49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *ln, réciproque de exp : passer de ln à exp*

À retenir : $\ln a = b \iff a = \mathrm{e}^b$ $(a > 0)$; $\mathrm{e}^x = k \iff x = \ln k$ seulement si $k > 0$. $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$, $\mathrm{e}^{\ln 7} = 7$. $\ln 0$ et $\ln(-2)$ n'existent pas : $\mathrm{e}^x = -2$ donne $S = \varnothing$.

Ex. 1 ★☆☆ **Simplifier avec ln et exp** — Simplifie chaque expression.

(a) $\mathrm{e}^{\ln 7}$ (b) $\ln(\mathrm{e}^{-3})$

(c) $\mathrm{e}^{2\ln 3}$ (d) $3\ln \mathrm{e} - 5\ln 1$

(e) $\ln(\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-6})$ (f) $\mathrm{e}^{\ln x + 1}$, pour $x > 0$

Ex. 2 ★☆☆ **Résoudre en passant de ln à exp** — Résous chaque équation dans $\mathbb{R}$. Donne les solutions exactes.

(a) $\mathrm{e}^x = 12$ (b) $\mathrm{e}^x = -2$ (c) $\ln x = 3$

(d) $2\ln x + 5 = 1$ (e) $\mathrm{e}^{3x-1} = 5$ (f) $\ln(2x - 6) = 0$

Ex. 3 ★☆☆ **Vrai ou faux sur ln** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) $\ln \mathrm{e} = 0$ et $\ln 1 = 1$.

(b) $\ln(-2)$ est un nombre négatif.

(c) $\ln(0{,}4) < 0$.

(d) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

(e) L'équation $\mathrm{e}^x = k$ a une solution quel que soit le réel k.

(f) $\ln(9 - 3x)$ est défini pour $x = 3$.

(g) $\mathrm{e}^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}$.

Ex. 4 ★★☆ **La copie de Noé** — Noé a résolu quatre équations dans $\mathbb{R}$. Chaque ligne contient une erreur. Pour chacune, explique l'erreur puis donne l'ensemble S des solutions.

(a) Noé écrit : « $\mathrm{e}^{x+1} = 4 \iff x + 1 = \mathrm{e}^4 \iff x = \mathrm{e}^4 - 1$ ».

(b) Noé écrit : « $\ln(x - 2) = 1 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$ ».

(c) Noé écrit : « $\ln x + 1 = 3 \iff \ln(x + 1) = 3 \iff x = \mathrm{e}^3 - 1$ ».

(d) Noé écrit : « $\ln(3x) = -1$ n'a pas de solution, car un logarithme est toujours positif ».

Ex. 5 ★★★ **Équations à paramètre** — Soit m un réel. On note (E_m) l'équation $\mathrm{e}^{2x-1} = m$ et (F_m) l'équation $\ln(4x - 2) = m$, d'inconnue réelle x. Donne des valeurs exactes.

(a) Selon les valeurs de m, donne le nombre de solutions de (E_m). Donne la solution quand elle existe.

(b) Détermine la valeur de m pour laquelle (E_m) a pour solution $x = 0$.

(c) Détermine l'ensemble des réels m pour lesquels (E_m) a une solution strictement négative. Justifie.

(d) Montre que pour tout réel m, (F_m) a une unique solution, que tu exprimeras en fonction de m. Pour quels m cette solution est-elle strictement inférieure à 1 ?

(e) Pour tout réel m, résous $\ln x + 1 = m$ puis $\ln(x + 1) = m$. Existe-t-il un réel m pour lequel ces deux équations ont la même solution ? Si oui, lequel ?

Ex. 6 ★★★ **Deux courbes symétriques** — Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe de la fonction ln et Γ celle de la fonction exp. Ces deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(a) Le point A de Γ a pour ordonnée 8. Donne son abscisse exacte, puis justifie qu'elle est égale à $3\ln 2$.

(b) Donne les coordonnées du point B, symétrique de A par rapport à la droite $y = x$. Justifie que B appartient à $\mathcal{C}$.

(c) Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -4 ? Un point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée -4 ? Justifie chaque réponse.

(d) Détermine l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de l'axe des abscisses. Justifie en passant par exp.

(e) La droite d'équation $y = \frac{1}{3}$ coupe $\mathcal{C}$ en P et Γ en Q. Calcule la distance PQ, valeur exacte puis arrondi au centième.

Ex. 7 ★★★ **Le café de Malik** — Malik se sert un café. Sa température, en °C, t minutes après le service, est $T(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Calcule $T(0)$. Détermine ensuite le temps exact au bout duquel le café est à 50 °C, puis arrondis à la seconde près.

(b) Malik attend que son café soit à 40 °C au plus. Résous $T(t) \leqslant 40$ et interprète le résultat.

(c) La température du café peut-elle descendre à 20 °C ? Et à 15 °C ? Justifie avec des équations.

Ex. 7 **(suite)**

(d) Le café de Ben suit le modèle $T_2(t) = 20 + 70\,\mathrm{e}^{-kt}$, avec $k > 0$. Il est à 55 °C après 5 minutes. Détermine k, valeur exacte puis arrondie au millième.

2. *Propriétés algébriques : simplifier, développer*

À retenir : Pour $a, b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$. Pour développer, décompose en facteurs premiers : $\ln 12 = 2 \ln 2 + \ln 3$. Pour simplifier, regroupe en un seul ln. Piège : $\ln(a + b)$ ne se décompose pas, et $(\ln a)^2 \neq \ln(a^2)$.

Ex. 8 ★☆☆ **Tout en fonction de ln 2 et ln 5** — Exprime chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

(a) $\ln 40$ (b) $\ln 0{,}016$ (c) $\ln \frac{1}{50}$

(d) $\ln \sqrt{20}$ (e) $\ln 6{,}25$ (f) $\ln\left(8\sqrt{5}\right)$

Ex. 9 ★☆☆ **Regrouper, simplifier** — Simplifie chaque expression : écris-la sous la forme d'un nombre, d'un seul ln ou d'une expression de x sans ln ni exponentielle (x désigne un réel).

(a) $A = \ln 15 + \ln 6 - \ln 10$ (b) $B = 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 16$

(c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^2\right)$ (d) $D = \mathrm{e}^{2 \ln 3}$

(e) $E = \mathrm{e}^{-\ln 4}$ (f) $F = \ln \frac{1}{\mathrm{e}^3}$

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les formules** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par une démonstration ou par un contre-exemple.

(a) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

(b) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a^2 b) - 2 \ln a = \ln b$.

(c) Pour tout réel $a > 0$: $\ln(2a) = 2 \ln a$.

(d) Pour tout réel $a > 0$: $(\ln a)^2 = \ln(a^2)$.

(e) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Ex. 11 ★★☆ **Les erreurs de Yanis** — Yanis s'entraîne à simplifier des expressions avec ln, mais il fait des erreurs. Aide-le à les corriger.

(a) Pour $x > 1$, Yanis écrit : $\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = \ln(x^2) - \ln 1 - \ln x + \ln 1 = \ln x$. Trouve son erreur, puis simplifie correctement.

(b) Pour $x > 1$, Yanis écrit : $\ln \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\ln(x^2)}$. Calcule les deux membres pour $x = \mathrm{e}$, conclus, puis écris $\ln \frac{1}{x^2}$ en fonction de $\ln x$.

(c) Pour $x > 0$, Yanis écrit : $\ln\left(x\sqrt{x}\right) = \ln x \times \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. A-t-il raison ? Justifie et corrige.

(d) Simplifie correctement, pour $x > 0$: $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - \ln\left(x\,\mathrm{e}^x\right)$.

Ex. 12 ★★★ **Une somme qui se télescope** — Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $U_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(a) Léa écrit : $\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \ln 1 - \ln \frac{1}{4} = \ln 4$. A-t-elle raison ? Justifie, puis exprime $\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

(b) Montre que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k - 1) + \ln(k + 1) - 2 \ln k$.

(c) Calcule U_3 et U_4, en écrivant chacun sous la forme d'un seul ln.

(d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, écris U_n sous la forme d'un seul ln. Justifie.

(e) Exprime U_{99} en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ et $\ln 11$, puis détermine la limite de la suite (U_n).

Ex. 13 ★★★ **ln(x²) ou 2 ln x ?** — On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x^2)$ et $g(x) = 2 \ln x$.

(a) Détermine l'ensemble de définition de f, puis celui de g.

(b) Noé affirme : « f et g sont la même fonction, car $\ln(a^2) = 2 \ln a$. » A-t-il raison ? Justifie, puis écris $f(x)$ sans carré pour $x < 0$.

(c) Résous l'équation $f(x) = 4$, puis l'équation $g(x) = 4$. Compare les ensembles de solutions.

(d) Résous dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$.

(e) Pour $x \neq 0$, on pose $h(x) = f(\mathrm{e}^x) + \ln \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x+2}} + \mathrm{e}^{f(x)}$. Écris $h(x)$ sans ln ni exponentielle, puis résous $h(x) = 0$.

Ex. 14 ★★★ **Quotients de logarithmes** — Chloé écrit : $\frac{\ln 8}{\ln 2} = \ln \frac{8}{2} = \ln 4$.

(a) Chloé a-t-elle raison ? Justifie en calculant la valeur exacte de $\frac{\ln 8}{\ln 2}$, puis une valeur approchée de $\ln 4$ à 10^{-3} près.

(b) Calcule la valeur exacte de $\frac{\ln \frac{1}{125}}{\ln 25}$, puis celle de $\frac{\ln \sqrt{27}}{\ln 9}$.

(c) Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$, et n, p deux entiers relatifs, $p \neq 0$. Simplifie $\frac{\ln(a^n)}{\ln(a^p)}$. Pourquoi faut-il $a \neq 1$?

(d) On suppose que $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls. Montre que $3^q = 2^p$, puis aboutis à une contradiction.

(e) Montre que $\frac{\ln 6}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Ce nombre peut-il s'écrire comme une fraction d'entiers ? Justifie.

3. *Équations et inéquations avec ln et exp*

À retenir : Domaine d'abord, un seul ln de chaque côté, puis $\ln a = \ln b \iff a = b$; trie les solutions. $\ln x < 2 \iff 0 < x < \mathrm{e}^2$. Avec $X = \mathrm{e}^x$, rejette $X \leqslant 0$. Si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$: le sens change.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : résoudre en une ligne** — Résous dans $\mathbb{R}$. Commence par le domaine dès qu'il y a un ln. Donne les valeurs exactes.

(a) $\ln x = 3$

(b) $\mathrm{e}^{x} > 7$

(c) $\ln x \leqslant -1$

(d) $\ln(2x-1) = \ln(x+4)$

(e) $\mathrm{e}^{3x+1} = 2$
(donne aussi un arrondi à 0,001)

(f) $\mathrm{e}^{x} = -4$

(g) $\ln(x+2) \geqslant 0$

Ex. 16 ★☆☆ **Vrai, faux ou erreur ?** — Pour une affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie (contre-exemple si elle est fausse). Pour un calcul d'élève, repère l'erreur et corrige.

(a) Affirmation : « L'équation $\ln x = -2$ n'a pas de solution, car un logarithme est toujours positif. »

(b) Inès résout $\ln x + \ln 2 = \ln 10$: « $x + 2 = 10$, donc $x = 8$. »

(c) Affirmation : « $\mathrm{e}^{2x} = 9 \iff x = \ln 3$. »

(d) Malo résout $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 4$: « $-x \geqslant \ln 4$, donc $x \geqslant -\ln 4$. »

(e) Affirmation : « L'inéquation $\ln x > \ln(5-x)$ a pour ensemble de solutions $\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$. »

Ex. 17 ★★☆ **Équations et inéquations en deux temps** — Résous dans $\mathbb{R}$. Commence par l'ensemble de définition ou par les conditions sur l'inconnue auxiliaire.

(a) Résous $\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln 12$.

(b) Résous $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 48 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

(c) Résous $(\ln x)^2 + 4\ln x - 5 = 0$ à l'aide d'un changement de variable.

(d) Étudie le signe de $\ln x$ et de $2 - x$ sur $]0\,;+\infty[$, puis résous $(2-x)\ln x \geqslant 0$.

Ex. 18 ★★☆ **Élimination d'un médicament** — Juste après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang est de 40 mg/L. Elle baisse ensuite de 12 % par heure. On note c_n la concentration (en mg/L) au bout de n heures, avec $c_0 = 40$.

(a) Exprime c_n en fonction de n.

(b) Détermine par le calcul le plus petit entier n tel que $c_n < 5$. Justifie le sens de chaque inégalité.

(c) Complète ce programme pour qu'il affiche l'entier de la question précédente.

```
c = 40
n = 0
while ...:
    c = ...
    n = n + 1
print(n)
```

Ex. 18 (suite)

(d) Lina affirme : « La concentration est divisée par deux en 4 heures, car $4 \times 12\,\% \approx 50\,\%$. » A-t-elle raison ? Justifie par le calcul.

Ex. 19 ★★★ **Domaine d'abord : équations et inéquations à pièges** — Résous dans $\mathbb{R}$ en rédigeant chaque étape. Donne les valeurs exactes, puis un arrondi à 0,01 près si besoin.

(a) Résous $\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2$.

(b) Kenza affirme : « L'équation $\ln(x^2 - 3x) = 2\ln 2$ a les mêmes solutions que celle de la question précédente. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Résous $\ln x + \ln(x+2) \leqslant \ln(3x+6)$.

(d) Résous $(\mathrm{e}^{x} - 5)\ln x \leqslant 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

Ex. 20 ★★★ **Changements de variable : $X = \mathrm{e}^{x}$ ou $X = \ln x$** — Résous dans $\mathbb{R}$ en posant une inconnue auxiliaire X. Précise à chaque fois les valeurs que X peut prendre. Donne les valeurs exactes, puis arrondies à 0,01 près.

(a) Résous $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 \geqslant 0$.

(b) Résous $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$. Pourquoi garde-t-on ici une valeur négative de X, contrairement à la question précédente ?

(c) Résous $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 > 0$.

(d) Résous $2\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x} \leqslant 7$. Commence par multiplier les deux membres par e^{x} et justifie que c'est permis.

Ex. 21 ★★★ **Arnac et Belvès : deux populations** — En 2025, la ville d'Arnac compte 50 000 habitants et perd 2 % de sa population chaque année. La ville de Belvès compte 30 000 habitants et en gagne 3 % par an. On note a_n et b_n les populations respectives en l'année $2025 + n$.

(a) Exprime a_n et b_n en fonction de n.

(b) Détermine par le calcul l'année à partir de laquelle Arnac compte moins de 40 000 habitants.

(c) Détermine par le calcul l'année à partir de laquelle Belvès devient plus peuplée qu'Arnac. Donne d'abord la borne exacte, puis une valeur arrondie.

(d) Complète ce programme pour qu'il affiche l'année trouvée à la question précédente.

```
n = 0
a = 50000
b = 30000
while ........ :
    n = n + 1
    a = a * ....
    b = b * ....
print(2025 + n)
```

4. Seuils : $\ln(q^n) = n \ln q$

À retenir : $\ln(q^n) = n \ln q$. Pour isoler n, on divise par $\ln q$: si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et le sens change ($0{,}5^n \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \approx 3{,}3$, donc $n \geqslant 4$). On arrondit à l'entier supérieur, puis on contrôle avec deux termes.

Ex. 22 ★☆☆ **Seuils en ligne** — Les inconnues n sont des entiers naturels. Donne les quotients arrondis à 0,01.

(a) Écris $\ln(0{,}125^n)$ en fonction de n et de $\ln 2$.

(b) Résous $0{,}4^n \leqslant 0{,}005$.

(c) Détermine tous les entiers n tels que $0{,}95^n > 0{,}6$.

(d) Soit $u(n) = 5 \times 1{,}2^n$. Détermine le plus petit entier n tel que $u(n) \geqslant 100$.

(e) On admet que $\frac{\ln 3}{\ln 1{,}05} \approx 22{,}52$. Contrôle à la calculatrice que 23 est le plus petit entier n tel que $1{,}05^n > 3$.

Ex. 23 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les seuils** — Les inconnues n sont des entiers naturels. Justifie chaque réponse par un calcul ou un contre-exemple.

(a) Vrai ou faux ? Pour tout entier n, $\ln(3^n) = (\ln 3)^n$.

(b) Vrai ou faux ? $0{,}6^n \geqslant 0{,}002 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}6}$.

(c) Tom cherche le plus petit n tel que $1{,}3^n \geqslant 50$. Il trouve $\frac{\ln 50}{\ln 1{,}3} \approx 14{,}91$ et répond $n = 14$. A-t-il raison ?

(d) Vrai ou faux ? Pour $v(n) = 3 - 2 \times 0{,}8^n$, on a $v(n) \geqslant 2{,}9 \iff 0{,}8^n \geqslant 0{,}05$.

(e) Vrai ou faux ? Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(0{,}9^n) < 0$.

Ex. 24 ★★☆ **Un médicament éliminé** — Un patient reçoit 80 mg d'un médicament. Chaque heure, son organisme en élimine 15 %. On note $m(n)$ la quantité (en mg) qui reste après n heures, avec $m(0) = 80$.

(a) Exprime $m(n+1)$ en fonction de $m(n)$, puis $m(n)$ en fonction de n.

(b) Le médicament n'agit plus en dessous de 5 mg. Détermine par le calcul après combien d'heures entières on a $m(n) < 5$.

(c) Complète les deux lignes en pointillés pour que `seuil()` renvoie la réponse à la question précédente.

```
def seuil():
    n = 0
    m = 80
    while ...:
        m = ...
        n = n + 1
    return n
```

(d) Au bout de combien d'heures entières l'organisme a-t-il éliminé au moins 90 % de la dose initiale ?

Ex. 25 ★★☆ **Un placement à 2,5 %** — Inès place 2 000 € à intérêts composés, au taux annuel de 2,5 %. On note $C(n)$ le capital (en €) après n années, avec $C(0) = 2\,000$.

(a) Exprime $C(n)$ en fonction de n.

(b) Détermine par le calcul après combien d'années le capital atteint ou dépasse 3 000 €.

(c) Yanis écrit ce programme pour retrouver ce résultat, mais il renvoie 1. Explique pourquoi, puis corrige ses deux erreurs.

```
def annees():
    n = 1
    C = 2000
    while C > 3000:
        C = C * 1.025
        n = n + 1
    return n
```

(d) Quel taux annuel, en %, arrondi à 0,01, permettrait de doubler un capital en 20 ans exactement ?

Ex. 26 ★★★ **La demi-vie d'un isotope** — Un échantillon contient 12 milliards de noyaux radioactifs. Chaque jour, 6 % des noyaux présents se désintègrent. On note $N(n)$ le nombre de noyaux (en milliards) au bout de n jours, avec $N(0) = 12$. Les inconnues n sont des entiers naturels.

(a) Justifie que, pour tout entier n, $N(n) = 12 \times 0{,}94^n$.

(b) La demi-vie est ici le plus petit nombre de jours au bout duquel il reste au plus la moitié des noyaux. Détermine-la, en contrôlant avec deux termes.

(c) Noé affirme : « Au bout de 24 jours, il reste moins du quart des noyaux. » A-t-il raison ? Justifie sans calculatrice à partir de la question précédente.

(d) Détermine le nombre minimal de jours au bout desquels il reste au plus 1 % des noyaux de départ.

(e) Écris une fonction Python `jours(p)` qui renvoie le plus petit nombre de jours au bout duquel il reste au plus p % des noyaux de départ. Que renvoie `jours(1)` ?

Ex. 27 ★★★ **Une suite qui approche 5** — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 1{,}5$. On pose $v_n = u_n - 5$. Les inconnues n sont des entiers naturels.

(a) Montre que (v_n) est géométrique, puis que, pour tout entier n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}7^n$.

(b) Lina résout $u_n \geqslant 4{,}99$ et trouve $n \leqslant 16{,}80$. Corrige son raisonnement, puis donne le plus petit entier n qui convient, contrôlé par deux termes.

(c) Soit ε un réel de $]0\,;4[$. Résous $u_n \geqslant 5 - \varepsilon$, puis exprime le plus petit entier qui convient à l'aide de ε.

(d) Quand on divise ε par 10, de combien augmente la borne trouvée à la question précédente ? Vérifie-le en passant de $\varepsilon = 0{,}01$ à $\varepsilon = 0{,}001$.

Ex. 27 **(suite)**

(e) Complète ce programme pour que `rang(e)` renvoie le plus petit n tel que $u_n \geqslant 5 - e$, puis donne `rang(0.01)`.

```
def rang(e):
    n = 0
    u = 1
    while ...:
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Ex. 28 ★★★ **Deux villes qui se croisent** — Au 1er janvier 2025, la ville A compte 25 000 habitants et perd 2 % de sa population chaque année. La ville B compte 18 000 habitants et gagne 1,5 % par an. On note $A(n)$ et $B(n)$ leurs populations en 2025 + n. Les inconnues n sont des entiers naturels.

(a) Exprime $A(n)$ et $B(n)$ en fonction de n.

(b) En quelle année la population de A passera-t-elle pour la première fois sous 20 000 habitants ? Contrôle avec deux termes.

(c) Montre que $B(n) > A(n) \iff n > \dfrac{\ln(25/18)}{\ln(1{,}015/0{,}98)}$, puis déduis-en l'année où B dépasse A.

(d) Sans l'exécuter, explique le rôle de la condition `b <= a` et donne la valeur renvoyée par `annee()`.

```
def annee():
    n = 0
    a = 25000
    b = 18000
    while b <= a:
        a = 0.98 * a
        b = 1.015 * b
        n = n + 1
    return n
```

5. *Dérivée, variations, limites de ln et croissances comparées*

À retenir : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Croissances comparées : $\dfrac{\ln x}{x^n} \to 0$ en $+\infty$ et $x^n \ln x \to 0$ en 0^+. Pour lever une forme indéterminée, factorise par le terme dominant : $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$. Attention : $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$ en 0^+, ce n'est pas une forme indéterminée.

Ex. 29 ★☆☆ **Limites et croissances comparées** — Détermine chaque limite en justifiant.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x - 1}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \ln x - 3x + 1\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \ln x}{x + 3}$

(d) Yanis écrit : « En 0^+, $\dfrac{\ln x}{x^3}$ est une forme indéterminée, donc sa limite vaut 0 par croissance comparée. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

Ex. 29 **(suite)**

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$

Ex. 30 ★☆☆ **Dériver avec ln, tangente en 1** — Les fonctions sont définies sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Calcule $f'(x)$ pour $f(x) = 3\ln x - x^2$.

(b) Calcule $g'(x)$ pour $g(x) = x\ln x$.

(c) Lina écrit : « Si $k(x) = 5\ln x$, alors $k'(x) = \dfrac{5}{\ln x}$. » Repère son erreur et corrige-la.

(d) Calcule $h'(x)$ pour $h(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, puis simplifie.

(e) Donne une équation de la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1.

(f) Résous $\ln x \geqslant 12$. Donne aussi un arrondi à l'unité de la borne.

Ex. 31 ★★☆ **Variations et nombre de solutions** — Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 18\ln x$.

(a) Calcule $f'(x)$, puis étudie son signe sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Détermine $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(c) Détermine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en factorisant par le terme dominant.

(d) Dresse le tableau de variations de f. Donne la valeur exacte de son minimum, puis un arrondi à 10^{-3}.

(e) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur $]0\,;+\infty[$? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **La courbe de ln et sa tangente en e** — On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction ln dans un repère.

(a) Détermine une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.

(b) Pour $x > 0$, on note $d(x)$ l'ordonnée du point de T d'abscisse x moins $\ln x$. Exprime $d(x)$, calcule $d'(x)$, puis étudie son signe.

(c) Détermine les limites de d en 0^+ et en $+\infty$.

(d) Dresse le tableau de variations de d. Déduis-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

Ex. 33 ★★★ **Une étude complète avec fonction auxiliaire** — Soit g et f les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ et $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de f et D la droite d'équation $y = x - 1$.

(a) Étudie les variations de g, calcule $g(1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Détermine les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

(c) Montre que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, puis dresse le tableau de variations de f.

(d) Étudie la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

(e) Déduis des questions précédentes que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x^2 - x$.

Ex. 34 ★★★ **Le taux d'accroissement de ln en 1** — Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, et φ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$.

(a) Noé affirme : « $\ln(1+x)\to 0$ et $x\to 0$, donc $h(x)\to 0$ en 0. » A-t-il raison ? Justifie à l'aide d'un taux d'accroissement de ln en 1.

(b) En écrivant $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\times\frac{1+x}{x}$, détermine la limite de h en $+\infty$.

(c) Étudie les variations de φ sur $[0\,;+\infty[$, puis déduis-en le signe de $\varphi(x)$ pour $x>0$.

(d) Exprime $h'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$, puis déduis-en le sens de variation de h.

(e) Déduis-en que $\ln(1+x)<x$ pour tout $x>0$. Interprète ce résultat avec la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1.

Ex. 35 ★★★ **Redémontrer les croissances comparées** — Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x-2\ln x$. Dans cet exercice, tu retrouves des croissances comparées sans utiliser le cours.

(a) Sacha écrit $g'(x)=1-\frac{2}{\ln x}$. Corrige son erreur, étudie les variations de g, puis déduis-en que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

(b) Déduis-en que, pour tout $x>1$, $0<\frac{\ln x}{x^2}<\frac{1}{2x}$, puis la limite de $\frac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.

(c) En appliquant la question 1 à $\sqrt{x}$, encadre $\frac{\ln x}{x}$ pour $x>1$, puis retrouve sa limite en $+\infty$.

(d) « Comme $\ln x$ est négligeable devant x en $+\infty$, $\ln x - x$ tend vers 0. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) En posant $X=\frac{1}{x}$, déduis de la question 2 la limite de $x^2\ln x$ en 0^+.

6. *Fonctions ln(u)*

À retenir : $\ln u$ n'existe que si $u(x)>0$ (strictement, pas $\geqslant$). $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$: $\big(\ln(x^2+3)\big)'=\frac{2x}{x^2+3}$. Si $u>0$, $\ln u$ varie comme u. Limites : par composition.

Ex. 36 ★☆☆ **Dériver ln(u) sans oublier u′**

(a) Dérive $f(x)=\ln(4x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Dérive $g(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}+3)$ sur $\mathbb{R}$.

(c) On pose $k(x)=\ln(x^3+x)$ sur $]0\,;+\infty[$. Calcule $k'(2)$.

(d) Lina écrit : $\big(\ln(x^2+7)\big)'=\frac{1}{x^2+7}$. Repère son erreur et corrige.

(e) Noé affirme que la dérivée de $x\mapsto\ln(5x)$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{5}{x}$. A-t-il raison ? Justifie.

(f) Vrai ou faux : la fonction $x\mapsto\ln(1-4x)$ est croissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{4}[$. Justifie.

Ex. 37 ★☆☆ **Où ln(u) est-elle définie ?**

(a) Détermine l'ensemble de définition de $f(x)=\ln(2x-6)$.

(b) Détermine l'ensemble de définition de $g(x)=\ln(9-x^2)$.

(c) À l'aide d'un tableau de signes, détermine l'ensemble de définition de $h(x)=\ln\left(\frac{x+3}{5-x}\right)$.

(d) Maëlle affirme que $k(x)=\ln(x^2-6x+9)$ est définie sur $\mathbb{R}$, car $x^2-6x+9=(x-3)^2\geqslant 0$. A-t-elle raison ? Justifie.

(e) Détermine l'ensemble de définition de $m(x)=\ln(x^2+x+1)$.

(f) Vrai ou faux : pour tout $x>0$, $\ln(x^2+4)=(x^2+4)\times\ln x$. Justifie.

Ex. 38 ★☆☆ **Limites de ln(u) par composition** — Pour chaque limite, donne d'abord la limite de $u(x)$, puis conclus par composition.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)$.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

(c) Calcule $\lim\limits_{x\to 6^-}\ln(6-x)$.

(d) Vrai ou faux : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\mathrm{e}^x+5)=-\infty$, car $\mathrm{e}^x\to 0$. Justifie.

(e) Hugo écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)=+\infty$, car $2x+1\to+\infty$. Repère son erreur et corrige.

Ex. 39 ★★☆ **Étude de ln(4x − x²)** — On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln(4x-x^2)$.

(a) Détermine l'ensemble de définition D de f.

(b) Calcule $f'(x)$ et étudie son signe sur D.

(c) Détermine les limites de f aux bornes de D.

(d) Dresse le tableau de variations de f et donne son maximum en valeur exacte.

(e) Résous dans D l'équation $f(x)=\ln 3$.

Ex. 40 ★★★ **Étude de ln((x − 1)/(x + 2))** — On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.

(a) À l'aide d'un tableau de signes, détermine l'ensemble de définition D de f.

(b) Yanis affirme que $f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$ pour tout x de D. A-t-il raison ? Justifie.

(c) Calcule $f'(x)$ pour $x\in D$, puis déduis-en les variations de f sur chaque intervalle de D.

(d) Calcule les limites de f aux quatre bornes de D, puis donne les asymptotes à $\mathcal{C}$.

(e) Résous dans D l'équation $f(x)=2\ln 2$.

Ex. 41 ★★★ **$\ln(e^x+1)$ et la droite $y=x$** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(e^x+1)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe et Δ la droite d'équation $y=x$.

(a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$. Lucas affirme que $f'(x)=\frac{1}{e^x+1}$. A-t-il raison ? Justifie, puis étudie les variations de f.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

(c) Montre que, pour tout réel x, $f(x)=x+\ln(1+e^{-x})$.

(d) Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)$, puis la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

(e) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant x+\ln 2$.

Ex. 42 ★★★ **Une différence de logarithmes sous contrôle** — On considère la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x-2)-\ln(3x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Inès écrit : « $\ln(3x)=3\times\ln x$, donc $f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x}$ ». Corrige son erreur, puis écris $f'(x)$ sous forme d'un seul quotient.

(b) Étudie le signe de $f'(x)$ sur $]2\,;+\infty[$, puis déduis-en le sens de variation de f.

(c) Détermine $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

(d) Montre que, pour $x>2$, $f(x)=\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)-\ln 3$, puis déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(e) Justifie que $f(x)<-\ln 3$ pour tout $x>2$. Zoé affirme que l'équation $f(x)=-1$ a une solution. A-t-elle raison ? Justifie.

7. *Étudier une fonction avec ln : problèmes type bac*

À retenir : Étude avec ln : domaine, limites aux bornes ($\frac{\ln x}{x}\to 0$ en $+\infty$), $f'(x)$ en un seul quotient, puis signe du numérateur car $x>0$. Ex. : $(x\ln x)'=\ln x+1$. Piège : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, pas $\frac{1}{\ln x}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Dériver et étudier un signe sans se tromper** — Toutes les fonctions sont définies sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Écris $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient pour $f(x)=2x-5\ln x$, puis donne son signe.

(b) Lina écrit : « la dérivée de $4\ln x+x$ est $\frac{4}{\ln x}+1$ ». Repère son erreur et corrige-la.

(c) Vrai ou faux ? Justifie. « Si $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, alors f est strictement croissante sur $]0\,;e]$. »

(d) Écris $f'(x)$ en un seul quotient pour $f(x)=x^2-8\ln x$, puis trouve où f' s'annule.

(e) Vrai ou faux ? Justifie. « La dérivée de $(\ln x)^2$ est $\frac{2}{x}$. »

(f) Calcule $f'(2)$ pour $f(x)=\ln(x^2+4)-x$.

Ex. 43 (suite)

(g) Écris l'équation de la tangente au point d'abscisse e à la courbe de $q(x)=x\ln x-2x$.

Ex. 44 ★★☆ **Limites aux bornes : formes indéterminées** — Détermine chaque limite en justifiant. Pour une forme indéterminée, lève-la.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\ln x)$

(b) $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2\ln x)$

(c) $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x-x)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+2}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big((\ln x)^2-\ln x\big)$

(g) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x$

Ex. 45 ★★☆ **Une fonction auxiliaire pour le signe de f'** — On définit sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions $g(x)=x^2-1+\ln x$ et $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$.

(a) Calcule $g'(x)$ et déduis-en les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Calcule $g(1)$, puis déduis-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

(c) Montre que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

(d) Dresse le tableau de variations de f, limites aux bornes comprises.

(e) Déduis-en que, pour tout $x>0$, $\ln x\leqslant x^2-x$.

Ex. 46 ★★☆ **Le bénéfice d'un atelier de vélos** — L'atelier de Malik fabrique entre 100 et 1 000 vélos par an. Pour x centaines de vélos, avec $x\in[1\,;10]$, le bénéfice est $B(x)=5\ln x-x+1$, en milliers d'euros.

(a) Écris $B'(x)$ en un seul quotient, étudie son signe, puis dresse le tableau de variations de B sur $[1\,;10]$.

(b) Combien de vélos rendent le bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice en valeur exacte, puis à l'euro près.

(c) Montre que l'équation $B(x)=3$ a une unique solution α dans $[5\,;10]$, puis donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

(d) Interprète ce résultat pour Malik.

Ex. 47 ★★★ **Un minimum atteint en α** — On définit sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions $g(x)=x^2-3+2\ln x$ et $f(x)=x+\frac{1-2\ln x}{x}$.

(a) Étudie les variations de g, puis montre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, puis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

(c) Calcule les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, en justifiant.

(d) Montre que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, puis dresse le tableau de variations de f.

(e) Montre que $f(\alpha)=2\alpha-\frac{2}{\alpha}$, puis déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,04.

Ex. 48 ★★★ **Nombre de solutions de f(x) = k** — Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$, et $\mathcal{C}$ sa courbe. Donne les valeurs exactes.

(a) Vérifie que $x(\ln x)^2 = 4\left(\sqrt{x}\times\ln\sqrt{x}\right)^2$ pour tout $x>0$, puis déduis-en la limite de f en 0^+. Donne aussi sa limite en $+\infty$.

(b) Écris $f'(x)$ sous forme factorisée, étudie son signe dans un tableau de signes, puis dresse le tableau de variations de f.

(c) Détermine les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite $y = 3x$, puis donne une équation de chacune de ces tangentes.

(d) Selon les valeurs du réel k, détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 49 ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de gourdes** — L'atelier de Soraya fabrique entre 500 et 10 000 gourdes par mois. Pour x milliers de gourdes, avec $x \in [0{,}5\,;10]$, le coût total est $C(x) = x^3 - 2x\ln x + 3x$, en milliers d'euros. Le coût moyen d'une gourde est $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, en euros.

(a) Exprime $C_M(x)$, écris $C_M'(x)$ en un seul quotient, étudie son signe et dresse le tableau de variations de C_M.

(b) Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Donne ce coût minimal et interprète-le.

(c) Calcule $C'(x)$, étudie les variations de $h = C'$ sur $[0{,}5\,;10]$, puis déduis-en le sens de variation de C.

(d) On appelle $C'(x)$ le coût marginal. Résous l'équation $C'(x) = C_M(x)$ sur $[0{,}5\,;10]$ et interprète la solution.

(e) Ben affirme : « Au-delà de 1 000 gourdes, le coût moyen dépasse le coût marginal. » A-t-il raison ? Justifie.