frac{1}{2}$.

(b) Pour $m \neq 0$, on a $a = m$, $b = -4$ et $c = 2$. Donc $\Delta = (-4)^2 - 4 \times m \times 2 = 16 - 8m$.

(c) Distinguons les cas. Si $m = 0$: une solution, $\frac{1}{2}$. Si $m \neq 0$ et $m < 2$: $\Delta > 0$, donc deux solutions. Si $m = 2$: $\Delta = 0$, donc une solution, $x = \frac{4}{2\times 2} = 1$. Si $m > 2$: $\Delta < 0$, donc aucune solution. Conclusion : deux solutions si $m < 2$ et $m \neq 0$, une seule si $m = 0$ ou $m = 2$, aucune si $m > 2$.

(d) -1 est solution si et seulement si $m \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 2 = 0$, soit $m + 6 = 0$, donc $m = -6$. Pour $m = -6$: $\Delta = 16 + 48 = 64$, et les solutions sont $\frac{4-8}{-12} = \frac{1}{3}$ et $\frac{4+8}{-12} = -1$. Conclusion : $m = -6$, et l'autre solution est $\frac{1}{3}$.

Ex. 26 ★★★ **Trois essais ne font pas une identité**

(a) Pour $x = 1$: $1^3 + 11 \times 1 = 12$ et $6 \times 1^2 + 6 = 12$. Pour $x = 2$: $8 + 22 = 30$ et $24 + 6 = 30$. Pour $x = 3$: $27 + 33 = 60$ et $54 + 6 = 60$. L'égalité est donc vraie pour ces trois valeurs.

(b) « (E) est une identité » signifie : pour tout réel x, $x^3 + 11x = 6x^2 + 6$. Sa négation est : il existe un réel x tel que $x^3 + 11x \neq 6x^2 + 6$. Pour $x = 0$, on a $0^3 + 11 \times 0 = 0$ et $6 \times 0^2 + 6 = 6$, donc $0 \neq 6$. C'est un contre-exemple : la négation est vraie. Noé a tort, car trois essais ne démontrent pas un « pour tout ». (E) est une équation, pas une identité.

Ex. 26 **(suite)**

(c) Le programme garde les entiers de -5 à 5 pour lesquels l'égalité est fausse. Il affiche `[-5, -4, -3, -2, -1, 0, 4, 5]`. Cette liste confirme qu'il existe des contre-exemples. Elle montre aussi que, parmi ces entiers, seuls 1, 2 et 3 sont solutions. Mais elle ne dit rien des autres réels (non entiers, ou hors de $[-5\,;5]$). Elle ne suffit donc pas pour résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

(d) $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, donc $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 2x + 9x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Alors $(E) \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\{1\,;2\,;3\}$.

Ex. 27 ★★★ **Un carré qui dépend du paramètre**

(a) Pour $m = 3$: $2x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. Pour $m = 0$: $-x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = -3$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif ou nul. Conclusion : pour $m = 3$, les solutions sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$; pour $m = 0$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

(b) Non : pour $m = 1$, $m - 1 = 0$, et on ne divise jamais par 0. L'équation devient $0 \times x^2 = 4$, soit $0 = 4$, ce qui est impossible. Conclusion : pour $m = 1$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

(c) Pour $m \neq 1$, on peut diviser par $m-1$: l'équation équivaut à $x^2 = \frac{m+3}{m-1}$. Le numérateur s'annule en -3, le dénominateur en 1. Le quotient est donc strictement positif si $m < -3$ ou $m > 1$, nul si $m = -3$, et strictement négatif si $-3 < m < 1$ (par exemple, $m = 0$ donne -3). Distinguons les cas. Si $m < -3$ ou $m > 1$: deux solutions, $\pm\sqrt{\frac{m+3}{m-1}}$. Si $m = -3$: $x^2 = 0$, une seule solution, $x = 0$. Si $-3 < m < 1$: un carré n'est jamais strictement négatif, donc aucune solution. Avec la question précédente : il n'y a aucune solution pour $-3 < m \leqslant 1$.

(d) 2 est solution si et seulement si $(m-1) \times 4 = m + 3 \Leftrightarrow 4m - 4 = m + 3 \Leftrightarrow 3m = 7 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}$. Pour $m = \frac{7}{3}$, on a $\frac{4}{3}x^2 = \frac{16}{3}$, soit $x^2 = 4$. Conclusion : l'autre solution est -2.

(e) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un m tel que l'égalité soit vraie pour tout réel x. Pour $x = 0$, on obtient $0 = m + 3$, donc $m = -3$. Pour $x = 1$, on obtient alors $(-3-1) \times 1^2 = -4$ d'un côté et $-3 + 3 = 0$ de l'autre : $-4 = 0$, c'est absurde. Conclusion : pour aucune valeur de m, l'égalité n'est une identité.

Ex. 28 ★★★ **Une famille de fonctions et l'affirmation de Mia**

(a) Dans la définition de f_a, x est une variable : il parcourt $\mathbb{R}$. Dans l'équation $f_a(x) = 0$, x est l'inconnue : on cherche ses valeurs. a est un paramètre : il est fixé mais quelconque, et chaque valeur de a donne une fonction différente.

(b) Pour tous réels x et a, on pose $u = x - a$. Alors $(u - 3)(u + 3) = u^2 - 9 = (x - a)^2 - 9 = x^2 - 2ax + a^2 - 9 = f_a(x)$. C'est une identité : elle est vraie pour tous les réels x et a, donc le « pour tout » porte sur x et sur a.

(c) D'après la question précédente, $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = a + 3$ ou $x = a - 3$. Pour tout réel a, $(a + 3) - (a - 3) = 6 \neq 0$, donc ces deux solutions sont toujours distinctes. Conclusion : Mia a raison. Pour tout réel a, l'équation a exactement deux solutions, $a - 3$ et $a + 3$.

(d) 0 est solution si et seulement si $f_a(0) = a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ ou $a = -3$. Pour $a = 3$, les solutions sont 0 et 6. Pour $a = -3$, ce sont -6 et 0. Conclusion : l'autre solution est 6 si $a = 3$, et -6 si $a = -3$.

(e) La plus petite solution est $a - 3$. Les deux solutions sont strictement positives si et seulement si $a - 3 > 0$, c'est-à-dire $a > 3$. Conclusion : il faut et il suffit que $a \in]3\,;+\infty[$.

5. *Contraposée, absurde, disjonction des cas*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : contraposée ou réciproque ?**

(a) La contraposée est : « si $x^2 \leqslant 9$, alors $x \leqslant 3$ ».

(b) La négation de « n est pair » est « n est impair ». La contraposée est donc : « si n est impair, alors n n'est pas multiple de 6 ».

(c) Non. Jade a écrit (non P) $\Rightarrow$ (non Q), ce qui n'est pas la contraposée. D'ailleurs, sa phrase est fausse : un rectangle qui n'est pas un carré a des diagonales de même longueur. La bonne contraposée est : « si les diagonales de $ABCD$ n'ont pas la même longueur, alors $ABCD$ n'est pas un carré ».

(d) Noé est parti de « n impair » et il est arrivé à « n^2 impair ». Il a donc démontré la réciproque : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Cela ne prouve pas l'implication demandée.

(e) Il faut démontrer la contraposée : « si n est pair, alors n^2 est pair ».

Ex. 29 (suite)

(f) Faux. Contre-exemple : « si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ » est vraie. Mais sa réciproque, « si $x^2 = 4$, alors $x = 2$ », est fausse : pour $x = -2$, on a $(-2)^2 = 4$ et pourtant $x \neq 2$.

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : les bonnes briques d'une preuve**

(a) $n = 2k + 1$ avec k entier. Alors $n^2 + 2n = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 = 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1$. Comme $2k^2 + 4k + 1$ est un entier, $n^2 + 2n$ est impair.

(b) Pour prouver qu'un nombre est pair, il faut l'écrire $2m$ avec m ENTIER, et rien ne dit que $\frac{n^2+3}{2}$ est entier. Contre-exemple : pour $n = 2$, $n^2 + 3 = 7$, qui est impair.

(c) Non. Les restes possibles dans la division par 3 sont 0, 1 et 2. Il manque le cas $n = 3k + 2$.

(d) Non. Le cas $x = 0$ est oublié. Il faut distinguer $x \geqslant 0$ et $x < 0$
(ou $x > 0$ et $x \leqslant 0$).

(e) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un plus petit réel strictement positif a. Alors $\frac{a}{2}$ est un réel strictement positif et $\frac{a}{2} < a$. C'est une contradiction, car a était le plus petit. Il n'existe donc pas de plus petit réel strictement positif.

Ex. 31 ★★☆ **Disjonction des cas sur les entiers**

(a) Distinguons deux cas. Si n est pair, alors $n = 2k$ avec k entier, et $n^2 + n + 1 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$, où $2k^2 + k$ est entier. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ avec k entier, et $n^2 + n + 1 = 4k^2 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 3k + 1) + 1$, où $2k^2 + 3k + 1$ est entier. Dans les deux cas, $n^2 + n + 1$ est impair.

(b) 2026 est pair. D'après la question précédente, $n^2 + n + 1$ est impair pour tout entier n, donc il ne peut pas être égal à 2026. Conclusion : l'équation n'a aucune solution entière.

(c) Il n'existe aucun entier strictement compris entre 0 et 1. Un entier vérifie donc $n \leqslant 0$ ou $n \geqslant 1$: les deux cas couvrent tous les entiers. Si $n \leqslant 0$: $n^2 \geqslant 0 \geqslant n$. Si $n \geqslant 1$: $n > 0$, donc en multipliant $n \geqslant 1$ par n, on obtient $n^2 \geqslant n$. Conclusion : pour tout entier n, $n^2 \geqslant n$.

(d) Faux. Contre-exemple : pour $x = 0{,}5$, on a $x^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$. Les deux cas de la question précédente ne couvrent pas les réels strictement compris entre 0 et 1.

Ex. 32 ★★☆ **Choisir son raisonnement**

(a) Raisonnons par contraposée : montrons que « si n est pair, alors $5n+3$ est impair ». Soit $n = 2k$ avec k entier. Alors $5n+3 = 10k+3 = 2(5k+1)+1$, où $5k+1$ est entier, donc $5n+3$ est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi.

(b) La conclusion est négative (« différent de 1 ») : raisonnons par l'absurde. Soit $x \neq -1$. Supposons que $\frac{x}{x+1} = 1$. En multipliant par $x+1 \neq 0$, on obtient $x = x+1$, soit $0 = 1$: c'est une contradiction. Conclusion : pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{x}{x+1} \neq 1$.

(c) Le programme affiche $[2, 6, 10, 14, 18, 22, 26]$: la liste des entiers de 1 à 29 dont le carré est multiple de 4 mais qui ne sont pas multiples de 4. La proposition est donc fausse. Contre-exemple : $2^2 = 4$ est multiple de 4, mais 2 n'est pas multiple de 4.

(d) On écrit la condition `n**2 % 9 == 0 and n % 9 != 0`. Le programme affiche alors $[3, 6, 12, 15, 21, 24]$. La proposition est donc fausse. Contre-exemple : $3^2 = 9$ est multiple de 9, mais 3 n'est pas multiple de 9.

Ex. 33 ★★★ **Contraposée ou réciproque : corriger deux copies**

(a) La réciproque est « si n est pair, alors $7n$ est pair ». Lina part de « n pair » et arrive à « $7n$ pair » : elle a démontré la réciproque, pas l'implication demandée. Une implication et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité. Sa copie ne prouve donc pas l'énoncé.

(b) Non. Avec P : « $7n$ pair » et Q : « n pair », la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est (non Q) $\Rightarrow$ (non P). Malo a écrit (non P) $\Rightarrow$ (non Q) : c'est la contraposée de la réciproque. Elle a donc la même valeur de vérité que ce que Lina a déjà démontré, et elle ne prouve pas l'énoncé.

(c) La contraposée est : « si n est impair, alors $7n$ est impair ». Raisonnons par contraposée. Soit n impair : $n = 2k+1$ avec k entier. Alors $7n = 14k+7 = 2(7k+3)+1$, où $7k+3$ est un entier : $7n$ est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi : pour tout entier n, si $7n$ est pair, alors n est pair.

(d) Faux. Contre-exemple : $n = 1$. $6 \times 1 = 6$ est pair, mais 1 est impair.

Ex. 33 (suite)

(e) Pour $6n$: si $n = 2k$ avec k entier, alors $6n = 2 \times 6k$ est pair, donc « n pair » est une condition suffisante. Elle n'est pas nécessaire, car pour $n = 1$, $6n$ est pair alors que n est impair. Pour $7n$: la réciproque (copie de Lina) et l'implication (question 3) sont vraies, donc $7n$ est pair si et seulement si n est pair. La condition est nécessaire et suffisante.

Ex. 34 ★★★ **Disjonction des cas : restes et valeur absolue**

(a) $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)\,n\,(n+1)$.

(b) Distinguons trois cas qui couvrent tous les entiers (k désigne un entier). Si $n = 3k$, le facteur n est un multiple de 3. Si $n = 3k+1$, alors $n-1 = 3k$ est un multiple de 3. Si $n = 3k+2$, alors $n+1 = 3k+3 = 3(k+1)$ est un multiple de 3. Dans chaque cas, un facteur du produit $(n-1)n(n+1)$ est un multiple de 3, donc le produit aussi. Conclusion : pour tout entier n, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

(c) Il affiche `[]` : aucun entier de 0 à 49 ne rend n^2+1 multiple de 3. Ce n'est pas une preuve. La conjecture porte sur tous les entiers, et des exemples ne suffisent pas pour un « pour tout ». Le programme montre seulement qu'il n'y a pas de contre-exemple entre 0 et 49.

(d) Distinguons trois cas selon le reste de la division de n par 3 (k entier). Si $n = 3k$: $n^2+1 = 9k^2+1 = 3 \times 3k^2+1$, le reste est 1. Si $n = 3k+1$: $n^2+1 = 9k^2+6k+2 = 3(3k^2+2k)+2$, le reste est 2. Si $n = 3k+2$: $n^2+1 = 9k^2+12k+5 = 3(3k^2+4k+1)+2$, le reste est 2. Les nombres $3k^2$, $3k^2+2k$ et $3k^2+4k+1$ sont des entiers, et le reste n'est jamais 0. Conclusion : la conjecture est vraie.

(e) Distinguons deux cas qui couvrent tous les réels. Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$ et $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Conclusion : pour tout réel x, $x^2 - |x| + \frac{1}{4} \geqslant 0$.

Ex. 35 ★★★ **Raisonner par l'absurde**

(a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un plus grand entier pair N : $N = 2k$ avec k entier. Alors $N+2 = 2k+2 = 2(k+1)$, où $k+1$ est un entier : $N+2$ est pair et $N+2 > N$. C'est une contradiction, puisque N était le plus grand entier pair.
Donc il n'existe pas de plus grand entier pair.

Ex. 35 **(suite)**

(b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $5-3\sqrt{2}=r$ avec r rationnel. Alors $3\sqrt{2}=5-r$, donc $\sqrt{2}=\frac{5-r}{3}$. Ce nombre est rationnel, comme quotient de deux rationnels. Cela contredit le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc $5-3\sqrt{2}$ est irrationnel.

(c) Faux. Si $3\sqrt{2}=r$ avec r rationnel, alors $\sqrt{2}=\frac{r}{3}$ serait rationnel, ce qui est impossible : $3\sqrt{2}$ est donc irrationnel. D'après la question précédente, $5-3\sqrt{2}$ est irrationnel. Pourtant $3\sqrt{2}+(5-3\sqrt{2})=5$ est rationnel : c'est un contre-exemple.

(d) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe des entiers a et b tels que $a^2-b^2=2$, c'est-à-dire $(a-b)(a+b)=2$. Comme $(a-b)+(a+b)=2a$ est pair, $a-b$ et $a+b$ ont la même parité. Distinguons deux cas (p et q entiers). S'ils sont tous deux pairs, avec $a-b=2p$ et $a+b=2q$, alors $4pq=2$, soit $2pq=1$: un nombre pair serait égal à 1, c'est impossible. S'ils sont tous deux impairs, avec $a-b=2p+1$ et $a+b=2q+1$, alors leur produit vaut $2(2pq+p+q)+1$. Ce produit est impair, donc il ne peut pas valoir 2. Les deux cas mènent à une contradiction.
Donc il n'existe pas d'entiers a et b tels que $a^2-b^2=2$.

6. *Ensembles, couples et produit cartésien*

Ex. 36 ★☆☆ **Appartenance, inclusion, couples : vrai ou faux ?**

(a) Faux. $\{7\}$ est un ensemble, pas un élément de $\{1;7;9\}$. Il faut écrire $7\in\{1;7;9\}$ ou $\{7\}\subset\{1;7;9\}$.

(b) Vrai. L'ensemble vide n'a aucun élément, donc il n'y a aucun élément à trouver dans $\{1;7;9\}$: l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

(c) Faux. Les deux ensembles sont bien égaux, car l'ordre ne compte pas dans un ensemble. Mais un couple est ordonné : les premières composantes 9 et 4 sont différentes, donc $(9;4)\neq(4;9)$.

(d) Faux. $-2\notin\mathbb{N}$. Le couple n'a donc pas ses deux composantes dans $\mathbb{N}$.

(e) Faux. $\text{Card}(A^2)=\text{Card}(A)\times\text{Card}(A)=4^2=16$, et non 4×2.

Ex. 36 **(suite)**

(f) Faux. Un code est un couple (lettre ; chiffre), c'est-à-dire un élément de $\{X;Y;Z\}\times\{0;1;\dots;9\}$. On multiplie les cardinaux au lieu de les additionner : il y a $3\times 10=30$ codes.

(g) Faux. « Ou » est inclusif : il suffit que x soit dans l'un des deux intervalles. Contre-exemple : $x=-2$ appartient à $[-3;1]$, mais $-2\notin[0;1]$.

Ex. 37 ★☆☆ **Intersection, réunion, complémentaire**

(a) $A=\{4;8;12;16;20\}$, $B=\{5;10;15;20\}$ et $A\cap B=\{20\}$: 20 est le seul nombre de E multiple de 4 et de 5.

(b) $A\cup B=\{4;5;8;10;12;15;16;20\}$: ce sont les nombres multiples de 4 ou de 5 (ou des deux). $\text{Card}(A\cup B)=8$.

(c) $\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)=5+4-1=8$. On retrouve bien $\text{Card}(A\cup B)$. Le nombre 20 était compté deux fois dans $5+4$.

(d) $\overline{A}$ contient les éléments de E qui ne sont pas multiples de 4, donc $\text{Card}(\overline{A})=20-5=15$.

(e) $[-4;3]\cap]0;8[=]0;3]$ (on garde les réels qui sont dans les deux) et $[-4;3]\cup]0;8[=[-4;8[$ (on garde les réels qui sont dans l'un ou dans l'autre).

(f) Dans $[0;10]$, le complémentaire est $[0;2[$. Dans $\mathbb{R}$, c'est $]-\infty;2[\cup]10;+\infty[$. Le complémentaire dépend donc de l'ensemble de référence.

Ex. 38 ★★☆ **Lister et comparer A × B et B × A**

(a) Ligne 0 : $(0;1)$ et $(0;3)$. Ligne 1 : $(1;1)$ et $(1;3)$. Ligne 2 : $(2;1)$ et $(2;3)$. Le tableau contient donc 6 couples.

(b) Il y a une case par couple, donc $\text{Card}(A\times B)=3\times 2=6$. De même, $\text{Card}(B\times A)=2\times 3=6$ et $\text{Card}(A^2)=3^2=9$.

(c) $3\notin A$, donc $(3;1)\notin A\times B$. Mais $3\in B$ et $1\in A$, donc $(3;1)\in B\times A$. Conclusion : $A\times B\neq B\times A$, alors que ces deux ensembles ont le même cardinal.

(d) Non. $A\cap B$ contient les éléments communs à A et à B : ce sont des nombres, pas des couples.
Donc $A\cap B=\{1\}$. Le couple $(1;1)$ est un élément de $A\times B$, pas de $A\cap B$.

(e) On parcourt les 9 couples de A^2. Ceux qui vérifient $a<b$ sont $(0;1)$, $(0;2)$ et $(1;2)$. Conclusion : il y a 3 couples.

Ex. 39 ★★☆ **Une grille de points dans le plan**

(a) Les points correspondent aux couples de $A \times B$. Il y en a $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 5 \times 4 = 20$. La grille compte 20 points.

(b) On teste chaque x de A. Pour $x = -2$, on trouve $y = -1 \notin B$. Pour les autres valeurs, on obtient les points $(-1\,;0)$, $(0\,;1)$, $(1\,;2)$ et $(2\,;3)$. Il y a donc 4 points.

(c) `L` contient les points de la grille situés sur la parabole $y = x^2$. Pour $x = -2$ et $x = 2$, on trouve $y = 4 \notin B$. Il reste les points $[-1, 1]$, $[0, 0]$ et $[1, 1]$, dans cet ordre. Le programme affiche cette liste de trois points, puis 3.

(d) `M = [ [x, y] for x in range(-2, 3) for y in range(4) if y > x]`. On compte les points pour chaque x : 4 pour $x = -2$, 4 pour $x = -1$, 3 pour $x = 0$, 2 pour $x = 1$ et 1 pour $x = 2$.
Donc `len(M)` vaut 14.

Ex. 40 ★★★ **Quand a-t-on $A \times B = B \times A$?**

(a) $A \times B = \{(1\,;4)\,;(1\,;7)\,;(4\,;4)\,;(4\,;7)\}$ et $B \times A = \{(4\,;1)\,;(4\,;4)\,;(7\,;1)\,;(7\,;4)\}$. Chacun de ces deux ensembles contient $2 \times 2 = 4$ couples.

(b) Non. Le couple $(1\,;7)$ appartient à $A \times B$, car $1 \in A$ et $7 \in B$. Mais $1 \notin B$, donc $(1\,;7) \notin B \times A$. Conclusion : $A \times B \neq B \times A$, bien que ces deux ensembles aient le même cardinal. Deux ensembles de même cardinal ne sont pas forcément égaux.

(c) Soit $a \in A$. Comme B n'est pas vide, on peut choisir $b \in B$. Alors $(a\,;b) \in A \times B$, donc $(a\,;b) \in B \times A$, ce qui donne $a \in B$.
Donc tout élément de A est dans B : $A \subset B$. En échangeant les rôles de A et B (et puisque A n'est pas vide), on obtient de même $B \subset A$. Conclusion : $A = B$.

(d) Faux. Contre-exemple : $A = \emptyset$ et $B = \{1\}$. Aucun couple ne peut avoir sa première composante dans $\emptyset$, donc $A \times B = \emptyset$. De même, $B \times A = \emptyset$. On a donc $A \times B = B \times A$, alors que $A \neq B$. L'hypothèse « non vides » de la question précédente est donc indispensable.

(e) Si $A = B$, alors $A \times B = A \times A = B \times A$: la condition est suffisante. D'après la question 3, si $A \times B = B \times A$ avec A et B non vides, alors $A = B$: la condition est nécessaire. Conclusion : pour des ensembles non vides, « $A = B$ » est une condition nécessaire et suffisante.

Ex. 41 ★★★ **Deux lancers de dé : compter les couples**

(a) Un résultat est un couple $(x\,;y)$ avec $x \in A$ et $y \in A$, donc l'ensemble des résultats est $A \times A = A^2$. Le couple est ordonné : $(2\,;5)$, c'est « 2 puis 5 », et $(5\,;2)$, c'est « 5 puis 2 ». Ce sont deux résultats différents, même si $\{2\,;5\} = \{5\,;2\}$. On a $\text{Card}(A^2) = 6 \times 6 = 36$.

(b) Distinguons les cas. Si $x = 2k$ et $y = 2m$ (avec k et m entiers), alors $x + y = 2(k + m)$ est pair. Si $x = 2k + 1$ et $y = 2m + 1$, alors $x + y = 2(k + m + 1)$ est pair. Si $x = 2k$ et $y = 2m + 1$, alors $x + y = 2(k + m) + 1$ est impair, et de même si x est impair et y pair.
Conclusion : $x + y$ est pair si et seulement si x et y ont la même parité.
Donc C est formé des couples de $\{2\,;4\,;6\}^2$ et des couples de $\{1\,;3\,;5\}^2$: $\text{Card}(C) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$.

(c) Notons D_1 l'ensemble des résultats avec $x = 6$ et D_2 celui des résultats avec $y = 6$. On a $D = D_1 \cup D_2$: le « ou » est inclusif. Le couple $(6\,;6)$ est dans $D_1 \cap D_2$, et Léo l'a compté deux fois.
Donc $\text{Card}(D) = 6 + 6 - 1 = 11$.

(d) La condition est `(x + y) % 2 == 0 and (x == 6 or y == 6)`. Les couples obtenus sont $(2\,;6)$, $(4\,;6)$, $(6\,;2)$, $(6\,;4)$ et $(6\,;6)$: le programme affiche 5.
Donc $\text{Card}(C \cap D) = 5$.

(e) D'après la formule du cardinal d'une réunion, $\text{Card}(C \cup D) = \text{Card}(C) + \text{Card}(D) - \text{Card}(C \cap D) = 18 + 11 - 5 = 24$. Conclusion : 24 résultats ont une somme paire ou contiennent au moins un 6.

Ex. 42 ★★★ **Intervalles et rectangles du plan**

(a) Un réel x est dans $I \cap J$ si $-1 \leqslant x < 4$ et $2 \leqslant x \leqslant 6$, c'est-à-dire si $2 \leqslant x < 4$.
Donc $I \cap J = [2\,;4[$. Un réel est dans $I \cup J$ s'il est dans I ou dans J : comme les deux intervalles se chevauchent, $I \cup J = [-1\,;6]$.

(b) $(x\,;y) \in I \times J$ signifie « $x \in I$ et $y \in J$ ». Sa négation est « $x \notin I$ ou $y \notin J$ », c'est-à-dire : $x < -1$ ou $x \geqslant 4$ ou $y < 2$ ou $y > 6$. Par exemple, pour $P(0\,;0)$, on a $0 \in I$ mais $0 \notin J$. Conclusion : $P \notin I \times J$.

(c) M : $3 \in I$ et $5 \in J$, donc $M \in I \times J$. En revanche, $5 \notin I$ (car $5 \geqslant 4$), donc $M \notin J \times I$. N : $5 \notin I$, donc $N \notin I \times J$. Mais $5 \in J$ et $3 \in I$, donc $N \in J \times I$.
L'ordre des coordonnées compte : $I \times J \neq J \times I$.

Ex. 42 (suite)

(d) Raisonnons par équivalences. $(x\,;y) \in (I \times J) \cap (J \times I)$ équivaut à « $x \in I$, $y \in J$, $x \in J$ et $y \in I$ ». Cela équivaut à « $x \in I \cap J$ et $y \in I \cap J$ », c'est-à-dire à $(x\,;y) \in (I \cap J)^2$. Conclusion : les deux ensembles sont égaux.

(e) Cet ensemble est $[2\,;4[^2$: ce sont les points tels que $2 \leqslant x < 4$ et $2 \leqslant y < 4$. C'est un carré de côté $4 - 2 = 2$, dont on a retiré les côtés $x = 4$ et $y = 4$. Retirer des segments ne change pas l'aire, donc l'aire vaut $2^2 = 4$ unités d'aire.

7. *Listes en Python*

Ex. 43 ★☆☆ **Indices et modifications d'une liste**

(a) Les indices commencent à 0, donc `L[1]` est le deuxième élément : `L[1]` vaut 8.

(b) `len(L)` vaut 6. `L[5]` est le dernier élément : il vaut 1.

(c) Les indices vont de 0 à 5. L'indice 6 est hors de la liste, donc Python affiche une erreur.

(d) `remove` supprime seulement la première occurrence de la valeur 8 : `[5, 3, 8, 6, 1]`.

(e) `del L[3]` supprime l'élément d'indice 3, c'est-à-dire le quatrième (8) : `[5, 8, 3, 6, 1]`.

(f) `append` ajoute 0 à la fin, puis le premier élément est remplacé par 2 : `[2, 8, 3, 8, 6, 1, 0]`.

(g) = affecte une valeur et == teste une égalité : on écrit `if L[2] == 3:`. `L[2]` est le troisième élément, qui vaut 3 : la condition est vraie.

Ex. 44 ★☆☆ **range et listes en compréhension**

(a) `range(4)` commence à 0 et s'arrête à 3 : `[0, 1, 2, 3]`.

(b) `range(3, b)` s'arrête à $b - 1$. Il faut $b - 1 = 12$, donc $b = 13$.

(c) Parmi 1 à 7, seuls 1, 4 et 7 ont pour reste 1 dans la division par 3 : `[1, 16, 49]`.

(d) Les entiers pairs de 10 à 19 sont 10, 12, 14, 16, 18. On retire les multiples de 3 (12 et 18) : il reste 10, 14, 16. La longueur vaut 3.

(e) `not` porte sur toute la comparaison `n % 4 == 0`, et il est évalué avant `or`. Pour 8, `n == 8` est vrai, donc $8 \in M$. Pour 4, `not 4 % 4 == 0` est faux et `4 == 8` aussi, donc $4 \notin M$.

(f) `[n for n in range(1, 51) if n % 7 == 0]`, qui vaut `[7, 14, 21, 28, 35, 42, 49]`.

Ex. 45 ★★☆ **Parcourir par les indices ou par les valeurs**

(a) `i` prend les valeurs 0 à 4 :

i	0	1	2	3	4
L[i]	4	9	2	7	5
S	4	4	6	6	11

Seuls les indices pairs 0, 2 et 4 comptent : $4 + 2 + 5 = 11$. Le programme affiche 11.

(b) Avec `for x in L`, `x` parcourt les valeurs 4, 9, 2, 7, 5 et non les indices. Les valeurs paires sont 4 et 2, donc le programme affiche 6. Le premier programme sélectionne selon la parité de l'indice, celui de Lina selon la parité de la valeur.

(c) La condition est `i % 2 == 1`. Les indices impairs sont 1 et 3, donc `T` vaut `[9, 7]`.

Ex. 46 ★★☆ **Corriger un programme, puis conclure**

(a) `V = []` est dans la boucle, donc la liste est vidée à chaque tour. À la fin, elle ne contient que la dernière valeur. De plus, `range(9)` s'arrête à 8. Pour $n = 8$, on a $64 - 24 + 5 = 45$: le programme affiche `[45]`.

(b) On place `V = []` avant la boucle et on écrit `for n in range(10):`, suivi de `V.append(n**2 - 3*n + 5)` puis `print(V)`. Le programme affiche `[5, 3, 3, 5, 9, 15, 23, 33, 45, 59]`.

(c) `return False` est dans la boucle : dès le premier élément impair (3), la fonction s'arrête et renvoie False sans tester 4. On désindente `return False` pour le placer après la boucle. Toutes les valeurs de `V` sont impaires, donc `existe_pair(V)` renvoie False.

(d) Non. `V` contient 9, obtenu pour $n = 4$: $4^2 - 3 \times 4 + 5 = 9 = 3 \times 3$, qui n'est pas premier. Ce contre-exemple montre que la proposition est fausse. Une liste finie suffit pour trouver un contre-exemple, mais elle ne pourrait pas démontrer un « pour tout » sur $\mathbb{N}$.

Ex. 47 ★★★ **Une conjecture testée, puis démontrée**

(a) `range(1, 8)` s'arrête à 7 : `n` prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et $n^2 + 3n$ vaut 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70. Chaque valeur est ajoutée à la fin de L. Aucune n'est impaire, donc C est vide. Le programme affiche `[4, 10, 18, 28, 40, 54, 70]`, puis `[]`.

Ex. 47 (suite)

(b) Non. Le programme n'a vérifié que 7 valeurs de n (0 et 8 ne sont même pas testés). On ne peut pas tester un ensemble infini comme $\mathbb{N}$: un programme peut trouver un contre-exemple, mais pas démontrer un « pour tout ». Des exemples ne prouvent donc pas la propriété.

(c) Distinguons deux cas. Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier, alors $n^2 + 3n = 4k^2 + 6k = 2(2k^2 + 3k)$ est pair. Si n est impair, $n = 2k + 1$, alors $n^2 + 3n = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 5k + 2)$ est pair. Dans tous les cas, $n^2 + 3n$ est pair.

(d) `[n for n in range(12) if (n**2 + 3*n) % 4 != 0]` (la borne 12 permet d'inclure 11). On calcule les valeurs de $n^2 + 3n$:
$0, 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70, 88, 108, 130, 154$. Celles qui ne sont pas multiples de 4 sont $10, 18, 54, 70, 130, 154$. La liste vaut donc `[2, 3, 6, 7, 10, 11]`.

(e) Négation : « il existe $n \in \mathbb{N}$ multiple de 4 tel que $n^2 + 3n$ n'est pas multiple de 4 ». La proposition de départ est vraie : si $n = 4m$ avec m entier, alors $n^2 + 3n = 16m^2 + 12m = 4(4m^2 + 3m)$, qui est multiple de 4. La négation est donc fausse. La liste de la question précédente ne contient ni 0, ni 4, ni 8 : c'est cohérent, mais cela ne prouve rien.

Ex. 48 ★★★ Une fonction qui parcourt une liste

(a) `f(L)` renvoie True si et seulement s'il existe un élément x de L tel que $x^2 - 5x + 6 < 0$. La fonction s'arrête et renvoie True dès qu'elle trouve un tel x. Elle renvoie False si elle n'en trouve aucun.

(b) Pour `[1, 2.5, 4]` : avec $x = 1$, $1 - 5 + 6 = 2$, qui n'est pas < 0. Avec $x = 2{,}5$, $6{,}25 - 12{,}5 + 6 = -0{,}25 < 0$: la fonction renvoie True. Pour `[0, 1, 2, 3, 4, 5]`, les valeurs sont $6, 2, 0, 0, 2, 6$. Aucune n'est strictement négative (0 ne l'est pas) : la fonction renvoie False.

(c) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Ce trinôme a pour racines 2 et 3, et il est strictement négatif seulement pour $x \in]2\,;3[$. Raisonnons par l'absurde : si `f(L)` renvoyait True, L contiendrait un entier strictement compris entre 2 et 3, ce qui est impossible.
Donc `f(L)` renvoie False.

(d) Oui. `f(L)` teste « il existe x dans L tel que $x^2 - 5x + 6 < 0$ ». Sa négation est « pour tout x de L, $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$ ».
Donc `not f(L)` vaut True exactement quand ce « pour tout » est vrai : Mehdi a raison.

Ex. 48 (suite)

(e) La liste vaut $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3\right]$ (`range(4, 10)` s'arrête à 9). Elle contient $\frac{7}{3} \in]2\,;3[$, et $\left(\frac{7}{3} - 2\right)\left(\frac{7}{3} - 3\right) = -\frac{2}{9} < 0$.
Donc `f` renvoie True, et `not f(...)` vaut False.

Ex. 49 ★★★ Couples d'un produit cartésien filtrés par un programme

(a) Pour chacune des 4 valeurs de `a`, `b` prend 3 valeurs. La ligne `if` est donc exécutée $4 \times 3 = 12$ fois, une fois par couple : c'est $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = 12$.

(b) `not` porte sur toute l'égalité : on garde les couples où $a > b$ et $a + b$ est impair.

×	**0**	**1**	**2**
1	oui	non	non
2	non	oui	non
3	oui	non	oui
4	non	oui	non

Les couples sont ajoutés à la fin, dans l'ordre des boucles. Le programme affiche `5`, puis `[[1, 0], [2, 1], [3, 0], [3, 2], [4, 1]]`.

(c) La négation de « $a > b$ et $a + b$ impair » est « $a \leqslant b$ ou $a + b$ pair ». La condition s'écrit `a <= b or (a + b) % 2 == 0`. Elle retient le complémentaire de l'ensemble précédent dans $A \times B$, soit $12 - 5 = 7$ couples.

(d) `remove` supprime la valeur `[3, 0]` : P vaut `[[1, 0], [2, 1], [3, 2], [4, 1]]`. `del P[2]` supprime l'élément d'indice 2, c'est-à-dire le troisième élément `[3, 2]` : P vaut `[[1, 0], [2, 1], [4, 1]]`. Alors `P[len(P) - 1]` = `P[2]` vaut `[4, 1]`. En revanche, `P[3]` provoque une erreur, car le dernier indice est 2.