Corrigé – Logique et raisonnement

Mathématiques – Première spécialité

Logique et raisonnement · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Vrai ou faux ? ★

Dis si la proposition est vraie ou fausse. Justifie : une preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) **Faux.** Contre-exemple : $x = -8$; $(-8)^2 = 64$, mais $-8 \neq 8$.

b) **Vrai.** C'est une propriété du cours : si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

c) **Vrai.** $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
Si $x > 2$, alors $x - 2 > 0$ et $x - 1 > 1 > 0$: le produit de deux nombres strictement positifs est strictement positif.

d) **Faux.** Contre-exemple : $u_n = n - 10$ est croissante ($u_{n+1} - u_n = 1 > 0$), mais $u_0 = -10 < 0$.

e) **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x^3$ et $a = 0$.
$f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$.
Mais $f'(x) \geqslant 0$ partout : f est croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum en 0 ($f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$).

f) **Faux.** Contre-exemple : on lance un dé équilibré ; A : « pair » $= \{2\,;4\,;6\}$, B : « au moins 4 » $= \{4\,;5\,;6\}$.
$P(A) + P(B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, mais $A \cup B = \{2\,;4\,;5\,;6\}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.
L'égalité n'est vraie que si A et B sont incompatibles.

g) **Faux.** Contre-exemple : $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 2u_n$: $u_0 = -3$, $u_1 = -6$, $u_2 = -12$; la suite est décroissante.
Le sens de variation dépend aussi du signe de u_0.

h) **Faux.** Contre-exemple : $x = 0{,}5$; $0{,}5^2 = 0{,}25$ et $0{,}25 < 0{,}5$.

Exercice 2 – Réciproque et contraposée ★

Écris la réciproque et la contraposée de chaque implication (vraie), puis dis si la réciproque est vraie.

a) Réciproque : si $x^2 = 4$, alors $x = 2$.
Fausse : $x = -2$ donne $x^2 = 4$.
Contraposée : si $x^2 \neq 4$, alors $x \neq 2$.
Vraie, comme l'implication.

b) Réciproque : si n est pair, alors n est un multiple de 6.
Fausse : 4 est pair, mais pas multiple de 6.
Contraposée : si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 6.
Vraie, comme l'implication.

c) Réciproque : si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A.
Vraie : c'est la réciproque du théorème de Pythagore.
Contraposée : si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.
Vraie, comme l'implication.
Les deux propositions sont équivalentes.

d) Réciproque : si $2x - 1 > 5$, alors $x > 3$.
Vraie : $2x - 1 > 5 \iff 2x > 6 \iff x > 3$.
Contraposée : si $2x - 1 \leqslant 5$, alors $x \leqslant 3$.
Vraie, comme l'implication.
« $x > 3$ » et « $2x - 1 > 5$ » sont équivalentes.

e) Réciproque : si $u_{n+1} - u_n = 3$ pour tout n, alors (u_n) est arithmétique de raison 3.
Vraie : $u_{n+1} = u_n + 3$, c'est la définition.
Contraposée : s'il existe un n tel que $u_{n+1} - u_n \neq 3$, alors (u_n) n'est pas arithmétique de raison 3.
Vraie, comme l'implication.

f) Réciproque : si le trinôme a deux racines distinctes, alors $\Delta > 0$.
Vraie : si $\Delta = 0$, il y a une seule racine, et si $\Delta < 0$, aucune.
Contraposée : si le trinôme n'a pas deux racines distinctes, alors $\Delta \leqslant 0$.
Vraie, comme l'implication.

g) Réciproque : si $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, alors $1 \leqslant x \leqslant 2$.
Fausse : pour $x = -1{,}5$, $x^2 = 2{,}25$ est entre 1 et 4, mais x n'est pas entre 1 et 2.
Contraposée : si $x^2 < 1$ ou $x^2 > 4$, alors $x < 1$ ou $x > 2$.
Vraie, comme l'implication.

h) Réciproque : si un entier est un multiple de 5, alors il se termine par 5.
Fausse : 10 est un multiple de 5 et se termine par 0.
Contraposée : si un entier n'est pas un multiple de 5, alors il ne se termine pas par 5.
Vraie, comme l'implication.

Exercice 3 – Nier une proposition ★

Écris la négation de chaque proposition.

a) Il existe un réel x tel que $x^2 + 1 \leqslant 0$.
(La proposition est vraie, donc sa négation est fausse.)

b) Pour tout entier n, $n^2 \neq 50$.
(C'est la négation qui est vraie : $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$.)

c) Il existe un entier n tel que $u_n \geqslant 10$.
Pas « aucun terme n'est inférieur à 10 ».

d) $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 5$: « et » devient « ou », chaque inégalité est niée.

e) Pour tout réel a, $f'(a) \neq 0$.

f) Il existe un entier n tel que $u_{n+1} < u_n$.
(La suite n'est pas croissante : un seul rang suffit.)

g) Il existe un réel x tel que, pour tout entier n, $n \leqslant x$.
Chaque quantificateur est changé (« pour tout » devient « il existe », et inversement), dans le même ordre, et $n > x$ devient $n \leqslant x$.

h) « Aucun élève n'a eu 20 » veut dire « pour tout élève, sa note est différente de 20 ».
Négation : il existe un élève de la classe qui a eu 20.

Exercice 4 – Il faut, il suffit ★★

Complète par « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit », et justifie.

a) **Il suffit.** Si $x = 4$, alors $x^2 = 16$.
Mais ce n'est pas nécessaire : $x = -4$ convient aussi.

b) **Il faut.** Un multiple de 10 s'écrit $10k = 2 \times 5k$: il est pair.
Mais ce n'est pas suffisant : 4 est pair sans être multiple de 10.

c) **Il faut et il suffit.** Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

d) $\Delta = m^2 - 16$; deux racines distinctes $\iff m^2 > 16 \iff m < -4$ ou $m > 4$.
Il suffit : $m > 4$ donne bien $\Delta > 0$.
Ce n'est pas nécessaire : $m = -5$ donne $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$.

e) **Il faut et il suffit.** Si $q > 1$, chaque terme est multiplié par un nombre plus grand que 1 : la suite est strictement croissante.
Si $q \leqslant 1$, elle ne l'est pas : constante pour $q = 1$, décroissante pour $0 \leqslant q < 1$, de signe alterné pour $q < 0$.

Exercice 5 – Quantificateurs : vrai ou faux ? ★★

Dis si chaque proposition est vraie ou fausse, et justifie.

a) **Faux.** $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$: l'équation n'a aucune solution réelle.
La propriété échoue pour tous les réels.

b) **Faux.** $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, qui s'annule en 3.
Contre-exemple : $x = 3$ donne $9 - 18 + 9 = 0$, et $0 > 0$ est faux.

c) **Vrai.** $3n - 7 = 50 \iff 3n = 57 \iff n = 19$, et 19 est un entier naturel : un exemple suffit.

d) **Faux.** Contre-exemple : $x = 0$; pour tout réel y, $0 \times y = 0 \neq 1$.

e) **Vrai.** $y = 0$ convient : pour tout réel x, $x + 0 = x$.
Le même y marche pour tous les x.

Exercice 6 – Lettres et égalités ★★

Réponds à chaque question en précisant le statut des lettres quand c'est utile.

a) **Identité** : elle est vraie pour tout réel x.
On la démontre en développant :
$(2x + 3)^2$
$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
$= 4x^2 + 12x + 9$

b) **Ce n'est pas une identité** : pour $x = 1$, $(1 - 2)^2 = 1$ alors que $1^2 - 4 = -3$.
C'est une équation :$(x - 2)^2 = x^2 - 4$
$\iff x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4$ *(on développe)*
$\iff -4x = -8$ *(on retranche x^2 et 4)*
$\iff x = 2$ *(on divise par -4)*
$S = \{2\}$

c) x est une **variable** : elle parcourt $\mathbb{R}$ pour définir la fonction.
m est un **paramètre** : un nombre fixé, dont dépend toute une famille de fonctions.

d) Si $m \neq 2$: $m - 2 \neq 0$, on peut diviser, une seule solution $x = \dfrac{m+1}{m-2}$.
Si $m = 2$: l'équation devient $0 \times x = 3$, soit $0 = 3$: aucune solution.
Le cas où le coefficient s'annule se traite à part.

e) Une seule solution $\iff \Delta = 0$, avec $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 1 = m^2 - 4$.
$m^2 - 4 = 0 \iff m^2 = 4 \iff m = -2$ ou $m = 2$.

Exercice 7 – Raisonner par contraposée ★★★

1. Contraposée (non $Q \Rightarrow$ non P) : « si n est pair, alors $n^2 + 4n$ est pair ».

2. Soit n pair : $n = 2k$ avec k entier.
   $n^2 + 4n = 4k^2 + 8k = 2(2k^2 + 4k)$, où $2k^2 + 4k$ est un entier : $n^2 + 4n$ est pair.
   La contraposée est vraie, donc l'implication « si $n^2 + 4n$ est impair, alors n est impair » est vraie aussi.

3. On démontre la contraposée : « si n est pair, alors $3n + 1$ est impair ».
   Soit $n = 2k$ avec k entier : $3n + 1 = 6k + 1 = 2 \times 3k + 1$, avec $3k$ entier.
   $3n + 1$ est impair : la contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi.

Exercice 8 – Raisonner par l'absurde ★★★

1. Supposons qu'il existe deux entiers a et b tels que $6a + 10b = 3$.
   Alors $3 = 2(3a + 5b)$, avec $3a + 5b$ entier : 3 serait pair.
   C'est impossible : il n'existe pas de tels entiers.

2. Supposons $1 + \sqrt{2}$ rationnel : $1 + \sqrt{2} = r$ avec r rationnel.
   Alors $\sqrt{2} = r - 1$; la différence de deux rationnels est un rationnel, donc $\sqrt{2}$ serait rationnel.
   C'est contraire à ce qu'on a admis : $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

3. Supposons qu'un réel a vérifie $a^2 = 4a - 5$.
   Alors $a^2 - 4a + 5 = 0$, soit $(a-2)^2 + 1 = 0$ (car $(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$), donc $(a-2)^2 = -1$.
   Un carré est positif ou nul : c'est impossible.
   L'équation n'a aucune solution réelle.

Exercice 9 – Raisonner par disjonction des cas ★★★

1. On écrit $n^2 + 3n + 4 = n(n+3) + 4$.
   Si n est pair, le facteur n est pair, donc $n(n+3)$ aussi.
   Si n est impair, $n + 3$ est pair (impair + impair), donc $n(n+3)$ aussi.
   Dans les deux cas, $n(n+3)$ est pair, et en ajoutant 4 (pair), $n^2 + 3n + 4$ est pair.

2. Si n est pair, $n = 2k$: $n^2 = 4k^2$, reste 0.
   Si n est impair, $n = 2k + 1$: $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, reste 1.
   Dans tous les cas, le reste est 0 ou 1.

3. Si $x \geqslant 2$: $|x-2| = x-2$, donc $|x-2| + x = 2x - 2$; or $x \geqslant 2$ donne $2x - 2 \geqslant 2$.
   Si $x < 2$: $|x-2| = 2 - x$, donc $|x-2| + x = 2$, et $2 \geqslant 2$.
   Dans les deux cas, $|x-2| + x \geqslant 2$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur : explique-la, puis corrige.

a) *C'est la réciproque, pas la contraposée (et elle est fausse : $x = -7$).*
Contraposée : « si $x^2 \leqslant 36$, alors $x \leqslant 6$ ».

b) *La négation d'un « pour tout » est un « il existe ».*
Négation : il existe un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral.

c) *Des exemples ne démontrent pas un « pour tout ».*
Contre-exemple : $u_{11} = 121 - 11 + 11 = 121 = 11 \times 11$, qui n'est pas premier.

d) *Il manque une solution : $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ est vraie, mais $x^2 = 9$ n'entraîne pas $x = 3$.*
$x^2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$.

e) *Le cas $x = 0$ est oublié.*
La négation de $x > 0$ est $x \leqslant 0$.

f) *Ce n'est pas suffisant : un losange qui n'est pas un carré a aussi des diagonales perpendiculaires.*
C'est une condition nécessaire : pour qu'un quadrilatère soit un carré, il **faut** que ses diagonales soient perpendiculaires.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. La contraposée de « si n est un multiple de 4, alors n est pair » est :

Réponse C : si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 4
Non $Q \Rightarrow$ non P : on nie les deux et on les échange.

2. La négation de « pour tout réel x, $f(x) \leqslant 3$ » est :

Réponse A : il existe un réel x tel que $f(x) > 3$
« Pour tout » devient « il existe », et $\leqslant$ devient $>$.

3. « $x = -10$ » est, pour « $x^2 = 100$ », une condition :

Réponse D : suffisante, non nécessaire
$x = -10 \Rightarrow x^2 = 100$, mais $x = 10$ convient aussi.

4. Pour démontrer qu'il n'existe pas de plus grand entier pair, on pense d'abord à :

Réponse B : un raisonnement par l'absurde
Conclusion négative (« il n'existe pas ») : on suppose qu'il en existe un, N ; or $N + 2$ est pair et plus grand : contradiction.

5. Un contre-exemple à « pour tout réel x non nul, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ » est :

Réponse D : $x = -1$

$-1 + \dfrac{1}{-1} = -2$, et $-2 \geqslant 2$ est faux.

Pour $x = 1$: $1 + 1 = 2$ et $2 \geqslant 2$ est vrai, ce n'est pas un contre-exemple.

6. La négation de « $x \geqslant 1$ et $y < 2$ » est :

Réponse A : $x < 1$ ou $y \geqslant 2$

« Et » devient « ou », et chaque inégalité est niée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).