Logique et raisonnement – exercices

Mathématiques – Première spécialité

Logique et raisonnement · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est « non $Q \Rightarrow$ non P » ; la réciproque $Q \Rightarrow P$ peut être fausse.
- « Il faut » = condition nécessaire ; « il suffit » = condition suffisante.
- La négation de « pour tout… » est « il existe… tel que non… », jamais « aucun… ».
- La négation de $x > 0$ est $x \leqslant 0$; celle de « A et B » est « non A ou non B ».
- Des exemples ne démontrent pas un « pour tout » ; un seul contre-exemple suffit à le réfuter.
- On n'écrit $\iff$ que si chaque étape se lit dans les deux sens : élever au carré n'en est pas une.

Exercice 1 – Vrai ou faux ? ★

Dis si la proposition est vraie ou fausse. Justifie : une preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) Pour tout réel x, si $x^2 = 64$, alors $x = 8$.

b) Si le discriminant d'un trinôme du second degré est strictement négatif, le trinôme n'a pas de racine réelle.

c) Pour tout réel x, si $x > 2$, alors $x^2 - 3x + 2 > 0$.

d) Si une suite (u_n) est croissante, alors tous ses termes sont positifs.

e) Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum en a.

f) Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

g) Une suite géométrique de raison 2 est croissante.

h) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant x$.

Exercice 2 – Réciproque et contraposée ★

Écris la réciproque et la contraposée de chaque implication (vraie), puis dis si la réciproque est vraie.

a) Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

b) Si n est un multiple de 6, alors n est pair.

c) Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

d) Pour tout réel x, si $x > 3$, alors $2x - 1 > 5$.

e) Si (u_n) est arithmétique de raison 3, alors $u_{n+1} - u_n = 3$ pour tout n.

f) Si $\Delta > 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes.

g) Pour tout réel x, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

h) Si un entier se termine par 5, alors c'est un multiple de 5.

Exercice 3 – Nier une proposition ★

Écris la négation de chaque proposition.

a) Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$.

b) Il existe un entier n tel que $n^2 = 50$.

c) Tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10.

d) $x > 2$ et $x < 5$.

e) Il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$.

f) Pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

g) Pour tout réel x, il existe un entier n tel que $n > x$.

h) Aucun élève de la classe n'a eu 20.

Exercice 4 – Il faut, il suffit ★★

Complète par « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit », et justifie.

a) Pour que $x^2 = 16$, … que $x = 4$.

b) Pour qu'un entier soit un multiple de 10, … qu'il soit pair.

c) Pour que $(x - 3)(x + 2) = 0$, … que $x = 3$ ou $x = -2$.

d) Pour que le trinôme $x^2 + mx + 4$ ait deux racines distinctes, … que $m > 4$.

e) Pour qu'une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q soit strictement croissante, … que $q > 1$.

Exercice 5 – Quantificateurs : vrai ou faux ? ★★

Dis si chaque proposition est vraie ou fausse, et justifie.

a) Il existe un réel x tel que $x^2 + 4x + 5 = 0$.

b) Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 9 > 0$.

c) Il existe un entier naturel n tel que $3n - 7 = 50$.

d) Pour tout réel x, il existe un réel y tel que $xy = 1$.

e) Il existe un réel y tel que, pour tout réel x, $x + y = x$.

Exercice 6 – Lettres et égalités ★★

Réponds à chaque question en précisant le statut des lettres quand c'est utile.

a) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$: identité ou équation ?

b) $(x - 2)^2 = x^2 - 4$: identité ou équation ? Résous-la si c'est une équation.

c) Dans « la fonction f définie par $f(x) = mx^2 + 3$ », quel est le rôle de x ? de m ?

d) Résous l'équation d'inconnue x : $(m - 2)x = m + 1$, selon les valeurs du paramètre m.

e) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $x^2 + mx + 1 = 0$ a-t-elle une seule solution ?

Exercice 7 – Raisonner par contraposée ★★★

n désigne un entier.

1. Écris la contraposée de l'implication « si $n^2 + 4n$ est impair, alors n est impair ».
2. Démontre cette contraposée. Que peut-on conclure ?
3. Démontre par contraposée : si $3n + 1$ est pair, alors n est impair.

Exercice 8 – Raisonner par l'absurde ★★★

On commence chaque démonstration par « Supposons le contraire ».

1. Montre qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $6a + 10b = 3$.
2. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montre que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Montre que l'équation $x^2 = 4x - 5$ n'a aucune solution réelle.

Exercice 9 – Raisonner par disjonction des cas ★★★

On sépare les cas qui couvrent toutes les possibilités, puis on conclut dans chacun.

1. Montre que, pour tout entier n, $n^2 + 3n + 4$ est pair.
2. Montre que, pour tout entier n, le reste de la division de n^2 par 4 est 0 ou 1.
3. Montre que, pour tout réel x, $|x - 2| + x \geqslant 2$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) « La contraposée de "si $x > 6$, alors $x^2 > 36$" est "si $x^2 > 36$, alors $x > 6$". »

b) « La négation de "tous les triangles isocèles sont équilatéraux" est "aucun triangle isocèle n'est équilatéral". »

c) « $u_n = n^2 - n + 11$: $u_0 = 11$, $u_1 = 11$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 23$ sont premiers, donc tous les termes sont premiers. »

d) « $x^2 = 9 \iff x = 3$. »

e) « La négation de $x > 0$ est $x < 0$. »

f) « Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il suffit que ses diagonales soient perpendiculaires. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. La contraposée de « si n est un multiple de 4, alors n est pair » est :

   A si n est pair, alors n est un multiple de 4 **B** si n n'est pas un multiple de 4, alors n est impair

   C si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 4 **D** si n est impair, alors n est un multiple de 4

2. La négation de « pour tout réel x, $f(x) \leqslant 3$ » est :

   A il existe un réel x tel que $f(x) > 3$ **B** pour tout réel x, $f(x) > 3$

   C il existe un réel x tel que $f(x) \geqslant 3$ **D** aucun réel x ne vérifie $f(x) \leqslant 3$

3. « $x = -10$ » est, pour « $x^2 = 100$ », une condition :

   A nécessaire, non suffisante **B** nécessaire et suffisante **C** ni nécessaire, ni suffisante

   D suffisante, non nécessaire

4. Pour démontrer qu'il n'existe pas de plus grand entier pair, on pense d'abord à :

   A un contre-exemple **B** un raisonnement par l'absurde **C** une disjonction des cas

   D un calcul à la calculatrice

5. Un contre-exemple à « pour tout réel x non nul, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ » est :

   A $x = 1$ **B** $x = 0{,}5$ **C** $x = 3$ **D** $x = -1$

6. La négation de « $x \geqslant 1$ et $y < 2$ » est :

   A $x < 1$ ou $y \geqslant 2$ **B** $x < 1$ et $y \geqslant 2$ **C** $x \leqslant 1$ ou $y > 2$ **D** $x < 1$ ou $y > 2$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).