1. *ln, réciproque de exp : passer de ln à exp*

Ex. 1 ★☆☆ Simplifier avec ln et exp

(a) $e^{\ln 7} = 7$ car $e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$.

(b) $\ln(e^{-3}) = -3$ car $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

(c) $e^{2\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

(d) $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$, donc $3\ln e - 5\ln 1 = 3 \times 1 - 5 \times 0 = 3$.

(e) $e^4 \times e^{-6} = e^{-2}$, donc $\ln(e^4 \times e^{-6}) = \ln(e^{-2}) = -2$.

(f) $e^{\ln x + 1} = e^{\ln x} \times e^1 = e\,x$.

Ex. 2 ★☆☆ Résoudre en passant de ln à exp

(a) $12 > 0$, donc $e^x = 12 \iff x = \ln 12$. $S = \{\ln 12\}$.

(b) Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x \neq -2$: on ne peut pas écrire $x = \ln(-2)$, car $\ln(-2)$ n'existe pas. $S = \varnothing$.

(c) Domaine : $x > 0$. $\ln x = 3 \iff x = e^3$, et $e^3 > 0$. $S = \{e^3\}$.

(d) Domaine : $x > 0$. $2\ln x + 5 = 1 \iff \ln x = -2 \iff x = e^{-2}$, et $e^{-2} > 0$. $S = \{e^{-2}\}$.

(e) $5 > 0$, donc $e^{3x-1} = 5 \iff 3x - 1 = \ln 5 \iff x = \frac{1+\ln 5}{3}$. $S = \left\{\frac{1+\ln 5}{3}\right\}$.

(f) Domaine : $2x - 6 > 0$, donc $x > 3$. $\ln(2x-6) = 0 \iff 2x - 6 = e^0 = 1 \iff x = \frac{7}{2}$, et $\frac{7}{2} > 3$. $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Ex. 3 ★☆☆ Vrai ou faux sur ln

(a) Faux : c'est l'inverse. $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).

(b) Faux : $-2 \notin]0\,;+\infty[$, donc $\ln(-2)$ n'existe pas.

(c) Vrai : $0 < 0{,}4 < 1$ et ln est strictement croissante, donc $\ln(0{,}4) < \ln 1 = 0$ ($\ln(0{,}4) \approx -0{,}916$).

(d) Faux : pour $x = -1$, $\ln(-1)$ n'existe pas, donc $e^{\ln(-1)}$ non plus. $e^{\ln x} = x$ n'est vrai que pour $x > 0$, alors que $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

(e) Faux : pour $k = -1$, $e^x = -1$ n'a pas de solution car $e^x > 0$. Il faut $k > 0$.

(f) Faux : pour $x = 3$, $9 - 3x = 0$ et $\ln 0$ n'existe pas. $\ln(9-3x)$ est défini seulement pour $9 - 3x > 0$, soit $x < 3$.

(g) Vrai : $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$ (et non -2).

Ex. 4 ★★☆ La copie de Noé

(a) Noé s'est trompé de sens : $e^a = k \iff a = \ln k$.
Comme $4 > 0$: $e^{x+1} = 4 \iff x + 1 = \ln 4 \iff x = \ln 4 - 1$.
Donc $S = \{\ln 4 - 1\}$.

(b) Noé confond $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$. De plus, $x = 2$ donne $\ln 0$, qui n'existe pas. Domaine : $x > 2$. $\ln(x-2) = 1 \iff x - 2 = e \iff x = 2 + e$, et $2 + e > 2$.
Donc $S = \{2 + e\}$.

(c) $\ln x + 1$ n'est pas égal à $\ln(x+1)$. Domaine : $x > 0$.
$\ln x + 1 = 3 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$, et $e^2 > 0$.
Donc $S = \{e^2\}$.

(d) C'est faux : $\ln y < 0$ dès que $0 < y < 1$. Domaine : $3x > 0$, donc $x > 0$. $\ln(3x) = -1 \iff 3x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{3e}$, et $\frac{1}{3e} > 0$.
Donc $S = \left\{\frac{1}{3e}\right\}$.

Ex. 5 ★★★ Équations à paramètre

(a) Pour tout réel x, $e^{2x-1} > 0$. Si $m \leqslant 0$: (E_m) n'a pas de solution, $S = \varnothing$. Si $m > 0$: $e^{2x-1} = m \iff 2x - 1 = \ln m \iff x = \frac{1+\ln m}{2}$. Conclusion : aucune solution si $m \leqslant 0$, une seule solution si $m > 0$, $S = \left\{\frac{1+\ln m}{2}\right\}$.

(b) Il faut $m > 0$, et alors $\frac{1+\ln m}{2} = 0 \iff \ln m = -1 \iff m = e^{-1}$. Vérification : $e^{2\times 0 - 1} = e^{-1}$.
Conclusion : $m = e^{-1}$.

(c) Il faut $m > 0$. Alors $\frac{1+\ln m}{2} < 0 \iff \ln m < -1 \iff m < e^{-1}$, car exp est strictement croissante.
Conclusion : la solution est strictement négative si et seulement si $0 < m < e^{-1}$. Attention : $\ln m$ peut être négatif, mais m doit rester strictement positif.

(d) Domaine : il faut $4x - 2 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{2}$. Sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$: $\ln(4x-2) = m \iff 4x - 2 = e^m \iff x = \frac{1}{2} + \frac{e^m}{4}$. Comme $e^m > 0$, ce nombre est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$: il est dans le domaine.
Donc $S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{e^m}{4}\right\}$ pour tout m. Ensuite, $\frac{1}{2} + \frac{e^m}{4} < 1 \iff e^m < 2 \iff m < \ln 2$, car ln est strictement croissante. Conclusion : la solution est strictement inférieure à 1 si et seulement si $m < \ln 2$.

Ex. 5 **(suite)**

(e) Sur $]0;+\infty[$: $\ln x + 1 = m \iff \ln x = m-1 \iff x = \mathrm{e}^{m-1}$. Sur $]-1;+\infty[$: $\ln(x+1) = m \iff x + 1 = \mathrm{e}^m \iff x = \mathrm{e}^m - 1$, qui est bien strictement supérieur à -1. En général, ces deux solutions sont différentes : $\ln x + 1 \neq \ln(x+1)$. Elles sont égales si $\mathrm{e}^{m-1} = \mathrm{e}^m - 1 \iff \mathrm{e}^m\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 \iff \mathrm{e}^m = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$. Comme $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} > 0$, on obtient $m = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right) \approx 0{,}459$. Conclusion : oui, pour une seule valeur de m, $m = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right)$.

Ex. 6 ★★★ **Deux courbes symétriques**

(a) On cherche x tel que $\mathrm{e}^x = 8$. Comme $8 > 0$, $\mathrm{e}^x = 8 \iff x = \ln 8$. De plus, $\mathrm{e}^{3\ln 2} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$. L'équation $\mathrm{e}^x = 8$ n'a qu'une seule solution, donc $\ln 8 = 3\ln 2$. Conclusion : $A(3\ln 2\,;8)$.

(b) Le symétrique de $(a\,;b)$ par rapport à $y = x$ est $(b\,;a)$, donc $B(8\,;3\ln 2)$, c'est-à-dire $B(8\,;\ln 8)$ d'après la question précédente. L'ordonnée de B est l'image de son abscisse par ln, donc $B \in \mathcal{C}$.

(c) ln n'est définie que sur $]0;+\infty[$: $\ln(-4)$ n'existe pas, donc aucun point de $\mathcal{C}$ n'a pour abscisse -4. En revanche, $\ln x = -4 \iff x = \mathrm{e}^{-4}$, et $\mathrm{e}^{-4} > 0$: le point $(\mathrm{e}^{-4}\,;-4)$ est sur $\mathcal{C}$. Conclusion : non pour l'abscisse -4, oui pour l'ordonnée -4.

(d) Domaine : $x > 0$. Comme exp est strictement croissante, $\ln x < 0 \iff \mathrm{e}^{\ln x} < \mathrm{e}^0 \iff x < 1$. Conclusion : $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de l'axe des abscisses sur $]0;1[$.

(e) P : $\ln x = \frac{1}{3} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$, donc $P\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,;\frac{1}{3}\right)$. Q : $\mathrm{e}^x = \frac{1}{3} \iff x = \ln\frac{1}{3}$, car $\frac{1}{3} > 0$, donc $Q\left(\ln\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$, avec $\ln\frac{1}{3} < 0$ car $\frac{1}{3} < 1$. P et Q ont la même ordonnée et $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} > 0 > \ln\frac{1}{3}$, donc $PQ = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - \ln\frac{1}{3} \approx 2{,}49$. Conclusion : $PQ = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - \ln\frac{1}{3} \approx 2{,}49$.

Ex. 7 ★★★ **Le café de Malik**

(a) $T(0) = 20 + 70\,\mathrm{e}^0 = 90$ °C. Ensuite, $T(t) = 50 \iff 70\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 30 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{3}{7}$. Comme $\frac{3}{7} > 0$, cela équivaut à $-0{,}1t = \ln\frac{3}{7}$, soit $t = -10\ln\frac{3}{7} \approx 8{,}473$ min. Conclusion : le café est à 50 °C au bout de $-10\ln\frac{3}{7}$ min, soit environ 8 min 28 s.

(b) $T(t) \leqslant 40 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} \leqslant \frac{2}{7} \iff -0{,}1t \leqslant \ln\frac{2}{7}$, car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. En divisant par $-0{,}1 < 0$, on change le sens : $t \geqslant -10\ln\frac{2}{7} \approx 12{,}53$. Donc $S = \left[-10\ln\frac{2}{7}\,;+\infty\right[$. Conclusion : Malik doit attendre environ 12,53 minutes.

Ex. 7 **(suite)**

(c) $T(t) = 20 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0$: c'est impossible, car une exponentielle est strictement positive. On ne peut pas écrire $\ln 0$. $T(t) = 15 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} = -\frac{1}{14}$: là encore, pas de solution. Conclusion : le café ne descend ni à 20 °C ni à 15 °C, il reste toujours strictement au-dessus de 20 °C.

(d) $T_2(5) = 55 \iff 70\,\mathrm{e}^{-5k} = 35 \iff \mathrm{e}^{-5k} = \frac{1}{2} \iff -5k = \ln\frac{1}{2}$, car $\frac{1}{2} > 0$. Donc $k = -\frac{1}{5}\ln\frac{1}{2} \approx 0{,}139$. On a bien $k > 0$, car $\ln\frac{1}{2} < 0$. Conclusion : $k = -\frac{1}{5}\ln\frac{1}{2} \approx 0{,}139$.

2. *Propriétés algébriques : simplifier, développer*

Ex. 8 ★☆☆ **Tout en fonction de ln 2 et ln 5**

(a) $40 = 2^3 \times 5$, donc $\ln 40 = 3\ln 2 + \ln 5$.

(b) $0{,}016 = \frac{16}{1000} = \frac{2}{125} = \frac{2}{5^3}$, donc $\ln 0{,}016 = \ln 2 - 3\ln 5$.

(c) $\ln\frac{1}{50} = -\ln 50 = -\ln(2\times 5^2) = -\ln 2 - 2\ln 5$.

(d) $\ln\sqrt{20} = \frac{1}{2}\ln(2^2\times 5) = \frac{1}{2}(2\ln 2 + \ln 5) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5$.

(e) $6{,}25 = \frac{625}{100} = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2}$, donc $\ln 6{,}25 = 2\ln 5 - 2\ln 2$.

(f) $\ln\left(8\sqrt{5}\right) = \ln(2^3) + \ln\sqrt{5} = 3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5$.

Ex. 9 ★☆☆ **Regrouper, simplifier**

(a) $A = \ln\frac{15\times 6}{10} = \ln 9$ (ou $2\ln 3$).

(b) $\frac{1}{2}\ln 16 = \ln\sqrt{16} = \ln 4 = 2\ln 2$, donc $B = 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 2$.

(c) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{x+2}$, donc $C = \ln\left(\mathrm{e}^{x+2}\right) = x + 2$.

(d) $D = \mathrm{e}^{\ln(3^2)} = \mathrm{e}^{\ln 9} = 9$.

(e) $E = \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

(f) $F = -\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = -3$.

Ex. 10 ★★☆ **Vrai ou faux sur les formules**

(a) Faux. Avec $a = b = 1$: $\ln(1+1) = \ln 2 \neq 0$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. On ne peut pas décomposer le ln d'une somme.

(b) Vrai. $\ln(a^2b) = \ln(a^2) + \ln b = 2\ln a + \ln b$, donc $\ln(a^2b) - 2\ln a = \ln b$.

(c) Faux. Avec $a = \mathrm{e}$: $\ln(2\mathrm{e}) = \ln 2 + \ln\mathrm{e} = \ln 2 + 1$, alors que $2\ln\mathrm{e} = 2$. Or $\ln 2 \neq 1$ car $2 \neq \mathrm{e}$. En fait, $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$, et c'est $\ln(a^2)$ qui vaut $2\ln a$.

(d) Faux. Avec $a = \mathrm{e}$: $(\ln\mathrm{e})^2 = 1$, alors que $\ln(\mathrm{e}^2) = 2$. En fait, $\ln(a^2) = 2\ln a$.

(e) Vrai. $ab > 0$, donc $\ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Ex. 11 ★★☆ **Les erreurs de Yanis**

(a) Yanis a décomposé le ln d'une différence, ce qui est faux. Pour $x > 1$, on a $x^2 - 1 > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $\ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \ln(x+1)$.

(b) Pour $x = \mathrm{e}$: $\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2} = -\ln(\mathrm{e}^2) = -2$, alors que $\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^2)} = \frac{1}{2}$. Yanis a tort : $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$, et non $\frac{1}{\ln a}$. Pour $x > 1$: $\ln\frac{1}{x^2} = -\ln(x^2) = -2\ln x$.

(c) Non. Le ln d'un produit est une somme, pas un produit : $\ln\left(x\sqrt{x}\right) = \ln x + \ln\sqrt{x} = \ln x + \frac{1}{2}\ln x = \frac{3}{2}\ln x$. Avec $x = \mathrm{e}$: $\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{3}{2}$, alors que $\frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 = \frac{1}{2}$.

(d) $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = 2x$ et $\ln\left(x\,\mathrm{e}^x\right) = \ln x + x$. L'expression vaut donc $2x - \ln x - x = x - \ln x$.

Ex. 12 ★★★ **Une somme qui se télescope**

(a) Non. Il n'existe aucune formule pour le ln d'une différence : $\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$. D'ailleurs $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$, donc son ln est strictement négatif, alors que $\ln 4 > 0$. Le bon calcul : $\ln\left(1-\frac{1}{4}\right) = \ln\frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4 = \ln 3 - 2\ln 2$.

(b) Pour $k \geqslant 2$: $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Les nombres $k-1$, $k+1$ et k^2 sont strictement positifs, donc on peut appliquer les formules : $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - \ln(k^2) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k$.

(c) $U_3 = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} = \ln\left(\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\right) = \ln\frac{2}{3}$. Puis $U_4 = U_3 + \ln\frac{15}{16} = \ln\left(\frac{2}{3}\times\frac{15}{16}\right) = \ln\frac{5}{8}$.

(d) D'après la question précédente, $U_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1) - \ln k\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln k\right)$. Dans chaque somme, les termes s'annulent deux à deux : la première vaut $\ln 1 - \ln n = -\ln n$, la seconde vaut $\ln(n+1) - \ln 2$.
Donc $U_n = \ln(n+1) - \ln n - \ln 2 = \ln\frac{n+1}{2n}$.
(Vérification : on retrouve $\ln\frac{4}{6} = \ln\frac{2}{3}$ pour $n = 3$ et $\ln\frac{5}{8}$ pour $n = 4$.)

(e) $U_{99} = \ln\frac{100}{198} = \ln\frac{50}{99}$. Or $50 = 2\times 5^2$ et $99 = 3^2\times 11$, donc $U_{99} = \ln 2 + 2\ln 5 - 2\ln 3 - \ln 11$. Puis $\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ tend vers $\frac{1}{2}$, et ln est continue en $\frac{1}{2}$, donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

Ex. 13 ★★★ **ln(x²) ou 2 ln x ?**

(a) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 > 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$: f est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$. $g(x)$ existe si et seulement si $x > 0$: g est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Ex. 13 **(suite)**

(b) Non. La formule $\ln(a^2) = 2\ln a$ n'est vraie que pour $a > 0$. Contre-exemple : $f(-\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^2) = 2$, alors que $g(-\mathrm{e})$ n'existe pas. Les deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition ; elles coïncident seulement sur $]0\,;+\infty[$. Pour $x < 0$: $x^2 = (-x)^2$ avec $-x > 0$, donc $f(x) = 2\ln(-x)$.

(c) Domaine de f : $x \neq 0$. $f(x) = 4 \iff x^2 = \mathrm{e}^4 \iff x = \mathrm{e}^2$ ou $x = -\mathrm{e}^2$, donc $S = \{-\mathrm{e}^2\,;\mathrm{e}^2\}$. Domaine de g : $x > 0$. $g(x) = 4 \iff \ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$, donc $S = \{\mathrm{e}^2\}$. Conclusion : l'équation avec f a une solution de plus, la solution négative $-\mathrm{e}^2$, que g ne peut pas voir.

(d) Pour $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$. On pose $X = \ln x$: l'équation s'écrit $X^2 = 2X$, soit $X(X-2) = 0$, donc $X = 0$ ou $X = 2$. Ainsi $\ln x = 0 \iff x = 1$ et $\ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$. $S = \{1\,;\mathrm{e}^2\}$. Attention : $(\ln x)^2$ et $\ln(x^2)$ ne sont égaux que pour ces deux valeurs.

(e) $f(\mathrm{e}^x) = \ln(\mathrm{e}^{2x}) = 2x$; $\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x+2}} = \ln\left(\mathrm{e}^{-x-2}\right) = -x-2$; $\mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^2)} = x^2$ car $x^2 > 0$.
Donc $h(x) = 2x - x - 2 + x^2 = x^2 + x - 2$. Pour $x \neq 0$: $x^2 + x - 2 = 0$, $\Delta = 9$, d'où $x = 1$ ou $x = -2$, tous deux non nuls. Conclusion : $S = \{-2\,;1\}$.

Ex. 14 ★★★ **Quotients de logarithmes**

(a) Non : $\ln 8 = \ln(2^3) = 3\ln 2$, donc $\frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{3\ln 2}{\ln 2} = 3$, alors que $\ln 4 \approx 1{,}386$. Un quotient de deux ln n'est pas le ln du quotient : $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln\frac{a}{b}$.

(b) $\ln\frac{1}{125} = -\ln(5^3) = -3\ln 5$ et $\ln 25 = 2\ln 5$, donc le premier quotient vaut $-\frac{3}{2}$. Puis $\ln\sqrt{27} = \frac{1}{2}\ln(3^3) = \frac{3}{2}\ln 3$ et $\ln 9 = 2\ln 3$, donc le second vaut $\frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

(c) $\frac{\ln(a^n)}{\ln(a^p)} = \frac{n\ln a}{p\ln a} = \frac{n}{p}$. La simplification par $\ln a$ exige $\ln a \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 1$; pour $a = 1$, le dénominateur $\ln(1^p) = 0$ et le quotient n'existe pas.

(d) Si $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$, alors $q\ln 3 = p\ln 2$, soit $\ln(3^q) = \ln(2^p)$. Comme ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit $3^q = 2^p$. Or 3^q est un produit de facteurs impairs, donc impair, et 2^p est pair car $p \geqslant 1$: c'est impossible. Conclusion : $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ n'est pas un quotient d'entiers naturels non nuls ; comme il est strictement positif, ce n'est pas un rationnel.

(e) $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3$, donc $\frac{\ln 6}{\ln 2} = \frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Si ce nombre était une fraction r d'entiers, alors $\frac{\ln 3}{\ln 2} = r - 1$ en serait une aussi, ce qui contredit la question précédente. Conclusion : $\frac{\ln 6}{\ln 2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction d'entiers.

3. *Équations et inéquations avec ln et exp*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : résoudre en une ligne**

(a) Domaine : $x > 0$. $\ln x = 3 \iff x = \mathrm{e}^3$, et $\mathrm{e}^3 > 0$. $S = \{\mathrm{e}^3\}$.

(b) $\mathrm{e}^x > 7 \iff x > \ln 7$ (ln est strictement croissante). $S =]\ln 7 ; +\infty[$.

(c) Domaine : $x > 0$. $\ln x \leqslant -1 \iff x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. On garde le domaine : $S =]0 ; \mathrm{e}^{-1}]$.

(d) Domaine : $2x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. L'équation équivaut à $2x - 1 = x + 4$, soit $x = 5$. Comme $5 > \frac{1}{2}$: $S = \{5\}$.

(e) $\mathrm{e}^{3x+1} = 2 \iff 3x + 1 = \ln 2 \iff x = \frac{\ln 2 - 1}{3}$. $S = \left\{\frac{\ln 2 - 1}{3}\right\}$, avec $\frac{\ln 2 - 1}{3} \approx -0{,}102$.

(f) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Il ne peut donc pas valoir -4 : $S = \varnothing$.

(g) Domaine : $x > -2$. $\ln(x + 2) \geqslant 0 = \ln 1 \iff x + 2 \geqslant 1 \iff x \geqslant -1$. On garde le domaine : $S = [-1 ; +\infty[$.

Ex. 16 ★☆☆ **Vrai, faux ou erreur ?**

(a) Faux. Un logarithme peut être négatif : pour $x > 0$, $\ln x = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$. Donc $S = \{\mathrm{e}^{-2}\}$.

(b) Inès a appliqué l'équivalence sans avoir un seul ln de chaque côté. Domaine : $x > 0$. On a $\ln x + \ln 2 = \ln(2x)$, donc l'équation équivaut à $2x = 10$, soit $x = 5$. $S = \{5\}$.

(c) Vrai. $\mathrm{e}^{2x} = 9 \iff 2x = \ln 9 = 2\ln 3 \iff x = \ln 3$.

(d) En multipliant par -1, il faut changer le sens de l'inégalité. Correction : $-x \geqslant \ln 4 \iff x \leqslant -\ln 4$. $S =]-\infty ; -\ln 4]$.

(e) Faux. Domaine : $x > 0$ et $5 - x > 0$, soit $0 < x < 5$. Sur ce domaine, $x > 5 - x \iff x > \frac{5}{2}$, donc $S = \left]\frac{5}{2} ; 5\right[$. Contre-exemple : $x = 6$ est dans l'ensemble proposé, mais $\ln(5 - 6)$ n'existe pas.

Ex. 17 ★★☆ **Équations et inéquations en deux temps**

(a) Domaine : $x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > 1$. Pour $x > 1$, l'équation équivaut à $\ln\big((x-1)(x+3)\big) = \ln 12$, soit $(x-1)(x+3) = 12$, c'est-à-dire $x^2 + 2x - 15 = 0$. $\Delta = 4 + 60 = 64$, d'où $x = 3$ ou $x = -5$. Seul $3 > 1$ convient. Conclusion : $S = \{3\}$.

Ex. 17 (suite)

(b) Avec $X = \mathrm{e}^x$, on a $X > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} = X^2$: $X^2 + 2X - 48 = 0$. $\Delta = 4 + 192 = 196$, d'où $X = 6$ ou $X = -8$. On rejette $X = -8$, car $\mathrm{e}^x > 0$. Donc $\mathrm{e}^x = 6$, soit $x = \ln 6$. Conclusion : $S = \{\ln 6\}$.

(c) Domaine : $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 + 4X - 5 = 0$. $\Delta = 16 + 20 = 36$, d'où $X = 1$ ou $X = -5$. Ici X peut être négatif. $\ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}$ et $\ln x = -5 \iff x = \mathrm{e}^{-5}$, deux réels strictement positifs. Conclusion : $S = \{\mathrm{e}^{-5} ; \mathrm{e}\}$.

(d) $\ln x < 0$ sur $]0 ; 1[$, $\ln 1 = 0$ et $\ln x > 0$ sur $]1 ; +\infty[$. De même, $2 - x > 0$ sur $]0 ; 2[$, il s'annule en 2 et il est négatif sur $]2 ; +\infty[$. Le produit est donc négatif sur $]0 ; 1[$, nul en 1, positif sur $]1 ; 2[$, nul en 2 et négatif sur $]2 ; +\infty[$. Conclusion : $S = [1 ; 2]$.

Ex. 18 ★★☆ **Élimination d'un médicament**

(a) Diminuer de 12 %, c'est multiplier par 0,88. La suite (c_n) est donc géométrique de raison 0,88 et de premier terme 40 : $c_n = 40 \times 0{,}88^n$.

(b) $c_n < 5 \iff 0{,}88^n < 0{,}125 \iff n \ln 0{,}88 < \ln 0{,}125$ (ln est strictement croissante) $\iff n > \frac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}88}$. Le sens change car $\ln 0{,}88 < 0$. Or $\frac{\ln 0{,}125}{\ln 0{,}88} \approx 16{,}27$. Le plus petit entier est donc $n = 17$: la concentration passe sous 5 mg/L au bout de 17 heures ($c_{17} \approx 4{,}553$).

(c) On répète tant que la concentration est encore au moins égale à 5 : `while c >= 5:` et `c = c * 0.88`. Le programme affiche alors 17.

(d) Non. $c_n \leqslant 20 \iff 0{,}88^n \leqslant 0{,}5 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}88} \approx 5{,}42$ (le sens change car $\ln 0{,}88 < 0$). La concentration est divisée par deux au bout de 6 heures. Au bout de 4 heures, elle vaut encore environ 60 % de sa valeur de départ, car $0{,}88^4 \approx 0{,}600$. Lina a tort : les baisses de 12 % se multiplient, elles ne s'additionnent pas.

Ex. 19 ★★★ **Domaine d'abord : équations et inéquations à pièges**

(a) Domaine : il faut $x > 0$ et $x - 3 > 0$, soit $x > 3$. On a $2\ln 2 = \ln 4$. Pour $x > 3$, l'équation s'écrit $\ln\big(x(x-3)\big) = \ln 4$, ce qui équivaut à $x(x-3) = 4$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $x = \frac{3+5}{2} = 4$ ou $x = \frac{3-5}{2} = -1$. Seul $4 > 3$ convient : $S = \{4\}$.

Ex. 19 (suite)

(b) Faux. Domaine : $x^2 - 3x = x(x-3) > 0$, soit $x < 0$ ou $x > 3$ (signe d'un trinôme). Sur ce domaine, l'équation équivaut à $x^2 - 3x = 4$, soit $x = 4$ ou $x = -1$, et les deux sont dans le domaine : $S = \{-1\,;4\}$. Dans la question précédente, $\ln x$ et $\ln(x-3)$ doivent exister séparément, ce qui impose $x > 3$ et exclut -1. Les deux équations n'ont pas le même domaine, donc pas les mêmes solutions. En effet, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ n'est valable que si $a > 0$ et $b > 0$.

(c) Domaine : $x > 0$, $x + 2 > 0$ et $3x + 6 > 0$, soit $x > 0$. Pour $x > 0$, l'inéquation s'écrit $\ln\big(x(x+2)\big) \leqslant \ln(3x+6)$. Comme ln est strictement croissante, elle équivaut à $x(x+2) \leqslant 3(x+2)$, soit $(x+2)(x-3) \leqslant 0$, c'est-à-dire $-2 \leqslant x \leqslant 3$. On croise avec le domaine $x > 0$: $S =]0\,;3]$.

(d) Domaine : $x > 0$. Signe de $\ln x$: négatif sur $]0\,;1[$, nul en 1, positif sur $]1\,;+\infty[$. Signe de $\mathrm{e}^x - 5$: $\mathrm{e}^x > 5 \iff x > \ln 5$, avec $\ln 5 \approx 1{,}61 > 1$.

x	0		1		ln 5		$+\infty$
ln x		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $S = [1\,;\ln 5]$, avec $\ln 5 \approx 1{,}61$.

Ex. 20 ★★★ Changements de variable : $X = \mathrm{e}^x$ ou $X = \ln x$

(a) On pose $X = \mathrm{e}^x$, donc $X > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} = X^2$. On obtient $X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3) \geqslant 0 \iff X \leqslant -3$ ou $X \geqslant 2$. Le cas $X \leqslant -3$ est impossible, car $\mathrm{e}^x > 0$. Il reste $\mathrm{e}^x \geqslant 2 \iff x \geqslant \ln 2$ (ln est strictement croissante). Conclusion : $S = [\ln 2\,;+\infty[$, avec $\ln 2 \approx 0{,}69$.

(b) Domaine : $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 + X - 6 = 0$, donc $X = 2$ ou $X = -3$. Le logarithme prend toutes les valeurs réelles, donc les deux valeurs conviennent : $\ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$ et $\ln x = -3 \iff x = \mathrm{e}^{-3}$. Ces deux nombres sont strictement positifs. Conclusion : $S = \{\mathrm{e}^{-3}\,;\mathrm{e}^2\}$, avec $\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}05$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$. Seul $X = \mathrm{e}^x$ impose $X > 0$.

(c) Domaine : $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) > 0 \iff X < 1$ ou $X > 2$. D'une part, $\ln x < 1 \iff 0 < x < \mathrm{e}$ (et non $x < \mathrm{e}$ seul, à cause du domaine). D'autre part, $\ln x > 2 \iff x > \mathrm{e}^2$. Conclusion : $S =]0\,;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}^2\,;+\infty[$, avec $\mathrm{e} \approx 2{,}72$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$.

Ex. 20 (suite)

(d) Comme $\mathrm{e}^x > 0$, multiplier par e^x conserve le sens : $2\mathrm{e}^{2x} + 3 \leqslant 7\mathrm{e}^x$. On pose $X = \mathrm{e}^x > 0$: $2X^2 - 7X + 3 \leqslant 0$. $\Delta = 49 - 24 = 25$, donc les racines sont $X = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $X = \frac{7+5}{4} = 3$. Le trinôme est négatif entre ses racines : $\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 3$, et ces deux bornes sont positives. Comme ln est strictement croissante, on obtient $-\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 3$. Conclusion : $S = [-\ln 2\,;\ln 3]$, avec $-\ln 2 \approx -0{,}69$ et $\ln 3 \approx 1{,}10$.

Ex. 21 ★★★ Arnac et Belvès : deux populations

(a) Perdre 2 % revient à multiplier par 0,98, et gagner 3 % à multiplier par 1,03. Les deux suites sont donc géométriques : $a_n = 50\,000 \times 0{,}98^n$ et $b_n = 30\,000 \times 1{,}03^n$.

(b) $a_n < 40\,000 \iff 0{,}98^n < 0{,}8 \iff n \ln 0{,}98 < \ln 0{,}8$ (ln est strictement croissante). Or $\ln 0{,}98 < 0$, donc le sens change quand on divise : $n > \frac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98} \approx 11{,}05$. Le plus petit entier qui convient est $n = 12$. Conclusion : Arnac passe sous les 40 000 habitants en 2037.

(c) $b_n > a_n \iff 30\,000 \times 1{,}03^n > 50\,000 \times 0{,}98^n$. On divise par $30\,000 \times 0{,}98^n > 0$: $\left(\frac{103}{98}\right)^n > \frac{5}{3}$. Comme les deux membres sont positifs, on applique ln : $n \ln \frac{103}{98} > \ln \frac{5}{3}$. Or $\frac{103}{98} > 1$, donc $\ln \frac{103}{98} > 0$ et le sens est conservé : $n > \frac{\ln(5/3)}{\ln(103/98)} \approx 10{,}27$.
Donc $n = 11$: Belvès devient plus peuplée qu'Arnac en 2036.

(d) On répète tant que Belvès n'est pas plus peuplée qu'Arnac : `while b <= a :`, puis `a = a * 0.98` et `b = b * 1.03`. Le programme affiche 2036, ce qui confirme le résultat de la question précédente.

4. Seuils : $\ln(q^n) = n \ln q$

Ex. 22 ★☆☆ Seuils en ligne

(a) $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, donc $\ln(0{,}125^n) = n \ln(2^{-3}) = -3n \ln 2$.

(b) $0{,}4^n \leqslant 0{,}005 \iff n \ln 0{,}4 \leqslant \ln 0{,}005 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}4} \approx 5{,}78$ (le sens change car $\ln 0{,}4 < 0$).
Donc $S = \{6\,;7\,;\dots\}$. Contrôle : $0{,}4^5 = 0{,}01024$ et $0{,}4^6 = 0{,}004096$.

(c) $0{,}95^n > 0{,}6 \iff n \ln 0{,}95 > \ln 0{,}6 \iff n < \frac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}95} \approx 9{,}96$ (le sens change car $\ln 0{,}95 < 0$).
Donc $S = \{0\,;1\,;\dots\,;9\}$. Contrôle : $0{,}95^9 \approx 0{,}630$ et $0{,}95^{10} \approx 0{,}599$.

Ex. 22 **(suite)**

(d) On divise d'abord par 5 : $u(n) \geqslant 100 \iff 1{,}2^n \geqslant 20 \iff n \geqslant \frac{\ln 20}{\ln 1{,}2} \approx 16{,}43$ (car $\ln 1{,}2 > 0$). Le plus petit entier est $n = 17$. Contrôle : $u(16) \approx 92{,}44$ et $u(17) \approx 110{,}93$.

(e) $1{,}05^{22} \approx 2{,}925 < 3$ et $1{,}05^{23} \approx 3{,}072 > 3$. Comme la suite $(1{,}05^n)$ est croissante, 23 est bien le plus petit entier qui convient.

Ex. 23 ★☆☆ **Vrai ou faux sur les seuils**

(a) Faux. Pour $n = 2$: $\ln(3^2) = \ln 9 \approx 2{,}197$, alors que $(\ln 3)^2 \approx 1{,}207$. La bonne règle est $\ln(3^n) = n \ln 3$.

(b) Faux. $\ln 0{,}6 < 0$, donc le sens change : $0{,}6^n \geqslant 0{,}002 \iff n \leqslant \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}6} \approx 12{,}17$. Contre-exemple : $n = 13$ vérifie $n \geqslant 12{,}17$, mais $0{,}6^{13} \approx 0{,}0013 < 0{,}002$.

(c) Non. Il faut $n \geqslant 14{,}91$, donc on arrondit à l'entier supérieur : $n = 15$. Contrôle : $1{,}3^{14} \approx 39{,}37 < 50$ et $1{,}3^{15} \approx 51{,}19 \geqslant 50$.

(d) Faux. $v(n) \geqslant 2{,}9 \iff -2 \times 0{,}8^n \geqslant -0{,}1 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}05$ (on divise par $-2 < 0$, donc le sens change). On en déduit $n \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}8} \approx 13{,}43$: on a $v(n) \geqslant 2{,}9$ dès $n = 14$ ($v(13) \approx 2{,}890$ et $v(14) \approx 2{,}912$).

(e) Vrai. $\ln(0{,}9^n) = n \ln 0{,}9$, avec $n > 0$ et $\ln 0{,}9 < 0$ car $0{,}9 < 1$. Le produit est donc strictement négatif.

Ex. 24 ★★☆ **Un médicament éliminé**

(a) Retirer 15 %, c'est multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$: $m(n+1) = 0{,}85\, m(n)$. La suite $(m(n))$ est géométrique de raison 0,85 et de premier terme 80, donc $m(n) = 80 \times 0{,}85^n$.

(b) $80 \times 0{,}85^n < 5 \iff 0{,}85^n < 0{,}0625 \iff n \ln 0{,}85 < \ln 0{,}0625 \iff n > \frac{\ln 0{,}0625}{\ln 0{,}85} \approx 17{,}06$ (le sens change car $\ln 0{,}85 < 0$). Contrôle : $m(17) \approx 5{,}05$ et $m(18) \approx 4{,}29$. Le médicament n'agit plus au bout de 18 heures.

(c) La boucle continue tant que le seuil n'est pas atteint, donc tant que `m >= 5` : on écrit `while m >= 5:` et `m = m * 0.85`. La fonction renvoie 18.

(d) Avoir éliminé au moins 90 %, c'est qu'il reste au plus 10 % : $m(n) \leqslant 8 \iff 0{,}85^n \leqslant 0{,}1 \iff n \ln 0{,}85 \leqslant \ln 0{,}1 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \approx 14{,}17$ (le sens change car $\ln 0{,}85 < 0$). Contrôle : $m(14) \approx 8{,}22 > 8$ et $m(15) \approx 6{,}99 \leqslant 8$. L'organisme a éliminé au moins 90 % de la dose au bout de 15 heures.

Ex. 25 ★★☆ **Un placement à 2,5 %**

(a) Ajouter 2,5 %, c'est multiplier par $1 + 0{,}025 = 1{,}025$. La suite $(C(n))$ est géométrique de raison 1,025, donc $C(n) = 2\,000 \times 1{,}025^n$.

(b) On divise d'abord par 2 000 : $C(n) \geqslant 3\,000 \iff 1{,}025^n \geqslant 1{,}5 \iff n \geqslant \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}025} \approx 16{,}42$ (car $\ln 1{,}025 > 0$). Contrôle : $C(16) \approx 2\,969$ et $C(17) \approx 3\,043$. Le capital atteint 3 000 € au bout de 17 ans.

(c) Au départ, $C = 2000$, donc la condition `C > 3000` est fausse : la boucle ne tourne jamais et la fonction renvoie la valeur initiale 1. Première erreur : la condition de la boucle doit être la négation de ce qu'on cherche, soit `while C < 3000:`. Deuxième erreur : il faut partir de `n = 0`, sinon le résultat est décalé de 1. Le programme corrigé renvoie 17.

(d) On note t le taux sous forme décimale. Il faut $(1+t)^{20} = 2$, donc $20 \ln(1+t) = \ln 2$, soit $1 + t = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{20}}$ et $t = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{20}} - 1 \approx 0{,}0353$. Pour doubler un capital en 20 ans, il faut un taux d'environ 3,53 %.

Ex. 26 ★★★ **La demi-vie d'un isotope**

(a) Perdre 6 % revient à multiplier par $1 - 0{,}06 = 0{,}94$: $N(n+1) = 0{,}94\, N(n)$. $(N(n))$ est donc géométrique, de raison 0,94 et de premier terme 12, d'où $N(n) = 12 \times 0{,}94^n$.

(b) $N(n) \leqslant 6 \iff 0{,}94^n \leqslant 0{,}5$ (on divise par $12 > 0$) $\iff n \ln 0{,}94 \leqslant \ln 0{,}5$ (ln est strictement croissante) $\iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}94} \approx 11{,}20$: le sens change, car $\ln 0{,}94 < 0$. Contrôle : $N(11) \approx 6{,}076 > 6$ et $N(12) \approx 5{,}711 \leqslant 6$. La demi-vie est de 12 jours.

(c) Il a raison. $0{,}94^{24} = (0{,}94^{12})^2$. D'après la question précédente, $0 < 0{,}94^{12} \leqslant 0{,}5$. Comme la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient $0{,}94^{24} \leqslant 0{,}25$. En fait $0{,}94^{12} < 0{,}5$ strictement, donc $0{,}94^{24} < 0{,}25$: il reste moins du quart des noyaux (on trouve $0{,}94^{24} \approx 0{,}2265$).

(d) $N(n) \leqslant 0{,}12 \iff 0{,}94^n \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}94 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94} \approx 74{,}43$ (le sens change, car $\ln 0{,}94 < 0$). Contrôle : $0{,}94^{74} \approx 0{,}0103 > 0{,}01$ et $0{,}94^{75} \approx 0{,}0097 \leqslant 0{,}01$. Il faut au minimum 75 jours.

Ex. 26 **(suite)**

(e) On part de `n = 0` et `N = 12`. La boucle tourne tant que l'objectif $N \leqslant 12 \times \frac{p}{100}$ n'est pas atteint, donc sa condition est la négation de cet objectif.

```
def jours(p):
    n = 0
    N = 12
    while N > 12 * p / 100:
        N = N * 0.94
        n = n + 1
    return n
```

`jours(1)` renvoie 75, comme à la question précédente.

Ex. 27 ★★★ **Une suite qui approche 5**

(a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0{,}7\,u_n - 3{,}5 = 0{,}7\,(u_n - 5) = 0{,}7\,v_n$. Donc (v_n) est géométrique, de raison 0,7, avec $v_0 = 1 - 5 = -4$. Ainsi $v_n = -4 \times 0{,}7^n$ et $u_n = v_n + 5 = 5 - 4 \times 0{,}7^n$.

(b) $u_n \geqslant 4{,}99 \iff 4 \times 0{,}7^n \leqslant 0{,}01 \iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}0025 \iff n \ln 0{,}7 \leqslant \ln 0{,}0025$. L'erreur de Lina : $\ln 0{,}7 < 0$, donc le sens change quand on divise. On obtient $n \geqslant \frac{\ln 0{,}0025}{\ln 0{,}7} \approx 16{,}80$. Contrôle : $u_{16} \approx 4{,}9867 < 4{,}99$ et $u_{17} \approx 4{,}9907 \geqslant 4{,}99$. Le plus petit entier est 17.

(c) $u_n \geqslant 5 - \varepsilon \iff 0{,}7^n \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, avec $\frac{\varepsilon}{4} > 0$. Cela équivaut à $n \ln 0{,}7 \leqslant \ln \frac{\varepsilon}{4}$, soit $n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0{,}7}$ (car $\ln 0{,}7 < 0$). Cette borne est positive, car $\frac{\varepsilon}{4} < 1$. Le plus petit entier qui convient est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0{,}7}$.

(d) La borne passe de $\frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0{,}7}$ à $\frac{\ln(\varepsilon/40)}{\ln 0{,}7} = \frac{\ln(\varepsilon/4) - \ln 10}{\ln 0{,}7}$. Elle augmente donc de $\frac{-\ln 10}{\ln 0{,}7} = \frac{\ln 10}{\ln(10/7)} \approx 6{,}46$. Le rang augmente donc de 6 ou 7. Avec $\varepsilon = 0{,}001$: $\frac{\ln 0{,}00025}{\ln 0{,}7} \approx 23{,}25$, donc le rang est 24 (au lieu de 17, soit 7 de plus).

(e) La condition de la boucle est la négation de $u \geqslant 5 - e$: `while u < 5 - e:`. Le terme suivant se calcule par `u = 0.7 * u + 1.5`. `rang(0.01)` renvoie 17, ce qui confirme la question 2.

Ex. 28 ★★★ **Deux villes qui se croisent**

(a) Perdre 2 % revient à multiplier par $1 - 0{,}02 = 0{,}98$, et gagner 1,5 % revient à multiplier par $1 + 0{,}015 = 1{,}015$. Les deux suites sont géométriques : $A(n) = 25\,000 \times 0{,}98^n$ et $B(n) = 18\,000 \times 1{,}015^n$.

(b) $A(n) < 20\,000 \iff 0{,}98^n < 0{,}8 \iff n \ln 0{,}98 < \ln 0{,}8 \iff n > \frac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98} \approx 11{,}05$ (le sens change, car $\ln 0{,}98 < 0$). Contrôle : $A(11) \approx 20\,018 > 20\,000$ et $A(12) \approx 19\,618$.
Donc $n = 12$: la population de A passera sous 20 000 habitants en 2037.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Les deux membres sont strictement positifs. $B(n) > A(n) \iff \left(\frac{1{,}015}{0{,}98}\right)^n > \frac{25}{18}$ (on divise par $18\,000 \times 0{,}98^n > 0$). Comme ln est strictement croissante, cela équivaut à $n \ln \frac{1{,}015}{0{,}98} > \ln \frac{25}{18}$. Or $\frac{1{,}015}{0{,}98} > 1$, donc son ln est positif et le sens est conservé : $n > \frac{\ln(25/18)}{\ln(1{,}015/0{,}98)} \approx 9{,}36$. Contrôle : $B(9) \approx 20\,581 < A(9) \approx 20\,844$ et $B(10) \approx 20\,890 > A(10) \approx 20\,427$. B dépasse A en 2035.

(d) La boucle tourne tant que B ne dépasse pas A : `b <= a` est la négation de ce qu'on cherche, $B(n) > A(n)$. À chaque tour, les deux populations évoluent d'une année et n augmente de 1. La boucle s'arrête au premier n tel que $B(n) > A(n)$, donc `annee()` renvoie 10.

5. *Dérivée, variations, limites de ln et croissances comparées*

Ex. 29 ★☆☆ **Limites et croissances comparées**

(a) $\frac{4\ln x - 1}{x^2} = 4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln x}{x^2} \to 0$, et $\frac{1}{x^2} \to 0$. La limite vaut donc 0.

(b) Par croissance comparée, $x^2 \ln x \to 0$ en 0^+. De plus, $-3x + 1 \to 1$. La limite vaut donc 1.

(c) C'est une forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$, on factorise par x : $\frac{2x - \ln x}{x + 3} = \frac{x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{2 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln x}{x} \to 0$, et $\frac{3}{x} \to 0$. La limite vaut donc $\frac{2}{1} = 2$.

(d) Non. Ce n'est pas une forme indéterminée : $\ln x \to -\infty$ et $x^3 \to 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^3} = -\infty$.

(e) On pose $X = 3x$, qui tend vers 0. Alors $\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+X)}{X}$. Or $\frac{\ln(1+X)}{X} \to 1$, donc la limite vaut 3.

(f) Par croissance comparée, $\frac{\ln x}{x} \to 0$. De plus, $\frac{\ln x}{x} > 0$ pour $x > 1$. Par inverse, $\frac{x}{\ln x} \to +\infty$.

Ex. 30 ★☆☆ **Dériver avec ln, tangente en 1**

(a) $f'(x) = \frac{3}{x} - 2x$.

(b) On dérive un produit : $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

(c) Lina a pris $\frac{1}{\ln x}$ pour la dérivée de $\ln x$. Or $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $k'(x) = \frac{5}{x}$.

(d) On dérive un quotient : $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.

(e) $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$. La tangente a donc pour équation $y = 1 \times (x - 1) + 0$, soit $y = x - 1$.

Ex. 30 **(suite)**

(f) Domaine : $x > 0$. Comme exp est strictement croissante, $\ln x \geqslant 12 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{12}$.
Donc $S = [\mathrm{e}^{12} ; +\infty[$, avec $\mathrm{e}^{12} \approx 162\,755$. On voit que ln croît très lentement.

Ex. 31 ★★☆ **Variations et nombre de solutions**

(a) $f'(x) = 2x - \frac{18}{x} = \frac{2(x^2-9)}{x} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 3$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 3[$, $f'(3) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]3 ; +\infty[$.

(b) $\ln x \to -\infty$, donc $-18 \ln x \to +\infty$, et $x^2 \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

(c) Forme « $\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - 18 \frac{\ln x}{x^2}\right)$. Par croissance comparée, la parenthèse tend vers 1. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(d)

x	0		3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	$9 - 18\ln 3$	↗	$+\infty$

Le minimum vaut $f(3) = 9 - 18 \ln 3 \approx -10{,}775$.

(e) Sur $]0 ; 3]$, f est continue et strictement décroissante, de $+\infty$ à $f(3) < 0$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ y a une unique solution. Sur $[3 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, de $f(3) < 0$ à $+\infty$: une unique solution là aussi. L'équation admet donc exactement deux solutions.

Ex. 32 ★★☆ **La courbe de ln et sa tangente en e**

(a) $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a donc $y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$, soit $T : y = \frac{x}{\mathrm{e}}$.

(b) D'après la question 1, $d(x) = \frac{x}{\mathrm{e}} - \ln x$. Alors $d'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}\, x}$. Comme $\mathrm{e}\, x > 0$, $d'(x)$ a le signe de $x - \mathrm{e}$: $d'(x)$ est négative sur $]0 ; \mathrm{e}[$, nulle en e et positive sur $]\mathrm{e} ; +\infty[$.

(c) En 0^+ : $\frac{x}{\mathrm{e}} \to 0$ et $-\ln x \to +\infty$, donc $d(x) \to +\infty$. En $+\infty$: $d(x) = x\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{\ln x}{x}\right)$. Par croissance comparée, la parenthèse tend vers $\frac{1}{\mathrm{e}} > 0$. Par produit, $d(x) \to +\infty$.

(d)

x	0		e		$+\infty$
d'(x)		$-$	0	$+$	
d(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Le minimum vaut $d(\mathrm{e}) = 1 - 1 = 0$, donc $d(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi $\ln x \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$: la courbe $\mathcal{C}$ est sous T. Elles ne se touchent qu'au point d'abscisse e.

Ex. 33 ★★★ **Une étude complète avec fonction auxiliaire**

(a) g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$, car la dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$. Pour $x > 0$, $g'(x) > 0$: g est strictement croissante. De plus, $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$. Conclusion : $g(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

(b) En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $x \to 0^+$. Par quotient, $\frac{\ln x}{x} \to -\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée). Comme $x - 1 \to -1$, par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$: par croissance comparée, $\frac{\ln x}{x} \to 0$ et $x - 1 \to +\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(c) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$, et $f(1) = 0 - \frac{0}{1} = 0$.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = 0$.

(d) $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x}$. Comme $x > 0$, cet écart a le signe de $-\ln x$. Sur $]0 ; 1[$, $\ln x < 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de D. Sur $]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$: $\mathcal{C}$ est en dessous de D. Conclusion : $\mathcal{C}$ et D se coupent au point $(1 ; 0)$, et l'écart tend vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée.

(e) D'après la question 3, $f(x) \geqslant f(1) = 0$ pour tout $x > 0$, donc $x - 1 \geqslant \frac{\ln x}{x}$. On multiplie par $x > 0$: $x^2 - x \geqslant \ln x$. Conclusion : pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x^2 - x$.

Ex. 34 ★★★ **Le taux d'accroissement de ln en 1**

(a) Non. « $\frac{0}{0}$ » est une forme indéterminée. Comme $\ln 1 = 0$, $h(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1}$: c'est le taux d'accroissement de ln entre 1 et $1 + x$. Or ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ (la dérivée de ln est $\frac{1}{x}$, pas $\frac{1}{\ln x}$). Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, donc Noé a tort.

(b) Quand $x \to +\infty$, $X = 1 + x \to +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \to 0$ par croissance comparée. Par composition, $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \to 0$. De plus, $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \to 1$. Conclusion : par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

(c) $\varphi'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1 - (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$, donc φ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$. Or $\varphi(0) = 0 - \ln 1 = 0$. Conclusion : pour tout $x > 0$, $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$.

Ex. 34 (suite)

(d) Comme $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, on a $h'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$ et $\varphi(x) < 0$, on obtient $h'(x) < 0$. Conclusion : h est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

(e) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in]0\,;\frac{x}{2}[$, on a $h(t) > h(\frac{x}{2})$. Quand $t \to 0$, on obtient $1 \geqslant h(\frac{x}{2})$. Comme $h(x) < h(\frac{x}{2})$, on a $h(x) < 1$, d'où $\ln(1+x) < x$ en multipliant par $x > 0$. Avec $X = 1 + x > 1$, cela s'écrit $\ln X < X - 1$. La tangente en 1 a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$, soit $y = x - 1$. Conclusion : sur $]1\,;+\infty[$, la courbe de ln est strictement en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Ex. 35 ★★★ Redémontrer les croissances comparées

(a) La dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$, pas $\frac{1}{\ln x}$: $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.
Pour $x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $x - 2$.
Donc g est strictement décroissante sur $]0\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)		$\searrow$	$2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

Son minimum vaut $g(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2)$.
Comme $2 < \mathrm{e}$, $\ln 2 < 1$ par stricte croissance de ln, donc $g(2) > 0$. Conclusion : $g(x) \geqslant g(2) > 0$ pour tout $x > 0$.

(b) Pour $x > 1$, $\ln x > 0$ et, d'après la question 1, $2\ln x < x$.
Donc $0 < \ln x < \frac{x}{2}$. On divise par $x^2 > 0$: $0 < \frac{\ln x}{x^2} < \frac{1}{2x}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

(c) Pour $x > 1$, $\sqrt{x} > 0$, donc $g(\sqrt{x}) > 0$:
$\sqrt{x} > 2\ln\sqrt{x} = \ln x$. Comme $\ln x > 0$, on a $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ en $+\infty$. Conclusion : par les gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(d) Faux. On factorise par le terme dominant : $\ln x - x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$. La parenthèse tend vers $0 - 1 = -1$ (question 3) et $x \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x) = -\infty$. « Négligeable » porte sur le quotient $\frac{\ln x}{x}$, pas sur la différence.

(e) Quand $x \to 0^+$, $X = \frac{1}{x} \to +\infty$. On a $x = \frac{1}{X}$ et $\ln x = \ln\frac{1}{X} = -\ln X$, donc $x^2\ln x = -\frac{\ln X}{X^2}$. D'après la question 2, $\frac{\ln X}{X^2} \to 0$. Conclusion : par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$.

6. Fonctions ln(u)

Ex. 36 ★☆☆ Dériver ln(u) sans oublier u'

(a) $u(x) = 4x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 8x$, donc $f'(x) = \frac{8x}{4x^2+1}$.

(b) $u(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3 > 0$, $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$, donc $g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

(c) $k'(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$, donc $k'(2) = \frac{12+1}{8+2} = \frac{13}{10}$.

(d) Lina a oublié $u'(x) = 2x$ au numérateur : $\left(\ln(x^2+7)\right)' = \frac{2x}{x^2+7}$.

(e) Non. $u(x) = 5x$, $u'(x) = 5$, donc la dérivée vaut $\frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$, et pas $\frac{5}{x}$.

(f) Faux. La dérivée vaut $\frac{-4}{1-4x}$. Sur $]-\infty\,;\frac{1}{4}[$, $1 - 4x > 0$: la dérivée est donc strictement négative et la fonction est strictement décroissante, comme $u(x) = 1 - 4x$.

Ex. 37 ★☆☆ Où ln(u) est-elle définie ?

(a) On veut $2x - 6 > 0 \iff x > 3$.
Donc $D =]3\,;+\infty[$.

(b) On veut $9 - x^2 > 0 \iff x^2 < 9 \iff -3 < x < 3$.
Donc $D =]-3\,;3[$.

(c) $x + 3$ s'annule en -3 et $5 - x$ en 5 (valeur interdite). Le quotient est négatif sur $]-\infty\,;-3[$, nul en -3, positif sur $]-3\,;5[$ et négatif sur $]5\,;+\infty[$. Il faut un quotient strictement positif : -3 est exclu ($\ln 0$ n'existe pas), 5 aussi.
Donc $D =]-3\,;5[$.

(d) Non. Il faut $u(x) > 0$ strictement. Or $(x-3)^2 = 0$ pour $x = 3$, et $\ln 0$ n'existe pas.
Donc $D =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$.

(e) $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif, donc $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x.
Donc $D = \mathbb{R}$.

(f) Faux. Contre-exemple avec $x = 1$:
$\ln(1^2+4) = \ln 5 \neq 0$, alors que $(1^2+4)\times\ln 1 = 0$. On ne « sort » pas le ln d'une expression.

Ex. 38 ★☆☆ Limites de ln(u) par composition

(a) $x^2 + 1 \to +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc la limite vaut $+\infty$.

(b) $1 + \frac{1}{x} \to 1$ et $\ln 1 = 0$, donc la limite vaut 0.

(c) Quand $x \to 6^-$, $6 - x \to 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+} \ln X = -\infty$, donc la limite vaut $-\infty$.

(d) Faux. $\mathrm{e}^x + 5 \to 0 + 5 = 5$, pas 0.
Donc $\ln(\mathrm{e}^x + 5) \to \ln 5$.

Ex. 38 **(suite)**

(e) Hugo n'a regardé que le numérateur. $\frac{2x+1}{x+3} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} \to 2$, donc la limite vaut $\ln 2$.

Ex. 39 ★★☆ **Étude de $\ln(4x - x^2)$**

(a) On veut $4x - x^2 = x(4-x) > 0$. Ce trinôme a pour racines 0 et 4 et il est strictement positif entre ses racines.
Donc $D =]0\,;4[$.

(b) $u(x) = 4x - x^2$, $u'(x) = 4 - 2x$, donc $f'(x) = \frac{4-2x}{4x-x^2}$. Sur D, le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $4 - 2x$: $f'(x) > 0$ sur $]0\,;2[$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $]2\,;4[$.

(c) Quand $x \to 0^+$ ou $x \to 4^-$, $4x - x^2 \to 0^+$. Comme $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$.

(d)

x	0		2		4
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$2\ln 2$	↘	$-\infty$

f croît de $-\infty$ à $f(2) = \ln 4 = 2\ln 2$, puis décroît vers $-\infty$. Le maximum de f est $2\ln 2$, atteint en $x = 2$.

(e) Sur $D =]0\,;4[$, par stricte croissance de $\ln$: $f(x) = \ln 3 \iff 4x - x^2 = 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0$. Les deux valeurs 1 et 3 sont dans D. Donc $S = \{1\,;3\}$.

Ex. 40 ★★★ **Étude de $\ln((x-1)/(x+2))$**

(a) Il faut $\frac{x-1}{x+2} > 0$ (strictement) et $x \neq -2$. $x - 1$ s'annule en 1 et $x + 2$ en -2. Le quotient est positif sur $]-\infty\,;-2[$, négatif sur $]-2\,;1[$, nul en 1 et positif sur $]1\,;+\infty[$. Comme on exige > 0, on exclut $x = 1$: $D =]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$.

(b) Non. Pour $x = -3$, qui est dans D : $f(-3) = \ln\frac{-4}{-1} = \ln 4$, mais $\ln(-3-1) = \ln(-4)$ n'existe pas. L'égalité $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ exige $a > 0$ et $b > 0$. Elle n'est donc vraie que sur $]1\,;+\infty[$.

(c) On pose $u(x) = \frac{x-1}{x+2}$, avec $u > 0$ sur D. On a $u'(x) = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$.
Donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$. Sur D, $(x-1)(x+2)$ a le même signe que $\frac{x-1}{x+2}$, donc il est > 0 et $f'(x) > 0$. Conclusion : f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) En $\pm\infty$: $\frac{x-1}{x+2} \to 1$, donc $f(x) \to \ln 1 = 0$. En -2^- : $x - 1 \to -3$ et $x + 2 \to 0^-$, donc le quotient tend vers $+\infty$ et $f(x) \to +\infty$. En 1^+ : le quotient tend vers 0^+, donc $f(x) \to -\infty$. Conclusion : $\mathcal{C}$ a pour asymptotes verticales les droites $x = -2$ et $x = 1$, et pour asymptote horizontale la droite $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(e) Pour $x \in D$: $f(x) = 2\ln 2 \iff \ln\frac{x-1}{x+2} = \ln 4 \iff \frac{x-1}{x+2} = 4 \iff x - 1 = 4x + 8 \iff x = -3$. Comme $-3 < -2$, on a bien $-3 \in D$. Conclusion : $S = \{-3\}$. Avec la formule fausse de Yanis, on aurait perdu cette solution.

Ex. 41 ★★★ **$\ln(e^x + 1)$ et la droite $y = x$**

(a) Pour tout réel x, $e^x + 1 > 1 > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Lucas a tort : il oublie u' au numérateur. Avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$, on obtient $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. Conclusion : $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) En $-\infty$, $e^x \to 0$, donc $e^x + 1 \to 1$ et, par composition, $f(x) \to \ln 1 = 0$. Conclusion : l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

(c) Pour tout réel x, $e^x + 1 = e^x(1 + e^{-x})$, et les deux facteurs sont strictement positifs.
Donc $f(x) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

(d) En $+\infty$, $e^{-x} \to 0$, donc $\ln(1 + e^{-x}) \to \ln 1 = 0$. On en déduit que $f(x) - x \to 0$ et que $f(x) \to +\infty$. De plus, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$ avec $1 + e^{-x} > 1$, donc $f(x) - x > 0$. Conclusion : $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Δ sur $\mathbb{R}$, et l'écart entre les deux tend vers 0 en $+\infty$.

(e) D'après la question précédente, $f(x) \leqslant x + \ln 2 \iff \ln(1 + e^{-x}) \leqslant \ln 2 \iff 1 + e^{-x} \leqslant 2$, car $\ln$ est strictement croissante. Puis $\iff e^{-x} \leqslant 1 \iff -x \leqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Conclusion : $S = [0\,;+\infty[$.

Ex. 42 ★★★ **Une différence de logarithmes sous contrôle**

(a) Inès se trompe : $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, et non $3\ln x$.
Donc $\big(\ln(3x)\big)' = \frac{1}{x}$ (ou $\frac{u'}{u} = \frac{3}{3x}$), et non $\frac{3}{x}$.
Donc $f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)}$.

(b) Pour $x > 2$, on a $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $f'(x) = \frac{2}{x(x-2)} > 0$. Conclusion : f est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$.

Ex. 42 (suite)

(c) En 2^+, $x-2 \to 0^+$, donc $\ln(x-2) \to -\infty$. Par ailleurs, $\ln(3x) \to \ln 6$.
Donc $f(x) \to -\infty$. Conclusion : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

(d) Pour $x > 2$: $f(x) = \ln\frac{x-2}{3x} = \ln\left(\frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{2}{x}\right) - \ln 3$. En $+\infty$, $1-\frac{2}{x} \to 1$, donc $\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) \to 0$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 3$, et la droite $y = -\ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.

(e) Pour $x > 2$, on a $0 < 1-\frac{2}{x} < 1$, donc $\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) < 0$ et $f(x) < -\ln 3$. Or $-\ln 3 \approx -1{,}10 < -1$.
Donc $f(x) < -1$ pour tout $x > 2$. Conclusion : Zoé a tort, l'équation $f(x) = -1$ n'a aucune solution dans $]2\,;+\infty[$.

7. *Étudier une fonction avec ln : problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ Dériver et étudier un signe sans se tromper

(a) $f'(x) = 2 - \frac{5}{x} = \frac{2x-5}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2x-5$: $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\frac{5}{2}[$, $f'(\frac{5}{2}) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{5}{2}\,;+\infty[$.

(b) Lina a pris $\frac{1}{\ln x}$ pour la dérivée de $\ln x$. Or $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc la dérivée vaut $\frac{4}{x} + 1 = \frac{x+4}{x}$.

(c) Vrai. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$, du signe de $1-\ln x$. On a $1-\ln x > 0 \iff x < \mathrm{e}$, et f' ne s'annule qu'en e.
Donc f est strictement croissante sur $]0\,;\mathrm{e}]$.

(d) $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x+2 > 0$, donc $f'(x) = 0 \iff x = 2$ (-2 n'est pas dans le domaine).

(e) Faux. Avec $(u^2)' = 2u'u$, on trouve $2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x}$. Contre-exemple : en $x = 1$, la vraie dérivée vaut 0, alors que $\frac{2}{1} = 2$.

(f) On dérive $\ln u$ avec $u = x^2+4 > 0$: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
Donc $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} - 1$, et $f'(2) = \frac{4}{8} - 1 = -\frac{1}{2}$.

(g) $q'(x) = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$, donc $q'(\mathrm{e}) = 0$. Et $q(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2\mathrm{e} = -\mathrm{e}$. La tangente est horizontale : $y = -\mathrm{e}$.

Ex. 44 ★☆☆ Limites aux bornes : formes indéterminées

(a) Forme $\infty - \infty$. On factorise : $x - 1 - \ln x = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\frac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées) et $\frac{1}{x} \to 0$, la parenthèse tend vers 1. La limite vaut $+\infty$.

Ex. 44 (suite)

(b) Ce n'est pas une forme indéterminée : $x^2 \to 0$ et $-2\ln x \to +\infty$. La limite vaut $+\infty$.

(c) $x\ln x \to 0$ (croissances comparées) et $x \to 0$. La limite vaut 0.

(d) $\frac{\ln x+2}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$. Le premier terme tend vers 0 (croissances comparées), le second aussi. La limite vaut 0.

(e) Ce n'est pas une forme indéterminée : $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$, avec $\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$. La limite vaut $-\infty$.

(f) Forme $\infty - \infty$. On factorise : $\ln x(\ln x - 1)$, où les deux facteurs tendent vers $+\infty$. La limite vaut $+\infty$.

(g) $x^2\ln x = x \times (x\ln x)$, avec $x \to 0$ et $x\ln x \to 0$. La limite vaut 0.

Ex. 45 ★★☆ Une fonction auxiliaire pour le signe de *f'*

(a) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$. Comme $x > 0$ et $2x^2+1 > 0$, on a $g'(x) > 0$.
Donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

(b) $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$. Comme g est strictement croissante : $g(x) < 0$ sur $]0\,;1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

(c) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

(d) Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En 0^+ : $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x} \to -\infty$, donc $f(x) \to +\infty$. En $+\infty$: $\frac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées), donc $f(x) \to +\infty$. Et $f(1) = 2$.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Conclusion : f décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$, et son minimum vaut $f(1) = 2$.

(e) Le minimum de f est 2, donc $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $x - 1 \geqslant \frac{\ln x}{x}$. On multiplie par $x > 0$: $x^2 - x \geqslant \ln x$. Conclusion : $\ln x \leqslant x^2 - x$ pour tout $x > 0$.

Ex. 46 ★★☆ Le bénéfice d'un atelier de vélos

(a) $B'(x) = \frac{5}{x} - 1 = \frac{5-x}{x}$. Comme $x > 0$, $B'(x)$ a le signe de $5 - x$: positif sur $[1\,;5[$, nul en 5, négatif sur $]5\,;10]$. On a $B(1) = 0$, $B(5) = 5\ln 5 - 4$ et $B(10) = 5\ln 10 - 9$.

x	1		5		10
B'(x)		+	0	−	
B(x)	0	↗	$5\ln 5 - 4$	↘	$5\ln 10 - 9$

(b) Le maximum est atteint en $x = 5$, c'est-à-dire pour 500 vélos. Il vaut $B(5) = 5\ln 5 - 4 \approx 4{,}0472$ milliers d'euros, soit environ 4 047 €.

(c) Sur $[5\,;10]$, B est continue et strictement décroissante. De plus $B(5) \approx 4{,}05 > 3$ et $B(10) \approx 2{,}51 < 3$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $B(x) = 3$ a une unique solution α dans $[5\,;10]$. On calcule $B(8{,}9) \approx 3{,}030 > 3$ et $B(9) \approx 2{,}986 < 3$, donc $8{,}9 < \alpha < 9$.

(d) Au-delà de 500 vélos, le bénéfice diminue. Entre 500 et 890 vélos, il reste supérieur à 3 000 €. À partir de 900 vélos, il passe sous 3 000 €.

Ex. 47 ★★★ Un minimum atteint en α

(a) $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2(x^2+1)}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $x^2 + 1 > 0$, donc $g'(x) > 0$: g est strictement croissante. On a $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 1 + 2\ln 2 > 0$. Sur $[1\,;2]$, g est continue et strictement croissante. D'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]1\,;2[$. Sur $]0\,;1]$, $g(x) \leqslant g(1) < 0$, et sur $[2\,;+\infty[$, $g(x) \geqslant g(2) > 0$: il n'y a donc pas d'autre solution. Conclusion : α est l'unique solution sur $]0\,;+\infty[$.

(b) $g(1{,}48) \approx -0{,}026 < 0$ et $g(1{,}49) \approx 0{,}018 > 0$, donc $1{,}48 < \alpha < 1{,}49$. Comme g est strictement croissante et que $g(\alpha) = 0$: $g(x) < 0$ sur $]0\,;\alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

(c) En 0^+ : $1 - 2\ln x \to +\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc leur produit $\frac{1-2\ln x}{x} \to +\infty$. Comme $x \to 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{\ln x}{x}$, avec $\frac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées) et $\frac{1}{x} \to 0$. Comme $x \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ex. 47 (suite)

(d) $f'(x) = 1 + \frac{-\frac{2}{x^2}\times x - (1-2\ln x)\times 1}{x^2} = 1 + \frac{2\ln x - 3}{x^2} = \frac{x^2 - 3 + 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Conclusion : f décroît sur $]0\,;\alpha]$, croît sur $[\alpha\,;+\infty[$, et son minimum est $f(\alpha)$.

(e) $g(\alpha) = 0$ donne $2\ln\alpha = 3 - \alpha^2$.
Donc $f(\alpha) = \alpha + \frac{1-3+\alpha^2}{\alpha} = \alpha + \frac{\alpha^2-2}{\alpha} = \alpha + \alpha - \frac{2}{\alpha} = 2\alpha - \frac{2}{\alpha}$. La fonction $t \mapsto 2t - \frac{2}{t}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, comme somme de deux fonctions croissantes. Avec $1{,}48 < \alpha < 1{,}49$: $2 \times 1{,}48 - \frac{2}{1{,}48} \approx 1{,}609$ et $2 \times 1{,}49 - \frac{2}{1{,}49} \approx 1{,}638$.
Conclusion : $1{,}60 < f(\alpha) < 1{,}64$.

Ex. 48 ★★★ Nombre de solutions de f(x) = k

(a) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$, donc $4\left(\sqrt{x} \times \frac{1}{2}\ln x\right)^2 = 4 \times \frac{x(\ln x)^2}{4} = x(\ln x)^2$. On pose $X = \sqrt{x}$: quand $x \to 0^+$, $X \to 0^+$ et $X \ln X \to 0$ (croissances comparées).
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4 \times 0^2 = 0$. En $+\infty$: $x \to +\infty$ et $(\ln x)^2 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) $f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$. On a $\ln x > 0 \iff x > 1$ et $\ln x + 2 > 0 \iff x > \mathrm{e}^{-2}$.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
ln x		−		−	0	+	
ln x + 2		−	0	+		+	
f'(x)		+	0	−	0	+	

Avec $f(\mathrm{e}^{-2}) = \mathrm{e}^{-2} \times (-2)^2 = 4\mathrm{e}^{-2}$ et $f(1) = 0$:

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
f(x)	0	↗ $4\mathrm{e}^{-2}$	↘ 0	↗ $+\infty$

Conclusion : f admet un maximum local $4\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}54$ en e^{-2} et un minimum 0 en 1.

(c) La tangente au point d'abscisse a est parallèle à $y = 3x$ si et seulement si $f'(a) = 3$, c'est-à-dire $(\ln a)^2 + 2\ln a - 3 = 0$. On pose $X = \ln a$: $X^2 + 2X - 3 = 0$, $\Delta = 16$, donc $X = 1$ ou $X = -3$. On obtient $a = \mathrm{e}$ ou $a = \mathrm{e}^{-3}$. Comme $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, la tangente en e est $y = 3(x - \mathrm{e}) + \mathrm{e}$, soit $y = 3x - 2\mathrm{e}$. Comme $f(\mathrm{e}^{-3}) = 9\mathrm{e}^{-3}$, la tangente en e^{-3} est $y = 3(x - \mathrm{e}^{-3}) + 9\mathrm{e}^{-3}$, soit $y = 3x + 6\mathrm{e}^{-3}$.

Ex. 48 **(suite)**

(d) Pour $x \neq 1$, $f(x) > 0$, et $f(1) = 0$. On applique le corollaire du TVI sur chaque intervalle où f est continue et strictement monotone. Sur $]0\,;\mathrm{e}^{-2}]$, f croît de 0 (non atteint) à $4\mathrm{e}^{-2}$. Sur $[\mathrm{e}^{-2}\,;1]$, f décroît de $4\mathrm{e}^{-2}$ à 0. Sur $[1\,;+\infty[$, f croît de 0 à $+\infty$. Conclusion : si $k<0$, aucune solution ; si $k=0$, une seule ($x=1$) ; si $0<k<4\mathrm{e}^{-2}$, trois solutions ; si $k=4\mathrm{e}^{-2}$, deux solutions (e^{-2} et une solution dans $]1\,;+\infty[$) ; si $k>4\mathrm{e}^{-2}$, une seule solution.

Ex. 49 ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de gourdes**

(a) $C_M(x) = \frac{x^3-2x\ln x+3x}{x} = x^2 - 2\ln x + 3$. $C_M'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Sur $[0{,}5\,;10]$, $x>0$ et $x+1>0$, donc $C_M'(x)$ a le signe de $x-1$. On a $C_M(0{,}5) = \frac{13}{4} + 2\ln 2 \approx 4{,}64$, $C_M(1) = 4$ et $C_M(10) = 103 - 2\ln 10 \approx 98{,}39$.

x	0,5		1		10
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	$\frac{13}{4}+2\ln 2$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$103-2\ln 10$

Conclusion : C_M décroît sur $[0{,}5\,;1]$ et croît sur $[1\,;10]$.

(b) D'après le tableau, C_M atteint son minimum en $x=1$, avec $C_M(1)=4$. Conclusion : le coût moyen est minimal pour 1 000 gourdes par mois. Il vaut alors 4 € par gourde, soit un coût total de 4 000 €.

(c) $C'(x) = 3x^2 - \left(2\ln x + 2x\times\frac{1}{x}\right) + 3 = 3x^2 - 2\ln x + 1 = h(x)$. Puis $h'(x) = 6x - \frac{2}{x} = \frac{2(3x^2-1)}{x}$. Comme $x>0$, $h'(x)$ a le signe de $3x^2-1$, qui s'annule en $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, dans $[0{,}5\,;10]$.
Donc h décroît sur $\left[0{,}5\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,;10\right]$. Son minimum est $h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - 2\ln\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 2 + \ln 3 > 0$. Donc $C'(x)>0$ sur $[0{,}5\,;10]$: C est strictement croissante. Conclusion : plus l'atelier produit, plus le coût total augmente.

(d) Sur $[0{,}5\,;10]$: $C'(x) = C_M(x) \iff 3x^2 - 2\ln x + 1 = x^2 - 2\ln x + 3 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$, car $x>0$. $S=\{1\}$. Conclusion : le coût marginal est égal au coût moyen exactement pour la production qui rend le coût moyen minimal, soit 1 000 gourdes.

(e) $C'(x) - C_M(x) = 2x^2 - 2 = 2(x-1)(x+1)$. Pour $x>1$, cette différence est strictement positive, donc $C'(x) > C_M(x)$. Par exemple, $C'(2) = 13 - 2\ln 2 \approx 11{,}61$ et $C_M(2) = 7 - 2\ln 2 \approx 5{,}61$. Conclusion : Ben a tort. Au-delà de 1 000 gourdes, c'est le coût marginal qui dépasse le coût moyen.