42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *ln, réciproque de exp : passer de l'un à l'autre*

À retenir : Si $k > 0$: $e^A = k \iff A = \ln k$; si $k \leqslant 0$, pas de solution. $\ln A = k \iff A = e^k$: $\ln x = 3$ donne $x = e^3$, pas $3e$. $\ln x$ n'existe que si $x > 0$; $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : simplifier exp et ln** — Donne la valeur exacte de chaque nombre, ou explique pourquoi il n'existe pas.

(a) $\ln\left(e^7\right)$ (b) $e^{\ln 11}$ (c) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

(d) $\ln\left(e^{-3,5}\right)$ (e) $e^{\ln 0,4}$ (f) $\ln 1 + \ln e$

(g) $e^{\ln(-7)}$

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : passer de exp à ln** — Résous chaque équation dans $\mathbb{R}$ et donne la valeur exacte des solutions.

(a) $e^x = 13$ (b) $e^x + 6 = 0$ (c) $\ln x = 4$

(d) $\ln x = -2$ (e) $e^{2x} = 7$ (f) $\ln(x-1) = 0$

Ex. 3 ★☆☆ **Existence et signe de ln** — Sans calculatrice, dis si le nombre existe. S'il existe, donne son signe en justifiant.

(a) $\ln 0,8$, comparé à 0 (b) $\ln 14$

(c) $\ln(-5)$ (d) $\ln 0$

(e) $\ln 1$ (f) $\ln\left(e^{-0,2}\right)$

(g) $\ln(\pi - 3)$

Ex. 4 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — Inès a résolu quatre équations. Pour chacune, donne les valeurs exactes, puis les arrondis à 0,01.

(a) Pour $\ln x = 2$, Inès écrit $x = 2e$. A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

(b) Pour $e^x = -3$, Inès écrit $x = \ln(-3)$. A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

(c) Pour $e^{3x-1} = 8$, Inès donne $x = 1,03$ comme valeur exacte. A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

(d) Pour $\ln(2x-5) = 0$, Inès trouve $x = \dfrac{5}{2}$. A-t-elle raison ? Justifie, puis corrige.

Ex. 5 ★★☆ **Deux courbes symétriques** — Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe de exp et Γ celle de ln. Elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis à 0,01.

(a) Le point $A\left(3\,;e^3\right)$ est sur $\mathcal{C}$. Donne son symétrique sur Γ et l'égalité qu'il traduit.

Ex. 5 (suite)

(b) Détermine l'abscisse du point de Γ dont l'ordonnée est $-1,5$.

(c) Donne l'ordonnée du point de Γ d'abscisse 0,6, puis le point de $\mathcal{C}$ qui lui correspond.

(d) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;1)$. Déduis-en où Γ coupe l'axe des abscisses.

Ex. 6 ★★★ **Un médicament dans le sang** — On injecte un médicament à un patient. La concentration du médicament dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 8e^{-0,25t}$, où t est le temps en heures et $t \geqslant 0$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis à 0,001 près.

(a) Calcule $C(0)$, puis donne la valeur exacte de $C(2)$ et son arrondi.

(b) Résous l'équation $C(t) = \dfrac{8}{e}$ sans calculatrice.

(c) Résous l'équation $C(t) = 2$. Justifie sans calculatrice que la solution est positive, puis convertis-la en heures et minutes.

(d) Sami affirme : « Au bout d'un temps assez long, le médicament aura complètement disparu : $C(t) = 0$. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Le médicament est efficace tant que $C(t) \geqslant 1$. Résous cette inéquation sur $[0\,;+\infty[$, puis conclus en heures et minutes.

Ex. 7 ★★★ **Une fonction qui prend toutes les valeurs** — On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 + \ln(x-1)$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis à 0,001 près si besoin.

(a) Calcule $f(1+e)$, puis donne la valeur exacte de $f(1,5)$ et son arrondi.

(b) Résous l'équation $f(x) = 0$ en rédigeant.

(c) Résous l'inéquation $f(x) \leqslant 3$ sur $]1\,;+\infty[$.

(d) Soit y un réel. Montre que l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans $]1\,;+\infty[$, et exprime-la en fonction de y.

(e) Léo écrit : « Pour tout réel x, $e^{f(x)-3} = x - 1$. » A-t-il raison ? Justifie, puis corrige son affirmation.

2. Propriétés algébriques : transformer une écriture

À retenir : Pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$. Aucune formule pour $\ln(a+b)$; $(\ln a)^2 \neq \ln(a^2)$. Exemple : $\ln 40 = 3 \ln 2 + \ln 5$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : développer en fonction de ln 2 et ln 3** — Exprime chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$. Commence par décomposer en facteurs premiers.

(a) $\ln 72$ (b) $\ln \frac{1}{54}$ (c) $\ln \sqrt{24}$

(d) $\ln \frac{16}{27}$ (e) $\ln 0{,}375$ (f) $\ln 96$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : simplifier en mêlant ln et exp** — Donne la valeur exacte la plus simple de chaque nombre.

(a) $e^{2 \ln 3}$ (b) $e^{-\ln 4}$ (c) $\ln(e^3 \times e^{-5})$

(d) $\ln \frac{1}{e^4}$ (e) $e^{\ln 6 - \ln 2}$ (f) $\ln(5e^2) - \ln 5$

Ex. 10 ★☆☆ **Regrouper en un seul logarithme** — Écris chaque nombre sous la forme $\ln A$, avec A un réel strictement positif le plus simple possible (A peut contenir e).

(a) $2 \ln 5 + \ln 3$ (b) $2 \ln 6 - \ln 4$

(c) $3 \ln 2 + 1$ (d) $\ln 20 - 2$

(e) $\frac{1}{2} \ln 49 + \ln 2$ (f) $\ln 10 - \ln 2 - \ln 15$

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les propriétés de ln** — Vrai ou faux ? Justifie : une preuve si c'est vrai, un contre-exemple si c'est faux.

(a) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.

(b) $\ln \sqrt{e^6} = 3$.

(c) Pour tout réel $a > 0$, $(\ln a)^2 = \ln(a^2)$.

(d) $\ln((-2) \times (-5)) = \ln(-2) + \ln(-5)$.

(e) Pour tout réel $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2 \ln x$.

Ex. 12 ★★☆ **Les erreurs de Lina** — Chaque égalité écrite par Lina contient une erreur. Repère-la, puis écris le calcul correct.

(a) Lina écrit : $\ln 80 - 4 \ln 2 = \ln 80 - \ln 8 = \ln 10$.

(b) Lina écrit : $\ln(e^2 + e^2) = 2 + 2 = 4$.

(c) Lina écrit : $\frac{\ln 81}{\ln 3} = \ln \frac{81}{3} = \ln 27$.

(d) Lina écrit : $\ln \frac{1}{125} = \frac{1}{\ln 125}$.

Ex. 13 ★★★ **Deux écritures qui ne coïncident pas** — On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$ et $g(x) = \ln x + \ln(x+4)$.

(a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f, puis l'ensemble de définition D_g de g.

(b) Inès affirme : « f et g sont la même fonction, car $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

(c) Pour $x < -4$, écris $f(x)$ comme une somme de deux logarithmes. Justifie que ton écriture a un sens.

(d) Résous dans D_f l'équation $f(x) = \ln 12$, puis dans D_g l'équation $g(x) = \ln 12$. Explique pourquoi les solutions ne sont pas les mêmes.

(e) Résous l'équation $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$. Commence par dire pour quels réels x elle a un sens.

Ex. 14 ★★★ **Décibels et aspirateurs** — Le niveau sonore L (en décibels, dB) d'un son d'intensité I (en W/m²) vaut $L = 10 \times \frac{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\ln 10}$, avec $I_0 = 10^{-12}$. Donne d'abord la valeur exacte, puis l'arrondi au centième si besoin.

(a) Mattéo simplifie $\frac{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\ln 10}$ en $\ln\left(\frac{I}{10I_0}\right)$. A-t-il raison ? Justifie en prenant $I = 100 I_0$.

(b) Un aspirateur produit un son d'intensité $I = 10^{-5}$ W/m². Calcule son niveau sonore.

(c) On double l'intensité d'un son. Montre que son niveau sonore augmente de $\frac{10 \ln 2}{\ln 10}$ dB, puis arrondis cette hausse.

(d) n aspirateurs identiques fonctionnent ensemble : l'intensité vaut $n \times 10^{-5}$ W/m². Exprime le niveau sonore L_n en fonction de $\ln n$ et $\ln 10$.

(e) Le seuil de danger est de 85 dB. Écris la condition $L_n \geqslant 85$ sous la forme $\ln n \geqslant \ln A$, avec A contenant une racine carrée, puis trouve le nombre minimal d'aspirateurs.

3. Équations avec ln et exp

À retenir : Conditions d'abord : ce qui est sous un ln doit être > 0. $\ln A = \ln B \iff A = B$; $e^A = k \iff A = \ln k$ si $k > 0$ (sinon, par exemple $e^x = -2$: $\mathcal{S} = \varnothing$). À la fin, on trie les solutions trouvées.

Ex. 15 ★☆☆ **Passer de l'exponentielle au logarithme** — Résous chaque équation. Donne la valeur exacte, puis un arrondi à 10^{-2} lorsque c'est utile.

(a) $e^{3x+1} = 4$

(b) $5e^x = 35$

(c) $e^x = 0$

(d) $\ln x = -2$

(e) $\ln x = \frac{3}{2}$
(écris la solution à l'aide d'une racine carrée)

Ex. 15 **(suite)**

(f) $e^{1-x} = e^4$

Ex. 16 ★☆☆ **Conditions d'abord, puis on résout** — Résous chaque équation ou inéquation : écris d'abord les conditions d'existence, puis l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions en valeurs exactes.

(a) $\ln(2x) = \ln(x+5)$

(b) $\ln(x-3) = \ln(2x-1)$

(c) $\ln x < -1$

(d) $\ln(x+2) \leqslant 1$

(e) $e^x > 6$

(f) $e^{2x+3} \leqslant 1$

Ex. 17 ★★☆ **L'erreur d'Inès** — Inès résout $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 5$. Elle écrit : « $\ln\big((x-2)(x+2)\big) = \ln 5$, donc $x^2 - 4 = 5$, donc $x = 3$ ou $x = -3$: $\mathcal{S} = \{-3\,;3\}$. »

(a) Détermine l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation d'Inès a un sens.

(b) Inès a-t-elle raison ? Justifie, puis donne l'ensemble des solutions.

(c) Résous l'inéquation $\ln(x-2) + \ln(x+2) < \ln 5$.

(d) Résous de même l'équation $\ln(x+1) - \ln x = \ln 3$.

Ex. 18 ★★☆ **Un second degré caché** — Résous en posant $X = e^x$ ou $X = \ln x$. Donne les valeurs exactes, puis des arrondis à 10^{-2}.

(a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$.

(b) Résous sur $]0\,;+\infty[$ l'équation $2(\ln x)^2 + \ln x - 3 = 0$.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$.

Ex. 19 ★★☆ **Un antibiotique dans le sang** — Après une injection, la concentration d'un antibiotique dans le sang de Malo est modélisée par $C(t) = 8e^{-0{,}25t}$, en mg/L, où t est le temps en heures ($t \geqslant 0$). Donne les valeurs exactes, puis des arrondis à 10^{-2}.

(a) Calcule $C(0)$ puis $C(2)$.

(b) Détermine par le calcul l'instant où la concentration vaut 2 mg/L.

(c) Résous l'inéquation $C(t) \geqslant 1$ sur $[0\,;+\infty[$, puis interprète le résultat.

(d) La demi-vie est la durée au bout de laquelle la concentration initiale est divisée par 2. Calcule-la.

Ex. 20 ★★★ **Un second degré en ln x, jusqu'au bout** — Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2$. Donne tous les résultats en valeurs exactes.

(a) Résous dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ en posant $X = \ln x$.

(b) Résous dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(x) < 0$.

(c) Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

(d) Détermine les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, puis dresse le tableau de variations de f avec la valeur exacte du minimum.

Ex. 20 **(suite)**

(e) Lina affirme : « L'équation $f(x) = -3$ a au moins une solution, puisque $\ln x$ prend toutes les valeurs réelles. » A-t-elle raison ? Justifie de deux façons.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries** — Dans un laboratoire de Rennes, Kenza suit deux cultures de bactéries. t heures après le début de l'expérience, leurs effectifs sont modélisés par $N_1(t) = 200e^{0{,}3t}$ et $N_2(t) = 1\,800e^{0{,}1t}$, pour $t \geqslant 0$. Donne les valeurs exactes, puis des arrondis au centième.

(a) Détermine le réel $\tau > 0$ tel que $N_1(t+\tau) = 2N_1(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. Interprète τ.

(b) Marius cherche à quel instant la culture 1 comptera 0 bactérie : il résout $N_1(t) = 0$. Que peut-on conclure ? Justifie.

(c) Résous l'équation $N_1(t) = N_2(t)$. Combien de bactéries chaque culture compte-t-elle à cet instant ?

(d) Résous l'inéquation $N_1(t) \geqslant 3N_2(t)$ et interprète le résultat.

(e) Qu'affiche ce programme ? Justifie par le calcul et interprète.

```
import math
t = 0
while 200 * math.exp(0.3 * t) < 50000:
    t = t + 1
print(t)
```

4. *Inéquations avec ln et exp*

À retenir : ln et exp sont strictement croissantes : appliquer l'une ou l'autre conserve le sens de l'inégalité. Diviser par un négatif ($\ln 0{,}9 < 0$) le change. On croise toujours avec les conditions : $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : inéquations avec l'exponentielle** — Résous dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation. Donne $\mathcal{S}$ sous forme d'intervalle avec des valeurs exactes.

(a) $e^x > 5$

(b) $e^{2x+1} \leqslant 1$

(c) $e^{-0{,}25x} \geqslant 0{,}4$
(donne aussi l'arrondi au centième de la borne)

(d) $e^x < -3$

(e) $2e^x - 18 > 0$
(écris la borne en fonction de $\ln 3$)

(f) $e^{-x} \leqslant 8$
(écris la borne en fonction de $\ln 2$)

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : inéquations avec le logarithme** — Pour chaque inéquation, écris la condition d'existence, puis donne $\mathcal{S}$ sous forme d'intervalle avec des valeurs exactes.

(a) $\ln x \geqslant 2$ (b) $\ln x \leqslant -1$ (c) $\ln(x+3) > 0$

(d) $\ln(2x) < 1$ (e) $\dfrac{\ln(5-x)}{\ln 2} \geqslant$ (f) $2\ln x - 3 > 0$

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inéquations** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) Pour tout réel $x > 0$, on a $e^x > e^{-x}$.

(b) L'ensemble des solutions de $-4\ln x > 2$ est $\left]e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$.

(c) L'ensemble des solutions de $\ln(3-x) < 0$ est $]2\,;+\infty[$.

(d) Les inéquations $\ln x \leqslant \ln 4$ et $x \leqslant 4$ ont les mêmes solutions.

(e) $e^{-0{,}2x} < 0{,}5 \iff x > 5\ln 2$.

Ex. 25 ★★☆ **Repère l'erreur et corrige** — Chaque élève a fait une erreur. Repère-la, puis écris la bonne résolution. Arrondis au centième si besoin.

(a) Noé cherche le plus petit entier n tel que $0{,}85^n < 0{,}1$. Il écrit : $n\ln 0{,}85 < \ln 0{,}1$, donc $n < \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85}$, donc $n \leqslant 14$.

(b) Inès écrit : « $\ln x < 0 \iff x < 1$, donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;1[$ ».

(c) Malo résout $\ln(x-2) \leqslant \ln(10-x)$ ainsi : « $x - 2 \leqslant 10 - x$, donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;6]$ ».

(d) Zoé écrit : « $e^x \geqslant -2$ n'a pas de solution, car $\ln(-2)$ n'existe pas ».

Ex. 26 ★★☆ **Résoudre en rédigeant** — Résous chaque inéquation en rédigeant : conditions d'existence, équivalences justifiées, ensemble $\mathcal{S}$ et phrase de conclusion.

(a) $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+4)$

(b) $\ln x + \ln(x-3) < \ln 10$

(c) $e^{2x} - 5e^x + 4 \geqslant 0$. Pose $X = e^x$.

Ex. 27 ★★★ **Signe d'un produit et second degré caché** — Pour $x > 0$, on pose $A(x) = (\ln x + 2)(x - 4)$ et $B(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$. Donne chaque ensemble de solutions sous forme d'intervalle, avec des valeurs exactes.

(a) Résous dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $\ln x + 2 < 0$, puis l'inéquation $\ln x + 2 > 0$.

(b) Étudie le signe de $A(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ (tableau de signes), puis résous $A(x) \leqslant 0$.

(c) Pose $X = \ln x$ et résous l'inéquation $B(x) < 0$.

(d) Déduis-en l'ensemble des réels $x > 0$ qui vérifient à la fois $A(x) \leqslant 0$ et $B(x) < 0$. Justifie le choix des crochets.

(e) Lina affirme : « $B(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant e$ ». A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Médicament : durée d'efficacité et seuil** — Clara reçoit une injection. t heures après, la concentration du médicament dans son sang est $C(t) = 15e^{-0{,}4t}$ (en mg/L), avec $t \geqslant 0$. Le médicament est efficace tant que $C(t) \geqslant 3$. Donne la valeur exacte, puis arrondis au centième sauf indication contraire.

(a) Résous $C(t) \geqslant 3$ sur $[0\,;+\infty[$. Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ? Arrondis à la minute.

(b) Ben affirme : « Toutes les deux heures, la concentration est divisée par plus de 2. » A-t-il raison ? Justifie.

(c) Hugo prend un comprimé de 40 mg. Chaque heure, la quantité restante baisse de 12 % : après n heures, il reste $40 \times 0{,}88^n$ mg. Trouve par le calcul le plus petit entier n tel que $40 \times 0{,}88^n < 2$.

(d) Complète la condition du programme pour qu'il renvoie le seuil de la question précédente :

```
def seuil():
    q = 40
    n = 0
    while ........:
        q = q * 0.88
        n = n + 1
    return n
```

5. *Seuils : $\ln(q^n) = n\ln q$*

À retenir : $q^n \geqslant s \iff n\ln q \geqslant \ln s$. Si $q > 1$, le sens est conservé. Si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et le sens change : $0{,}9^n \leqslant 0{,}5 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$. Tu prends l'entier supérieur, puis tu contrôles avec $n-1$ et n.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : puissances et logarithme** — Réponds en une ligne, sans calculatrice.

(a) Écris $\ln\left(3^7\right)$ en fonction de $\ln 3$.

(b) Écris 2^{10} sous la forme e^a, avec a exprimé à l'aide de $\ln 2$.

(c) Exprime $\ln\left(0{,}5^6\right)$ en fonction de $\ln 2$.

(d) Donne le signe de $\ln 0{,}93$. Justifie en une phrase.

(e) Donne le signe de $\ln 1{,}07$. Justifie en une phrase.

(f) Pour tout entier $n \geqslant 1$, simplifie $\ln\left(1{,}2^n\right) - \ln\left(1{,}2^{n-1}\right)$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : seuils en une étape** — Pour chaque question, détermine le plus petit entier naturel n qui convient, sauf indication contraire. Donne la valeur exacte du seuil, puis un arrondi au centième.

(a) $3^n \geqslant 500$.

(b) $0{,}7^n \leqslant 0{,}1$.

(c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{0{,}4x} = 9$. Donne la valeur exacte en fonction de $\ln 3$, puis un arrondi au centième.

(d) $5 \times 1{,}3^n \geqslant 200$.

Ex. 30 **(suite)**

(e) Une grandeur augmente de 5 % par an. Donne q, puis le nombre d'années nécessaire pour qu'elle double.

Ex. 31 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur** — Pour résoudre $0{,}85^n \leqslant 0{,}2$ avec n entier naturel, Léa écrit :
(1) $\ln(0{,}85^n) \leqslant \ln 0{,}2$; (2) $n \ln 0{,}85 \leqslant \ln 0{,}2$;
(3) $n \leqslant \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}90$; (4) donc $n = 9$.
Arrondis les puissances au millième.

(a) Quelle est la première étape fausse ? Explique pourquoi.

(b) Corrige la résolution et donne le plus petit entier n qui convient.

(c) Contrôle ton résultat : calcule $0{,}85^n$ pour les deux rangs qui encadrent le seuil.

(d) Hugo résout $1{,}06^n \geqslant 3$. Il trouve $n \geqslant 18{,}85$ et conclut « $n = 18$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 32 ★★☆ **Placement : calcul et programme Python** — Le 1er janvier 2025, Inès place 3 000 € à 2,5 % d'intérêts composés par an. On note c_n le capital au bout de n années. Ben propose ce programme :

```
def annee():
    c = 3000
    n = 0
    while c < 4500:
        c = c * 1.025
        n = n + 1
    return 2025 + n
```

(a) Exprime c_n en fonction de n.

(b) Explique pourquoi la boucle utilise la condition `c < 4500`, alors qu'on cherche $c_n \geqslant 4\,500$.

(c) Détermine par le calcul l'année à partir de laquelle le capital atteint 4 500 €. Contrôle avec deux rangs.

(d) Quelle valeur l'appel `annee()` renvoie-t-il ? Compare-la avec ton calcul.

(e) Ben avait d'abord écrit `while c >= 4500:`. Quelle valeur l'appel `annee()` aurait-il renvoyée ? Explique.

Ex. 33 ★★☆ **Médicament et demi-vie** — La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, est $C(t) = 12\,e^{-0{,}15t}$, où t est le temps en heures depuis l'injection ($t \geqslant 0$). Donne la valeur exacte avant l'arrondi.

(a) Calcule la concentration au moment de l'injection.

(b) La demi-vie T du médicament est le réel tel que $C(T) = \dfrac{C(0)}{2}$. Détermine T, arrondi à la minute.

(c) Résous $C(t) < 1$. Donne le résultat arrondi au dixième d'heure.

(d) Au bout de k demi-vies, la concentration vaut $C(0) \times 0{,}5^k$. Combien de demi-vies faut-il pour qu'elle soit inférieure ou égale à 5 % de $C(0)$?

Ex. 34 ★★★ **Deux villes voisines : rattrapage et programme** — En 2024, Saint-Aubin compte 42 000 habitants et sa population augmente de 1,8 % par an. Sa voisine Valmont compte 65 000 habitants et sa population diminue de 1,2 % par an. On note a_n et b_n leurs populations en l'année $2024 + n$. Donne les valeurs exactes, puis des arrondis à 10^{-2}.

(a) Exprime a_n et b_n en fonction de n.

(b) Détermine l'année à partir de laquelle la population de Valmont devient strictement inférieure à 50 000 habitants.

(c) Montre que $a_n \geqslant b_n \iff \left(\dfrac{1{,}018}{0{,}988}\right)^n \geqslant \dfrac{65}{42}$. Déduis-en l'année à partir de laquelle Saint-Aubin est au moins aussi peuplée que Valmont.

(d) Ben écrit ce programme pour vérifier. Complète la ligne `while`, puis donne ce que renvoie `annee()` et compare avec la question précédente.

```
def annee():
    a = 42000
    b = 65000
    n = 2024
    while ........ :
        a = a * 1.018
        b = b * 0.988
        n = n + 1
    return n
```

(e) Lucas affirme que si Valmont avait compté 650 000 habitants en 2024 (avec la même évolution), Saint-Aubin ne l'aurait jamais rattrapée. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 35 ★★★ **Iode 131 : de la demi-vie au seuil** — On utilise de l'iode 131 en médecine nucléaire. Au bout de t jours, la masse d'iode restante dans un échantillon est, en mg, $m(t) = 40\,e^{-\lambda t}$, où λ est un réel strictement positif. On sait que $m(8) = 20$. Donne les valeurs exactes, puis des arrondis à 10^{-2} sauf indication contraire.

(a) Détermine la valeur exacte de λ, puis son arrondi à 10^{-4}.

(b) Montre que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $m(t+8) = \dfrac{m(t)}{2}$. Interprète ce résultat.

(c) Une mesure donne une masse restante de 2,5 mg. Depuis combien de jours l'échantillon a-t-il été préparé ? Résous l'équation, puis retrouve le résultat avec la question précédente.

(d) Zoé affirme que le premier nombre entier de jours au bout duquel la masse initiale est divisée par au moins 1 000 est 80. Est-ce exact ? Justifie.

6. *Dérivée, limites, variations : étudier une fonction avec ln*

À retenir : Commence par l'ensemble de définition : ce qui est sous le ln doit être strictement positif. Ensuite, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (exemple : $(\ln(3x+1))' = \frac{3}{3x+1}$), et tu mets tout au même dénominateur. N'écris jamais « $\ln 0$ » : on écrit $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : domaines et dérivées** — Pour chaque fonction, donne l'ensemble de définition, puis la dérivée, écrite en un seul quotient si besoin.

(a) $f(x) = 3\ln x - 2x + 1$ (b) $f(x) = x\ln x$

(c) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ (d) $f(x) = \ln(5x-2)$

(e) $f(x) = \ln(x^2+4)$ (f) $f(x) = x + \ln(7-x)$

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : limites sans calcul** — Détermine chaque limite. Cite les limites de référence que tu utilises.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 2\ln x)$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5 - x - \ln x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (4 - 3\ln x)$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}^+} \ln(4x-3)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

Ex. 38 ★★☆ **Un maximum en e** — Soit f la fonction définie sur $[1\,;10]$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Si besoin, arrondis à 10^{-3}.

(a) Montre que pour tout $x \in [1\,;10]$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

(b) Résous l'inéquation $1 - \ln x > 0$ sur $[1\,;10]$, en rédigeant.

(c) Dresse le tableau de variations de f sur $[1\,;10]$, avec les valeurs exactes.

(d) Déduis-en que pour tout $x \in [1\,;10]$, $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$.

Ex. 39 ★★☆ **Coût moyen minimal dans un atelier** — Un atelier de céramique de Rodez fabrique x centaines de bols par mois, avec $x \in [0{,}5\,;10]$. Le coût moyen d'un bol, en euros, est $C_M(x) = 2x - 6\ln x + 10$. Arrondis les montants au centime.

(a) Calcule $C_M'(x)$ et écris-la sous la forme d'un seul quotient.

(b) Étudie le signe de $C_M'(x)$ sur $[0{,}5\,;10]$.

(c) Dresse le tableau de variations de C_M, avec les valeurs exactes aux bornes et à l'extremum.

(d) Combien de bols l'atelier doit-il fabriquer pour que le coût moyen soit minimal ? Donne ce coût minimal, en valeur exacte puis arrondi.

Ex. 40 ★★☆ **La copie de Malo : courbe et tangente** — Malo étudie $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Sa copie : « $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x-1$. $\ln 0 = -\infty$ donc $g(0) = +\infty$. g est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc $g(x) \geqslant g(1) = 0$, d'où $\ln x \geqslant x - 1$. »

(a) Malo écrit « $\ln 0 = -\infty$ donc $g(0) = +\infty$ ». Corrige cette ligne en rédigeant la limite de g en 0^+.

(b) La conclusion « $\ln x \geqslant x - 1$ » est-elle juste ? Justifie, puis corrige-la.

(c) Donne l'équation de la tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1. Déduis-en la position de la courbe par rapport à cette tangente.

(d) Vrai ou faux : $\ln 0{,}5 \leqslant -0{,}5$. Justifie sans calculatrice.

Ex. 41 ★★★ **Un minimum en e², une tangente en e** — Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - 3x + 2$. Donne les valeurs exactes, puis arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Calcule $f'(x)$ en justifiant la dérivée du produit $x\ln x$.

(b) Résous l'inéquation $f'(x) > 0$ sur $[1\,;+\infty[$, en rédigeant.

(c) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en factorisant par x. Dresse ensuite le tableau de variations complet de f, avec la valeur exacte du minimum.

(d) Détermine une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse e.

(e) Inès affirme : « $f(x) \leqslant -1$ pour tout x de $\left[1\,;e^2\right]$ ». Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Bénéfice d'une confiturerie de Valence** — Une confiturerie de Valence produit x tonnes de confiture d'abricots par saison, avec $x \in [0\,;20]$. Son bénéfice, en milliers d'euros, est $B(x) = 6\ln(2x+1) - x$. Donne les valeurs exactes, puis arrondis à 10^{-3} si besoin.

(a) Justifie que B est définie sur $[0\,;20]$. Calcule ensuite $B'(x)$ et écris-la sous la forme d'un seul quotient.

(b) Étudie le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;20]$. Dresse le tableau de variations de B avec les valeurs exactes aux bornes et à l'extremum.

(c) Exprime le bénéfice maximal en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$. Donne-le ensuite à l'euro près.

(d) Le gérant affirme : « Sur $[0\,;20]$, la confiturerie ne perd jamais d'argent. » Vrai ou faux ? Justifie à l'aide du tableau.