Terminale maths complémentaires / Logarithme — corrigé

benprof particulier.fr

1. *ln, réciproque de exp : passer de l'un à l'autre*

Ex. 1 ★☆☆ Automatismes : simplifier exp et ln

(a) $\ln\left(e^7\right) = 7$, car $\ln\left(e^y\right) = y$ pour tout réel y.

(b) $e^{\ln 11} = 11$, car $11 > 0$.

(c) $\dfrac{1}{e} = e^{-1}$, donc $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$.

(d) $\ln\left(e^{-3,5}\right) = -3,5$: la formule $\ln\left(e^y\right) = y$ marche aussi quand y est négatif.

(e) $e^{\ln 0,4} = 0,4$, car $0,4 > 0$.

(f) $\ln 1 + \ln e = 0 + 1 = 1$.

(g) Ce nombre n'existe pas : $-7 \leqslant 0$, donc $\ln(-7)$ n'a pas de sens. La formule $e^{\ln x} = x$ ne vaut que pour $x > 0$.

Ex. 2 ★☆☆ Automatismes : passer de exp à ln

(a) $13 > 0$, donc $e^x = 13 \iff x = \ln 13$. $\mathcal{S} = \{\ln 13\}$.

(b) $e^x = -6$: il n'y a aucune solution, car $e^x > 0$ pour tout réel x. $\mathcal{S} = \varnothing$.

(c) Pour $x > 0$: $\ln x = 4 \iff x = e^4$, et non $4e$. $\mathcal{S} = \left\{e^4\right\}$.

(d) Pour $x > 0$: $\ln x = -2 \iff x = e^{-2}$, qui est bien strictement positif. $\mathcal{S} = \left\{e^{-2}\right\}$.

(e) $e^{2x} = 7 \iff 2x = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln 7}{2}\right\}$.

(f) Il faut $x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. $\ln(x-1) = 0 \iff x - 1 = e^0 = 1 \iff x = 2$, et $2 > 1$. $\mathcal{S} = \{2\}$.

Ex. 3 ★☆☆ Existence et signe de ln

(a) Il existe et $\ln 0,8 < 0$, car $0 < 0,8 < 1$.

(b) Il existe et $\ln 14 > 0$, car $14 > 1$.

(c) Il n'existe pas : $-5 \leqslant 0$.

(d) Il n'existe pas : $\ln x$ n'est défini que pour $x > 0$.

(e) Il existe et $\ln 1 = 0$: il est nul.

(f) Il existe et $\ln\left(e^{-0,2}\right) = -0,2 < 0$.

(g) Il existe : $\pi \approx 3,14$, donc $0 < \pi - 3 < 1$. Ainsi $\ln(\pi - 3) < 0$.

Ex. 4 ★★☆ Les erreurs d'Inès

(a) Non. L'équation a un sens pour $x > 0$. On a $\ln x = 2 \iff x = e^2$, et $e^2 > 0$. $\mathcal{S} = \left\{e^2\right\}$, avec $e^2 \approx 7,39$. Inès a confondu e^2 et $2e$.

(b) Non. $\ln(-3)$ n'existe pas. De plus $e^x > 0$ pour tout réel x, donc $e^x = -3$ n'a aucune solution. $\mathcal{S} = \varnothing$.

(c) Non, 1,03 n'est qu'un arrondi. Comme $8 > 0$: $e^{3x-1} = 8 \iff 3x - 1 = \ln 8 \iff x = \frac{1+\ln 8}{3}$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\ln 8}{3}\right\}$, avec $\frac{1+\ln 8}{3} \approx 1,03$.

(d) Non. Il faut $2x - 5 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{5}{2}$. Avec $x = \frac{5}{2}$, on a $2x - 5 = 0$, et $\ln 0$ n'existe pas. Correction : $\ln(2x-5) = 0 \iff 2x - 5 = e^0 = 1 \iff x = 3$. Comme $3 > \frac{5}{2}$, $\mathcal{S} = \{3\}$.

Ex. 5 ★★☆ Deux courbes symétriques

(a) On échange les coordonnées : on obtient $A'\left(e^3\,;3\right)$ sur Γ. Cela traduit l'égalité $\ln\left(e^3\right) = 3$.

(b) On résout $\ln x = -1,5$ pour $x > 0$: $\ln x = -1,5 \iff x = e^{-1,5}$. L'abscisse vaut $e^{-1,5} \approx 0,22$.

(c) L'ordonnée vaut $\ln 0,6 \approx -0,51$. Elle est négative, car $0 < 0,6 < 1$. Le point correspondant sur $\mathcal{C}$ est $(\ln 0,6\,;0,6)$, car $e^{\ln 0,6} = 0,6$.

(d) Par symétrie, le point $(1\,;0)$ est sur Γ : c'est l'égalité $\ln 1 = 0$, qui découle de $e^0 = 1$. Γ coupe donc l'axe des abscisses au point $(1\,;0)$.

Ex. 6 ★★★ Un médicament dans le sang

(a) $C(0) = 8e^0 = 8 \times 1 = 8$ mg/L. $C(2) = 8e^{-0,25\times 2} = 8e^{-0,5}$ mg/L, soit environ 4,852 mg/L.

(b) $C(t) = \frac{8}{e} \iff e^{-0,25t} = \frac{1}{e} = e^{-1} \iff -0,25t = -1$ (car $\ln\left(e^X\right) = X$) $\iff t = 4$. $\mathcal{S} = \{4\}$: la concentration vaut $\frac{8}{e}$ mg/L au bout de 4 h exactement.

(c) $C(t) = 2 \iff e^{-0,25t} = 0,25$. Comme $0,25 > 0$, on obtient $-0,25t = \ln 0,25$, donc $t = -4\ln 0,25$. Comme $0 < 0,25 < 1$, on a $\ln 0,25 < 0$, donc $t > 0$.
$\mathcal{S} = \{-4\ln 0,25\}$, avec $t \approx 5,545$ h. Or $0,545 \times 60 \approx 33$: la concentration vaut 2 mg/L au bout d'environ 5 h 33 min.

(d) Non. $C(t) = 0 \iff e^{-0,25t} = 0$. Or $e^X > 0$ pour tout réel X, donc cette équation n'a aucune solution ($\ln 0$ n'existe pas). La concentration diminue, mais elle ne s'annule jamais.

Ex. 6 **(suite)**

(e) $C(t) \geqslant 1 \iff e^{-0{,}25t} \geqslant 0{,}125$. Les deux membres sont strictement positifs et ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc l'inéquation équivaut à $-0{,}25t \geqslant \ln 0{,}125$, soit $t \leqslant -4\ln 0{,}125$ (on divise par $-0{,}25 < 0$, donc le sens change). $\mathcal{S} = [0\,;-4\ln 0{,}125]$, avec $-4\ln 0{,}125 \approx 8{,}318$. Or $0{,}318 \times 60 \approx 19$: le médicament reste efficace pendant environ 8 h 19 min.

Ex. 7 ★★★ **Une fonction qui prend toutes les valeurs**

(a) $1+e > 1$ et $1{,}5 > 1$, donc les deux images existent. $f(1+e) = 3 + \ln e = 3+1 = 4$. $f(1{,}5) = 3 + \ln 0{,}5$, avec $\ln 0{,}5 < 0$ car $0 < 0{,}5 < 1$.
Donc $f(1{,}5) < 3$, et $f(1{,}5) \approx 2{,}307$.

(b) Pour $x > 1$: $f(x) = 0 \iff \ln(x-1) = -3 \iff x - 1 = e^{-3} \iff x = 1 + e^{-3}$. Comme $e^{-3} > 0$, on a bien $1 + e^{-3} > 1$. $\mathcal{S} = \{1 + e^{-3}\}$, avec $1 + e^{-3} \approx 1{,}050$.

(c) Pour $x > 1$: $f(x) \leqslant 3 \iff \ln(x-1) \leqslant 0 \iff \ln(x-1) \leqslant \ln 1 \iff x - 1 \leqslant 1$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $x \leqslant 2$. Avec la condition $x > 1$: $\mathcal{S} =]1\,;2]$.

(d) Pour $x > 1$: $f(x) = y \iff \ln(x-1) = y - 3 \iff x - 1 = e^{y-3} \iff x = 1 + e^{y-3}$. Comme $e^{y-3} > 0$, cette valeur est bien dans $]1\,;+\infty[$. L'équation a donc une unique solution, $x = 1 + e^{y-3}$: f prend chaque valeur réelle exactement une fois.

(e) Non. $e^{f(x)-3} = e^{\ln(x-1)}$, et cette expression n'existe que si $x - 1 > 0$. Par exemple, pour $x = 0$, le membre de droite vaut -1, alors que $\ln(-1)$ n'existe pas.
Correction : pour tout $x > 1$, $e^{f(x)-3} = e^{\ln(x-1)} = x - 1$, car $e^{\ln X} = X$ pour $X > 0$.

2. *Propriétés algébriques : transformer une écriture*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : développer en fonction de ln 2 et ln 3**

(a) $72 = 2^3 \times 3^2$, donc $\ln 72 = 3\ln 2 + 2\ln 3$.

(b) $54 = 2 \times 3^3$, donc $\ln \frac{1}{54} = -\ln 54 = -\ln 2 - 3\ln 3$.

(c) $24 = 2^3 \times 3$, donc $\ln\sqrt{24} = \frac{1}{2}\ln 24 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$.

(d) $\ln\frac{16}{27} = \ln\left(2^4\right) - \ln\left(3^3\right) = 4\ln 2 - 3\ln 3$.

(e) $0{,}375 = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$, donc $\ln 0{,}375 = \ln 3 - 3\ln 2$.

(f) $96 = 2^5 \times 3$, donc $\ln 96 = 5\ln 2 + \ln 3$.

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes : simplifier en mêlant ln et exp**

(a) $e^{2\ln 3} = e^{\ln(3^2)} = e^{\ln 9} = 9$.

(b) $e^{-\ln 4} = e^{\ln\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

(c) $e^3 \times e^{-5} = e^{-2}$, donc $\ln\left(e^3 \times e^{-5}\right) = \ln\left(e^{-2}\right) = -2$.

(d) $\ln\frac{1}{e^4} = -\ln\left(e^4\right) = -4$.

(e) $e^{\ln 6 - \ln 2} = e^{\ln\frac{6}{2}} = e^{\ln 3} = 3$.

(f) $\ln\left(5e^2\right) - \ln 5 = \ln 5 + 2 - \ln 5 = 2$.

Ex. 10 ★★☆ **Regrouper en un seul logarithme**

(a) $2\ln 5 + \ln 3 = \ln 25 + \ln 3 = \ln 75$.

(b) $2\ln 6 - \ln 4 = \ln 36 - \ln 4 = \ln\frac{36}{4} = \ln 9$.

(c) $1 = \ln e$, donc $3\ln 2 + 1 = \ln 8 + \ln e = \ln(8e)$.

(d) $2 = \ln\left(e^2\right)$, donc $\ln 20 - 2 = \ln\frac{20}{e^2}$.

(e) $\frac{1}{2}\ln 49 = \ln\sqrt{49} = \ln 7$, donc la somme vaut $\ln 7 + \ln 2 = \ln 14$.

(f) $\ln 10 - \ln 2 - \ln 15 = \ln\frac{10}{2\times 15} = \ln\frac{1}{3}$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux sur les propriétés de ln**

(a) Faux. Avec $a = b = 1$: $\ln(1+1) = \ln 2$, et $\ln 2 > 0$ car $2 > 1$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. Il n'existe aucune formule pour $\ln(a+b)$.

(b) Vrai. $\ln\sqrt{e^6} = \frac{1}{2}\ln\left(e^6\right) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

(c) Faux. Avec $a = e^3$: $(\ln a)^2 = 3^2 = 9$, alors que $\ln\left(a^2\right) = 2\ln a = 6$.

(d) Faux. $(-2) \times (-5) = 10$, donc le membre de gauche vaut $\ln 10$. Mais $\ln(-2)$ et $\ln(-5)$ n'existent pas : la formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ exige $a > 0$ et $b > 0$.

(e) Faux. Avec $x = -3$: $\ln\left(x^2\right) = \ln 9$ existe, mais $\ln(-3)$ n'existe pas. L'égalité $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ est vraie seulement pour $x > 0$.

Ex. 12 ★★☆ **Les erreurs de Lina**

(a) Erreur : $4\ln 2 = \ln\left(2^4\right) = \ln 16$, et non $\ln 8$. Calcul correct : $\ln 80 - \ln 16 = \ln\frac{80}{16} = \ln 5$.

(b) Erreur : on ne peut pas écrire $\ln\left(e^2 + e^2\right) = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^2\right)$, car il n'existe pas de formule pour $\ln(a+b)$.
Calcul correct : $e^2 + e^2 = 2e^2$, donc $\ln\left(2e^2\right) = \ln 2 + 2$.

(c) Erreur : un quotient de logarithmes n'est pas le logarithme du quotient. Calcul correct :
$\ln 81 = \ln\left(3^4\right) = 4\ln 3$, donc $\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{4\ln 3}{\ln 3} = 4$.

Ex. 12 **(suite)**

(d) Erreur : le logarithme d'un inverse n'est pas l'inverse du logarithme. D'ailleurs, $\frac{1}{125} < 1$, donc $\ln \frac{1}{125} < 0$, alors que $\frac{1}{\ln 125} > 0$. Calcul correct : $\ln \frac{1}{125} = -\ln 125 = -\ln\left(5^3\right) = -3\ln 5$.

Ex. 13 ★★★ **Deux écritures qui ne coïncident pas**

(a) $f(x)$ existe si $x^2 + 4x > 0$, c'est-à-dire $x(x+4) > 0$. Ce trinôme a pour racines -4 et 0, et son coefficient de x^2 est $1 > 0$: il est strictement positif à l'extérieur des racines.
Donc $D_f =]-\infty\,;-4[\cup]0\,;+\infty[$. $g(x)$ existe si $x > 0$ et $x + 4 > 0$ en même temps, donc $D_g =]0\,;+\infty[$.

(b) Non, elle a tort. La formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ n'est vraie que pour $a > 0$ et $b > 0$. Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $x + 4 > 0$, donc $f(x) = \ln(x(x+4)) = \ln x + \ln(x+4) = g(x)$. Mais les deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition : $f(-5) = \ln(25-20) = \ln 5$ existe, alors que $g(-5)$ n'existe pas, car $\ln(-5)$ n'a pas de sens. Conclusion : f et g ne sont pas la même fonction.

(c) Pour $x < -4$, on a $-x > 4 > 0$ et $-x - 4 > 0$. De plus $(-x)(-x-4) = x^2 + 4x$. On peut donc appliquer la formule du produit à deux nombres strictement positifs : $f(x) = \ln(-x) + \ln(-x-4)$.

(d) Sur D_f : $f(x) = \ln 12 \iff x^2 + 4x = 12$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Cela donne $x^2 + 4x - 12 = 0$, avec $\Delta = 16 + 48 = 64$, donc $x = \frac{-4-8}{2} = -6$ ou $x = \frac{-4+8}{2} = 2$. Comme $-6 < -4$ et $2 > 0$, les deux sont dans D_f : $\mathcal{S} = \{-6\,;2\}$. Sur $D_g =]0\,;+\infty[$, on a $g(x) = f(x)$, donc on garde seulement les solutions strictement positives : $\mathcal{S} = \{2\}$. La solution -6 disparaît parce que g n'est pas définie pour $x < -4$.

(e) $\ln x$ n'existe que si $x > 0$: on résout donc sur $]0\,;+\infty[$. Pour $x > 0$, $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ (pour $x < 0$, ce serait $2\ln|x|$). L'équation devient $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$, c'est-à-dire $\ln x\,(\ln x - 2) = 0$.
Donc $\ln x = 0$ ou $\ln x = 2$, soit $x = 1$ ou $x = e^2$. Ces deux réels sont strictement positifs : $\mathcal{S} = \left\{1\,;e^2\right\}$.
Attention, l'égalité n'est pas vraie pour tout x : pour $x = e$, $(\ln e)^2 = 1$ alors que $\ln\left(e^2\right) = 2$.

Ex. 14 ★★★ **Décibels et aspirateurs**

(a) Non, il a tort : il n'existe aucune formule pour un quotient de deux logarithmes. Avec $I = 100I_0$: $\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$, alors que $\ln \frac{100I_0}{10I_0} = \ln 10 \approx 2{,}30$. Les deux résultats sont différents.

(b) $\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 10^7$, donc $\ln \frac{I}{I_0} = 7\ln 10$ par la propriété $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$. Alors $L = 10 \times \frac{7\ln 10}{\ln 10} = 70$.
Conclusion : l'aspirateur produit 70 dB.

(c) Avec l'intensité $2I$: $L' = 10 \times \frac{\ln\left(2\times\frac{I}{I_0}\right)}{\ln 10} = 10 \times \frac{\ln 2 + \ln\frac{I}{I_0}}{\ln 10}$, car $2 > 0$ et $\frac{I}{I_0} > 0$.
Donc $L' - L = \frac{10\ln 2}{\ln 10} \approx 3{,}01$. Conclusion : doubler l'intensité ajoute environ 3,01 dB.

(d) $\frac{n\times 10^{-5}}{10^{-12}} = n \times 10^7$, avec $n > 0$ et $10^7 > 0$.
Donc $\ln\left(n \times 10^7\right) = \ln n + 7\ln 10$ et $L_n = 10 \times \frac{\ln n + 7\ln 10}{\ln 10} = 70 + \frac{10\ln n}{\ln 10}$.

(e) $L_n \geqslant 85 \iff \frac{10\ln n}{\ln 10} \geqslant 15 \iff \ln n \geqslant \frac{3}{2}\ln 10$, car $\ln 10 > 0$. Or $\frac{3}{2}\ln 10 = \ln 10 + \frac{1}{2}\ln 10 = \ln 10 + \ln\sqrt{10} = \ln\left(10\sqrt{10}\right)$. Comme ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: $\ln n \geqslant \ln\left(10\sqrt{10}\right) \iff n \geqslant 10\sqrt{10} \approx 31{,}62$. Puisque n est un entier, il faut $n \geqslant 32$.
Vérification : $L_{31} \approx 84{,}91$ et $L_{32} \approx 85{,}05$. Conclusion : le seuil de danger est atteint à partir de 32 aspirateurs.

3. *Équations avec ln et exp*

Ex. 15 ★☆☆ **Passer de l'exponentielle au logarithme**

(a) $4 > 0$, donc $e^{3x+1} = 4 \iff 3x + 1 = \ln 4 \iff x = \frac{\ln 4 - 1}{3} \approx 0{,}13$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln 4 - 1}{3}\right\}$.

(b) On divise d'abord par 5 : $e^x = 7 \iff x = \ln 7 \approx 1{,}95$.
$\mathcal{S} = \{\ln 7\}$.

(c) Pour tout réel x, $e^x > 0$: l'équation n'a aucune solution, $\mathcal{S} = \varnothing$.

(d) Condition : $x > 0$. $\ln x = -2 \iff x = e^{-2} \approx 0{,}14$, qui est bien strictement positif. Un ln peut être négatif.
$\mathcal{S} = \{e^{-2}\}$.

(e) Condition : $x > 0$. $\ln x = \frac{3}{2} \iff x = e^{\frac{3}{2}} = e^1 \times e^{\frac{1}{2}} = e\sqrt{e} \approx 4{,}48$, qui est bien strictement positif.
$\mathcal{S} = \{e\sqrt{e}\}$.

(f) La fonction exp est strictement croissante, donc $e^{1-x} = e^4 \iff 1 - x = 4 \iff x = -3$. $\mathcal{S} = \{-3\}$.

Ex. 16 ★☆☆ **Conditions d'abord, puis on résout**

(a) Conditions : $2x > 0$ et $x + 5 > 0$, soit $x > 0$. Alors $2x = x + 5 \iff x = 5$, et $5 > 0$: $\mathcal{S} = \{5\}$.

(b) Conditions : $x - 3 > 0$ et $2x - 1 > 0$, soit $x > 3$. Alors $x - 3 = 2x - 1 \iff x = -2$. Or $-2 < 3$, donc on rejette cette valeur : $\mathcal{S} = \varnothing$.

(c) Condition : $x > 0$. La fonction ln est strictement croissante, donc $\ln x < -1 \iff x < e^{-1}$. On garde $x > 0$: $\mathcal{S} = \left]0\,;e^{-1}\right[$.

(d) Condition : $x + 2 > 0$, soit $x > -2$. $1 = \ln e$ et la fonction ln est strictement croissante, donc $\ln(x+2) \leqslant \ln e \iff x + 2 \leqslant e \iff x \leqslant e - 2$. Avec $x > -2$: $\mathcal{S} =]-2\,;e-2]$.

(e) $6 = e^{\ln 6}$ et la fonction exp est strictement croissante, donc $e^x > 6 \iff x > \ln 6$: $\mathcal{S} =]\ln 6\,;+\infty[$.

(f) $1 = e^0$ et la fonction exp est strictement croissante, donc $2x + 3 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{3}{2}$: $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right]$.

Ex. 17 ★★☆ **L'erreur d'Inès**

(a) Il faut $x - 2 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 2$. L'équation a donc un sens sur $]2\,;+\infty[$.

(b) Non. Inès a oublié les conditions : $-3 \notin]2\,;+\infty[$ (pour $x = -3$, $\ln(-5)$ n'existe pas). Pour $x > 2$, on a bien $x^2 - 4 = 5$, d'où $x = 3$ ou $x = -3$, et on ne garde que 3. Vérification : $\ln 1 + \ln 5 = \ln 5$.
Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

(c) Pour $x > 2$, la fonction ln étant strictement croissante, l'inéquation équivaut à $x^2 - 4 < 5$, soit $x^2 < 9$, soit $-3 < x < 3$. Avec $x > 2$: $\mathcal{S} =]2\,;3[$.

(d) Conditions : $x + 1 > 0$ et $x > 0$, soit $x > 0$. L'équation s'écrit $\ln \frac{x+1}{x} = \ln 3$, donc $x + 1 = 3x$, d'où $x = \frac{1}{2}$, qui vérifie $x > 0$.
Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ex. 18 ★★☆ **Un second degré caché**

(a) On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: $X^2 + 2X - 8 = 0$, soit $(X + 4)(X - 2) = 0$. On rejette $X = -4$ car $X > 0$. Il reste $e^x = 2$, donc $x = \ln 2 \approx 0{,}69$. $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$: l'équation a une seule solution.

(b) Condition : $x > 0$. On pose $X = \ln x$, qui peut être n'importe quel réel : $2X^2 + X - 3 = 0$.
$\Delta = 1 + 24 = 25$, donc $X = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$ ou $X = \frac{-1+5}{4} = 1$. On garde les deux racines : $\ln x = 1$, d'où $x = e \approx 2{,}72$, ou $\ln x = -\frac{3}{2}$, d'où $x = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}22$.
Ces deux nombres sont strictement positifs : $\mathcal{S} = \left\{e^{-\frac{3}{2}}\,;e\right\}$.

Ex. 18 (suite)

(c) On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3) < 0 \iff 1 < X < 3$ (le trinôme est négatif entre ses racines).
Donc $1 < e^x < 3$. La fonction ln est strictement croissante, donc $0 < x < \ln 3$, avec $\ln 3 \approx 1{,}10$.
$\mathcal{S} =]0\,;\ln 3[$.

Ex. 19 ★★☆ **Un antibiotique dans le sang**

(a) $C(0) = 8e^0 = 8$ mg/L et $C(2) = 8e^{-0{,}5} \approx 4{,}85$ mg/L.

(b) $8e^{-0{,}25t} = 2 \iff e^{-0{,}25t} = \frac{1}{4} \iff -0{,}25t = -\ln 4 \iff t = 4\ln 4 = 8\ln 2 \approx 5{,}55$. La concentration vaut 2 mg/L au bout d'environ 5,55 h.

(c) $C(t) \geqslant 1 \iff e^{-0{,}25t} \geqslant \frac{1}{8} \iff -0{,}25t \geqslant -\ln 8$ (car ln est strictement croissante) $\iff t \leqslant 4\ln 8 = 12\ln 2$ (on divise par $-0{,}25 < 0$: le sens change). Avec $t \geqslant 0$: $\mathcal{S} = [0\,;12\ln 2]$. La concentration reste supérieure ou égale à 1 mg/L pendant les 8,32 premières heures environ.

(d) On résout $C(t) = 4$: $e^{-0{,}25t} = \frac{1}{2} \iff -0{,}25t = -\ln 2 \iff t = 4\ln 2 \approx 2{,}77$. La demi-vie est d'environ 2,77 h.

Ex. 20 ★★★ **Un second degré en ln x, jusqu'au bout**

(a) f est définie pour $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 - X - 2 = 0$, soit $(X-2)(X+1) = 0$, donc $X = 2$ ou $X = -1$. Ici $X = \ln x$ peut être négatif : on garde les deux racines. $\ln x = 2 \iff x = e^2$ et $\ln x = -1 \iff x = e^{-1}$. Les deux valeurs sont strictement positives : $\mathcal{S} = \left\{e^{-1}\,;e^2\right\}$.

(b) Pour $x > 0$, $f(x) = (\ln x - 2)(\ln x + 1)$. Le trinôme $X^2 - X - 2$ est négatif strictement entre ses racines, donc $f(x) < 0 \iff -1 < \ln x < 2 \iff e^{-1} < x < e^2$, car exp est strictement croissante. $\mathcal{S} = \left]e^{-1}\,;e^2\right[$.

(c) On a $(u^2)' = 2uu'$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$.
Donc $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x}$.

Ex. 20 **(suite)**

(d) $f(x) = \ln x \times (\ln x - 1) - 2$. En 0^+, $\ln x \to -\infty$ et $\ln x - 1 \to -\infty$, donc le produit tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, les deux facteurs tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2\ln x - 1$. Or $2\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Ensuite $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f′(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

f est décroissante sur $]0\,;\sqrt{e}]$ et croissante sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$. Son minimum vaut $-\frac{9}{4}$.

(e) Non, elle a tort. 1re façon : le minimum de f vaut $-\frac{9}{4} > -3$, donc $f(x) > -3$ pour tout $x > 0$. 2e façon : avec $X = \ln x$, on obtient $X^2 - X + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: aucune valeur de X, donc aucun x. $\mathcal{S} = \varnothing$. C'est vrai que $\ln x$ prend toutes les valeurs réelles, mais f, elle, ne les prend pas toutes.

Ex. 21 ★★★ **Deux cultures de bactéries**

(a) $N_1(t+\tau) = 200e^{0,3t}e^{0,3\tau}$. On divise par $200e^{0,3t} > 0$: $N_1(t+\tau) = 2N_1(t) \iff e^{0,3\tau} = 2 \iff 0,3\tau = \ln 2 \iff \tau = \frac{\ln 2}{0,3} = \frac{10\ln 2}{3} \approx 2,31$. La culture 1 double toutes les 2,31 heures environ (environ 2 h 19 min) : c'est son temps de doublement.

(b) Pour tout réel t, $e^{0,3t} > 0$, donc $N_1(t) = 200e^{0,3t} > 0$. L'équation $e^{0,3t} = 0$ n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \varnothing$. Dans ce modèle, la culture 1 n'est jamais vide.

(c) On divise d'abord les deux membres par $200e^{0,1t} > 0$: $N_1(t) = N_2(t) \iff e^{0,2t} = 9 \iff 0,2t = \ln 9 \iff t = 5\ln 9 = 10\ln 3 \approx 10,99$. $\mathcal{S} = \{10\ln 3\}$. À cet instant, $N_1 = 200e^{3\ln 3} = 200 \times 27 = 5\,400$ et $N_2 = 1\,800e^{\ln 3} = 5\,400$. Les deux cultures comptent 5 400 bactéries au bout de 10,99 heures environ.

(d) $N_1(t) \geqslant 3N_2(t) \iff 200e^{0,3t} \geqslant 5\,400e^{0,1t} \iff e^{0,2t} \geqslant 27$ (on divise par $200e^{0,1t} > 0$) $\iff 0,2t \geqslant \ln 27$, par stricte croissance de ln, $\iff t \geqslant 5\ln 27 = 15\ln 3 \approx 16,48$. $\mathcal{S} = [15\ln 3\,;+\infty[$. À partir de 16,48 heures environ, la culture 1 est au moins trois fois plus grande que la culture 2.

Ex. 21 **(suite)**

(e) Le programme affiche le premier entier t tel que $200e^{0,3t} \geqslant 50\,000$. Or $200e^{0,3t} \geqslant 50\,000 \iff e^{0,3t} \geqslant 250 \iff t \geqslant \frac{\ln 250}{0,3} \approx 18,41$, par stricte croissance de ln. Le premier entier qui convient est 19 : le programme affiche 19. C'est au bout de 19 heures entières que la culture 1 compte pour la première fois au moins 50 000 bactéries (le seuil est atteint vers 18,41 h).

4. *Inéquations avec ln et exp*

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : inéquations avec l'exponentielle**

(a) ln est strictement croissante : $e^x > 5 \iff x > \ln 5$. $\mathcal{S} =]\ln 5\,;+\infty[$.

(b) $1 = e^0$ et exp est strictement croissante : $2x + 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{1}{2}$. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$.

(c) ln est strictement croissante : $-0,25x \geqslant \ln 0,4$. On divise par $-0,25 < 0$, donc le sens change : $x \leqslant -\frac{\ln 0,4}{0,25} = -4\ln 0,4 \approx 3,67$. $\mathcal{S} =]-\infty\,;-4\ln 0,4]$.

(d) Pour tout réel x, $e^x > 0 > -3$: aucun réel ne convient. $\mathcal{S} = \varnothing$.

(e) $e^x > 9 \iff x > \ln 9 = 2\ln 3$, car ln est strictement croissante. $\mathcal{S} =]2\ln 3\,;+\infty[$.

(f) $-x \leqslant \ln 8 \iff x \geqslant -\ln 8 = -3\ln 2$. $\mathcal{S} = [-3\ln 2\,;+\infty[$.

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : inéquations avec le logarithme**

(a) On a $x > 0$. exp est strictement croissante : $x \geqslant e^2$, ce qui garantit déjà $x > 0$. $\mathcal{S} = \left[e^2\,;+\infty\right[$.

(b) On a $x > 0$, et $x \leqslant e^{-1}$. $\mathcal{S} = \left]0\,;\frac{1}{e}\right]$.

(c) On a $x > -3$. $\ln(x+3) > \ln 1 \iff x + 3 > 1 \iff x > -2$. $\mathcal{S} =]-2\,;+\infty[$.

(d) On a $x > 0$. $2x < e \iff x < \frac{e}{2}$. $\mathcal{S} = \left]0\,;\frac{e}{2}\right[$.

(e) On a $x < 5$. ln est strictement croissante : $5 - x \geqslant 2 \iff x \leqslant 3$. $\mathcal{S} =]-\infty\,;3]$.

(f) On a $x > 0$. $\ln x > \frac{3}{2} \iff x > e^{\frac{3}{2}}$. $\mathcal{S} = \left]e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur les inéquations**

(a) Vrai. Si $x > 0$, alors $-x < 0 < x$. Comme exp est strictement croissante, on a $e^{-x} < e^x$.

(b) Faux. On divise par $-4 < 0$: le sens change, donc $\ln x < -\frac{1}{2}$, soit $x < e^{-\frac{1}{2}}$ par stricte croissance de exp. Avec $x > 0$, on obtient $\mathcal{S} = \left]0\,;e^{-\frac{1}{2}}\right[$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Faux. Il faut $3-x>0$, soit $x<3$, et $3-x<1$, soit $x>2$. $\mathcal{S}=]2\,;3[$.

(d) Faux. La première demande $x>0$: son ensemble est $]0\,;4]$. Celui de la seconde est $]-\infty\,;4]$. Par exemple, -1 est solution de la seconde seulement.

(e) Vrai. $-0{,}2x<\ln 0{,}5=-\ln 2$. On divise par $-0{,}2<0$: $x>\frac{\ln 2}{0{,}2}=5\ln 2$.

Ex. 25 ★★☆ **Repère l'erreur et corrige**

(a) $\ln 0{,}85<0$: quand on divise par ce nombre, le sens change. On a donc $n>\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85}\approx 14{,}17$. Le plus petit entier qui convient est $n=15$. Vérification : $0{,}85^{14}\approx 0{,}103>0{,}1$ et $0{,}85^{15}\approx 0{,}087<0{,}1$.

(b) Inès a oublié la condition $x>0$.
$\ln x<\ln 1\iff 0<x<1$, donc $\mathcal{S}=]0\,;1[$.

(c) Malo a oublié les conditions $x>2$ et $x<10$. Ensuite, $2x\leqslant 12$ donne $x\leqslant 6$. On croise avec $]2\,;10[$: $\mathcal{S}=]2\,;6]$.

(d) Zoé se trompe de conclusion. Pour tout réel x, $e^x>0>-2$: tout réel est solution, donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

Ex. 26 ★★☆ **Résoudre en rédigeant**

(a) Conditions : $2x+1>0$ et $x+4>0$, soit $x>-\frac{1}{2}$. ln est strictement croissante : $2x+1\leqslant x+4\iff x\leqslant 3$. On croise : $\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2}\,;3\right]$. Les solutions sont les réels de $-\frac{1}{2}$ (exclu) à 3
(inclus).

(b) Conditions : $x>0$ et $x-3>0$, soit $x>3$. Sur cet ensemble, $\ln x+\ln(x-3)=\ln(x(x-3))$. ln est strictement croissante : $x(x-3)<10\iff x^2-3x-10<0$. $\Delta=49$, d'où les racines -2 et 5. Le trinôme est négatif strictement entre ses racines : $-2<x<5$. On croise avec $x>3$: $\mathcal{S}=]3\,;5[$. Les solutions sont les réels strictement compris entre 3 et 5.

(c) Avec $X=e^x$, on a $X>0$ et $X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$. Le trinôme est positif ou nul à l'extérieur de ses racines : $X\leqslant 1$ ou $X\geqslant 4$. Par stricte croissance de ln : $e^x\leqslant 1\iff x\leqslant 0$ et $e^x\geqslant 4\iff x\geqslant \ln 4=2\ln 2$. $\mathcal{S}=]-\infty\,;0]\cup[2\ln 2\,;+\infty[$. Les solutions sont les réels négatifs ou nuls et les réels supérieurs ou égaux à $2\ln 2$.

Ex. 27 ★★★ **Signe d'un produit et second degré caché**

(a) Condition d'existence : $x>0$. On a $\ln x+2<0\iff \ln x<-2\iff \ln x<\ln e^{-2}\iff x<e^{-2}$, car ln est strictement croissante. Avec $x>0$, on obtient $\mathcal{S}=\left]0\,;e^{-2}\right[$ (attention : pas $\left]-\infty\,;e^{-2}\right[$). De la même façon, $\ln x+2>0\iff x>e^{-2}$, donc $\mathcal{S}=\left]e^{-2}\,;+\infty\right[$.

(b) On a $e^{-2}\approx 0{,}14<4$. Le facteur $x-4$ est négatif sur $]0\,;4[$ et positif sur $]4\,;+\infty[$. Sur $\left]0\,;e^{-2}\right[$, on a $(-)\times(-)$: $A(x)>0$. Sur $\left]e^{-2}\,;4\right[$, on a $(+)\times(-)$: $A(x)<0$. Sur $]4\,;+\infty[$, on a $(+)\times(+)$: $A(x)>0$. A s'annule en e^{-2} et en 4.
Donc l'ensemble des solutions de $A(x)\leqslant 0$ est $\mathcal{S}=\left[e^{-2}\,;4\right]$.

(c) Avec $X=\ln x$, on obtient $X^2+X-2<0$. On a $\Delta=9$, d'où les racines $X_1=-2$ et $X_2=1$. Le coefficient de X^2 est positif, donc le trinôme est négatif strictement entre ses racines : $-2<\ln x<1$. Comme ln est strictement croissante, cela équivaut à $e^{-2}<x<e$, ce qui respecte bien $x>0$. L'ensemble des solutions de $B(x)<0$ est $\mathcal{S}=\left]e^{-2}\,;e\right[$.

(d) On cherche $\left[e^{-2}\,;4\right]\cap\left]e^{-2}\,;e\right[$. Comme $e\approx 2{,}72<4$, on obtient $\mathcal{S}=\left]e^{-2}\,;e\right[$. Le crochet est ouvert en e^{-2} car $B(e^{-2})=0$, ce qui ne vérifie pas l'inégalité stricte $B(x)<0$. Il est ouvert en e car $B(e)=0$.

(e) Lina a tort. D'après la résolution de $B(x)<0$, on a $B(x)\geqslant 0\iff x\in\left]0\,;e^{-2}\right]\cup[e\,;+\infty[$. Contre-exemple : pour $x=e^{-3}$, on a $x<e$, mais $B(e^{-3})=9-3-2=4\geqslant 0$. Lina oublie la zone où $X=\ln x\leqslant -2$.

Ex. 28 ★★★ **Médicament : durée d'efficacité et seuil**

(a) $C(t)\geqslant 3\iff e^{-0{,}4t}\geqslant 0{,}2\iff -0{,}4t\geqslant \ln 0{,}2$, car ln est strictement croissante. On divise ensuite par $-0{,}4<0$, ce qui change le sens : $t\leqslant\frac{\ln 0{,}2}{-0{,}4}=2{,}5\ln 5\approx 4{,}02$. Avec $t\geqslant 0$, on obtient $\mathcal{S}=[0\,;2{,}5\ln 5]$. Comme $0{,}0236\times 60\approx 1{,}4$, le médicament est efficace pendant environ 4 h 1 min.

(b) Pour tout $t\geqslant 0$, $C(t+2)=15e^{-0{,}4t}\times e^{-0{,}8}=C(t)\times e^{-0{,}8}$. La concentration est divisée par plus de 2 si $e^{-0{,}8}<\frac{1}{2}$. Par stricte croissance de ln, cela équivaut à $-0{,}8<-\ln 2$, soit $\ln 2<0{,}8$. C'est vrai, car $\ln 2\approx 0{,}69$ (et $e^{-0{,}8}\approx 0{,}45$). Ben a donc raison.

Ex. 28 **(suite)**

(c) $40 \times 0{,}88^n < 2 \iff 0{,}88^n < 0{,}05 \iff n \ln 0{,}88 < \ln 0{,}05$, car ln est strictement croissante. Comme $\ln 0{,}88 < 0$, la division change le sens : $n > \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}88} \approx 23{,}43$. Le plus petit entier qui convient est $n = 24$. Vérification : $40 \times 0{,}88^{23} \approx 2{,}11$ et $40 \times 0{,}88^{24} \approx 1{,}86$. Il faut donc 24 heures pour qu'il reste moins de 2 mg.

(d) On répète la boucle tant que le seuil n'est pas atteint, donc tant que $q \geqslant 2$. La ligne complétée est `while q >= 2:`. La fonction renvoie alors 24.

5. *Seuils : ln(q^n) = n ln q*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : puissances et logarithme**

(a) $\ln\left(3^7\right) = 7 \ln 3$.

(b) $2^{10} = e^{\ln\left(2^{10}\right)} = e^{10 \ln 2}$.

(c) $\ln\left(0{,}5^6\right) = 6 \ln \frac{1}{2} = -6 \ln 2$.

(d) $0 < 0{,}93 < 1$, donc $\ln 0{,}93 < 0$.

(e) $1{,}07 > 1$, donc $\ln 1{,}07 > 0$.

(f) $n \ln 1{,}2 - (n-1) \ln 1{,}2 = \ln 1{,}2$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : seuils en une étape**

(a) $\ln 3 > 0$, donc $n \geqslant \frac{\ln 500}{\ln 3} \approx 5{,}66$, d'où $n = 6$. Contrôle : $3^5 = 243$ et $3^6 = 729$.

(b) $\ln 0{,}7 < 0$, donc le sens change : $n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}7} \approx 6{,}46$, d'où $n = 7$. Contrôle : $0{,}7^6 \approx 0{,}118$ et $0{,}7^7 \approx 0{,}082$.

(c) $e^{0{,}4x} = 9 \iff 0{,}4x = \ln 9 = 2 \ln 3 \iff x = 5 \ln 3 \approx 5{,}49$. $\mathcal{S} = \{5 \ln 3\}$.

(d) On divise d'abord par 5 : $1{,}3^n \geqslant 40$. Comme $\ln 1{,}3 > 0$, $n \geqslant \frac{\ln 40}{\ln 1{,}3} \approx 14{,}06$, d'où $n = 15$. Contrôle : $5 \times 1{,}3^{14} \approx 196{,}9$ et $5 \times 1{,}3^{15} \approx 255{,}9$.

(e) $q = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$. Comme $\ln 1{,}05 > 0$, $1{,}05^n \geqslant 2 \iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$: la grandeur a doublé au bout de 15 ans. Contrôle : $1{,}05^{14} \approx 1{,}980$ et $1{,}05^{15} \approx 2{,}079$.

Ex. 31 ★★☆ **Repérer et corriger l'erreur**

(a) L'étape (3) est la première fausse. Comme $0 < 0{,}85 < 1$, on a $\ln 0{,}85 < 0$: quand on divise par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change. La conclusion (4) est donc fausse elle aussi.

(b) Comme ln est strictement croissante, $0{,}85^n \leqslant 0{,}2 \iff n \ln 0{,}85 \leqslant \ln 0{,}2 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}90$. Le plus petit entier qui convient est $n = 10$.

Ex. 31 **(suite)**

(c) $0{,}85^9 \approx 0{,}232 > 0{,}2$ et $0{,}85^{10} \approx 0{,}197 \leqslant 0{,}2$: le rang 10 est bien le premier qui convient.

(d) Non. Ici $\ln 1{,}06 > 0$, donc $n \geqslant \frac{\ln 3}{\ln 1{,}06} \approx 18{,}85$. Il faut prendre l'entier supérieur : $n = 19$. En effet, $1{,}06^{18} \approx 2{,}854 < 3$ et $1{,}06^{19} \approx 3{,}026$.

Ex. 32 ★★☆ **Placement : calcul et programme Python**

(a) Chaque année, le capital est multiplié par $q = 1{,}025$, donc $c_n = 3\,000 \times 1{,}025^n$.

(b) La boucle continue tant que le seuil n'est pas atteint : sa condition est la négation de $c \geqslant 4\,500$. Elle s'arrête au premier rang tel que $c \geqslant 4\,500$.

(c) On divise d'abord par 3 000 : $1{,}025^n \geqslant 1{,}5$. Comme ln est strictement croissante et $\ln 1{,}025 > 0$, on obtient $n \geqslant \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}025} \approx 16{,}42$, donc $n = 17$. Contrôle : $c_{16} \approx 4\,453{,}5$ et $c_{17} \approx 4\,564{,}9$. Le capital atteint 4 500 € en $2025 + 17 = 2042$.

(d) L'appel renvoie 2042. C'est la même année que par le calcul.

(e) Il aurait renvoyé 2025. Au départ, $c = 3\,000$ et la condition $c \geqslant 4\,500$ est fausse : la boucle ne s'exécute jamais et n reste égal à 0.

Ex. 33 ★★☆ **Médicament et demi-vie**

(a) $C(0) = 12\,e^0 = 12$ mg/L.

(b) $C(T) = \frac{C(0)}{2} \iff 12\,e^{-0{,}15T} = 6 \iff e^{-0{,}15T} = \frac{1}{2} \iff -0{,}15T = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0{,}15} \approx 4{,}621$ h. Comme $0{,}621 \times 60 \approx 37$, la demi-vie vaut environ 4 h 37 min.

(c) $C(t) < 1 \iff e^{-0{,}15t} < \frac{1}{12} \iff -0{,}15t < -\ln 12$ (stricte croissance de ln) $\iff t > \frac{\ln 12}{0{,}15} \approx 16{,}6$. On obtient $\mathcal{S} = \left]\frac{\ln 12}{0{,}15} ; +\infty\right[$: la concentration passe sous 1 mg/L environ 16,6 h après l'injection.

(d) $0{,}5^k \leqslant 0{,}05 \iff k \ln 0{,}5 \leqslant \ln 0{,}05 \iff k \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}5} \approx 4{,}32$: le sens change, car $\ln 0{,}5 < 0$. Il faut donc 5 demi-vies. Contrôle : $0{,}5^4 = 0{,}0625$ et $0{,}5^5 = 0{,}03125$.

Ex. 34 ★★★ **Deux villes voisines : rattrapage et programme**

(a) Augmenter de 1,8 % revient à multiplier par $1 + \frac{1{,}8}{100} = 1{,}018$, et diminuer de 1,2 % revient à multiplier par $1 - \frac{1{,}2}{100} = 0{,}988$. Les suites sont géométriques : $a_n = 42\,000 \times 1{,}018^n$ et $b_n = 65\,000 \times 0{,}988^n$.

Ex. 34 **(suite)**

(b) $b_n < 50\,000 \iff 0{,}988^n < \frac{50\,000}{65\,000} = \frac{10}{13}$ (on divise par $65\,000 > 0$) $\iff n \ln 0{,}988 < \ln \frac{10}{13}$ (stricte croissance de ln) $\iff n > \frac{\ln(10/13)}{\ln 0{,}988}$, car $\ln 0{,}988 < 0$: le sens change. Or $\frac{\ln(10/13)}{\ln 0{,}988} \approx 21{,}73$, donc $n = 22$. Contrôle : $b_{21} \approx 50\,444 > 50\,000$ et $b_{22} \approx 49\,839 < 50\,000$. La population de Valmont passe sous 50 000 habitants à partir de $2024 + 22 = 2046$.

(c) $a_n \geqslant b_n \iff 42\,000 \times 1{,}018^n \geqslant 65\,000 \times 0{,}988^n$. On divise par $42\,000 \times 0{,}988^n > 0$: $\frac{1{,}018^n}{0{,}988^n} \geqslant \frac{65}{42}$, soit $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^n \geqslant \frac{65}{42}$. La fonction ln est strictement croissante, donc on obtient $n \ln \frac{1{,}018}{0{,}988} \geqslant \ln \frac{65}{42}$. Comme $\frac{1{,}018}{0{,}988} > 1$, son ln est positif et le sens est conservé : $n \geqslant \frac{\ln(65/42)}{\ln(1{,}018/0{,}988)} \approx 14{,}60$, donc $n = 15$. Contrôle : $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^{14} \approx 1{,}520 < \frac{65}{42} \approx 1{,}548$ et $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^{15} \approx 1{,}566 \geqslant 1{,}548$. Saint-Aubin est au moins aussi peuplée que Valmont à partir de 2039.

(d) La boucle doit continuer tant que la condition cherchée n'est pas réalisée. On écrit donc la négation de $a \geqslant b$, c'est-à-dire `while a < b :`.

```
def annee():
    a = 42000
    b = 65000
    n = 2024
    while a < b:
        a = a * 1.018
        b = b * 0.988
        n = n + 1
    return n
```

L'appel `annee()` renvoie 2039. Comme la variable `n` part de 2024, le programme donne directement l'année. On retrouve bien le résultat de la question précédente : $2024 + 15 = 2039$.

(e) Avec 650 000 habitants à Valmont, le même calcul donne : $a_n \geqslant b_n \iff \left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^n \geqslant \frac{650}{42} \iff n \geqslant \frac{\ln(650/42)}{\ln(1{,}018/0{,}988)} \approx 91{,}58$, car $\ln \frac{1{,}018}{0{,}988} > 0$. Donc $n = 92$. Contrôle : $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^{91} \approx 15{,}21 < \frac{650}{42} \approx 15{,}48$ et $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^{92} \approx 15{,}67$. Lucas a tort : Saint-Aubin rattrape Valmont en $2024 + 92 = 2116$. Plus généralement, comme la raison est supérieure à 1, l'inégalité $\left(\frac{1{,}018}{0{,}988}\right)^n \geqslant s$ est vraie dès que $n \geqslant \frac{\ln s}{\ln(1{,}018/0{,}988)}$, quel que soit $s > 0$.

Ex. 35 ★★★ **Iode 131 : de la demi-vie au seuil**

(a) $m(8) = 20 \iff 40\,e^{-8\lambda} = 20 \iff e^{-8\lambda} = \frac{1}{2} \iff -8\lambda = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ (car $e^a = b \iff a = \ln b$ pour $b > 0$). On obtient $\lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0{,}0866$.

Ex. 35 **(suite)**

(b) Pour tout $t \geqslant 0$: $m(t+8) = 40\,e^{-\lambda t - 8\lambda} = 40\,e^{-\lambda t} \times e^{-8\lambda} = m(t) \times e^{-\ln 2} = m(t) \times \frac{1}{2}$. Quel que soit l'instant de départ, la masse restante est divisée par 2 en 8 jours : la demi-vie de l'iode 131 vaut 8 jours.

(c) $m(t) = 2{,}5 \iff e^{-\lambda t} = \frac{2{,}5}{40} = \frac{1}{16} \iff -\lambda t = -\ln 16 = -4 \ln 2 \iff t = \frac{4 \ln 2}{\lambda} = 4 \ln 2 \times \frac{8}{\ln 2} = 32$. Avec la question précédente : $40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 2{,}5$, soit 4 demi-vies de 8 jours. L'échantillon a été préparé il y a 32 jours.

(d) La masse est divisée par au moins 1 000 lorsque $m(t) \leqslant \frac{40}{1\,000}$, c'est-à-dire $e^{-\lambda t} \leqslant \frac{1}{1\,000}$. Par stricte croissance de ln, cela équivaut à $-\lambda t \leqslant -\ln 1\,000$, soit $t \geqslant \frac{8 \ln 1\,000}{\ln 2} \approx 79{,}73$ (le sens change car on divise par $-\lambda < 0$). Le plus petit entier est donc 80. Contrôle : $\frac{m(0)}{m(79)} = e^{79\lambda} \approx 939{,}0 < 1\,000$ et $\frac{m(0)}{m(80)} = e^{80\lambda} = e^{10 \ln 2} = 2^{10} = 1\,024 \geqslant 1\,000$. L'affirmation de Zoé est exacte : au bout de 80 jours, soit 10 demi-vies, la masse a été divisée par 1 024.

6. *Dérivée, limites, variations : étudier une fonction avec ln*

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : domaines et dérivées**

(a) f est définie sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{x} - 2 = \frac{3-2x}{x}$.

(b) f est définie sur $]0\,;+\infty[$. C'est un produit, $u = x$ et $v = \ln x$: $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

(c) f est définie sur $]0\,;+\infty[$. C'est un quotient : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$.

(d) Il faut $5x - 2 > 0$, soit $x > \frac{2}{5}$. f est donc définie sur $\left]\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$ et $f'(x) = \frac{5}{5x-2}$.

(e) $x^2 + 4 > 0$ pour tout réel x, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Avec $u = x^2 + 4$, $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2+4}$.

(f) Il faut $7 - x > 0$, soit $x < 7$. f est donc définie sur $]-\infty\,;7[$ et $f'(x) = 1 + \frac{-1}{7-x} = \frac{7-x-1}{7-x} = \frac{6-x}{7-x}$.

Ex. 37 ★☆☆ **Automatismes : limites sans calcul**

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 \ln x = -\infty$. Par somme, la limite vaut $-\infty$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$. Par somme, la limite vaut $-\infty$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (-3 \ln x) = +\infty$. Par somme avec 4, la limite vaut $+\infty$.

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$ et ln est continue en 1. La limite vaut donc $\ln 1 = 0$.

Ex. 37 **(suite)**

(e) Quand x tend vers $\frac{3}{4}$ par valeurs supérieures, $4x-3$ tend vers 0 en restant positif. Comme $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$, la limite vaut $-\infty$.

(f) $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée : par produit, la limite vaut $-\infty$.

Ex. 38 ★★☆ **Un maximum en e**

(a) f est un quotient de fonctions dérivables, et $x \neq 0$ sur $[1\,;10]$. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

(b) $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff \ln x < \ln e \iff x < e$, car ln est strictement croissante. Sur $[1\,;10]$: $\mathcal{S} = [1\,;e[$, avec $e \approx 2{,}718$.

(c) Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1-\ln x$. $f(1) = 0$, $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$ et $f(10) = \frac{\ln 10}{10} \approx 0{,}230$.

x	1		e		10
f′(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 10}{10}$

f est croissante sur $[1\,;e]$ et décroissante sur $[e\,;10]$.

(d) D'après le tableau, le maximum de f sur $[1\,;10]$ vaut $\frac{1}{e}$. Donc $\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{e}$ et, comme $x > 0$, $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$ pour tout $x \in [1\,;10]$.

Ex. 39 ★★☆ **Coût moyen minimal dans un atelier**

(a) $C'_M(x) = 2 - \frac{6}{x} = \frac{2x-6}{x}$.

(b) Sur $[0{,}5\,;10]$, $x > 0$, donc $C'_M(x)$ a le signe de $2x-6$. $2x-6 > 0 \iff x > 3$.
Donc $C'_M(x) < 0$ sur $[0{,}5\,;3[$, $C'_M(3) = 0$ et $C'_M(x) > 0$ sur $]3\,;10]$.

(c) $C_M(0{,}5) = 1 - 6\ln\frac{1}{2} + 10 = 11 + 6\ln 2 \approx 15{,}16$.
$C_M(3) = 16 - 6\ln 3 \approx 9{,}41$. $C_M(10) = 30 - 6\ln 10 \approx 16{,}18$.

x	0,5	3	10
C′(x)	−	0	+
C(x)	$11+6\ln 2$ ↘	$16-6\ln 3$	↗ $30-6\ln 10$

(d) C_M atteint son minimum en $x = 3$. L'atelier doit donc fabriquer 300 bols par mois. Le coût moyen minimal est alors $16 - 6\ln 3 \approx 9{,}41$ € par bol.

Ex. 40 ★★☆ **La copie de Malo : courbe et tangente**

(a) $\ln 0$ n'existe pas, et g n'est pas définie en 0. Il faut écrire : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x) = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

(b) Non, elle est fausse. $g(x) \geqslant 0$ s'écrit $x - 1 - \ln x \geqslant 0$, c'est-à-dire $\ln x \leqslant x - 1$. Conclusion correcte : pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

(c) $\ln 1 = 0$ et le nombre dérivé en 1 vaut $\frac{1}{1} = 1$. La tangente a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 0$, soit $y = x - 1$. Comme $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$, la courbe de ln est au-dessous de sa tangente.

(d) Vrai. Avec $x = 0{,}5 > 0$ dans $\ln x \leqslant x - 1$, on obtient $\ln 0{,}5 \leqslant 0{,}5 - 1$, soit $\ln 0{,}5 \leqslant -0{,}5$.

Ex. 41 ★★★ **Un minimum en e², une tangente en e**

(a) $x\ln x$ est un produit uv avec $u = x$, $v = \ln x$, $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{x}$.
Donc $(x\ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Ainsi $f'(x) = \ln x + 1 - 3 = \ln x - 2$.

(b) $f'(x) > 0 \iff \ln x > 2 \iff x > e^2$, par stricte croissance de exp. Sur $[1\,;+\infty[$: $\mathcal{S} = \left]e^2\,;+\infty\right[$.
Donc $f'(x) < 0$ sur $\left[1\,;e^2\right[$ et $f'\left(e^2\right) = 0$.

(c) $f(x) = x(\ln x - 3) + 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3) = +\infty$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a $f(1) = 0 - 3 + 2 = -1$ et $f\left(e^2\right) = 2e^2 - 3e^2 + 2 = 2 - e^2 \approx -5{,}389$.

x	1	e²	+∞
f′(x)	−	0	+
f(x)	−1 ↘	$2-e^2$	↗ +∞

Le minimum de f vaut $2 - e^2$, atteint en $x = e^2$.

(d) $f(e) = e\ln e - 3e + 2 = 2 - 2e$ et $f'(e) = \ln e - 2 = -1$. $T : y = -1 \times (x-e) + 2 - 2e$, soit $y = -x + 2 - e$.

(e) Vrai. D'après le tableau, f est décroissante sur $\left[1\,;e^2\right]$, donc pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leqslant f(1) = -1$. Inès a raison.

Ex. 42 ★★★ **Bénéfice d'une confiturerie de Valence**

(a) $\ln(2x+1)$ existe si $2x+1 > 0$, soit $x > -\frac{1}{2}$. Or $[0\,;20] \subset \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, donc B est définie sur $[0\,;20]$.
Avec $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$: $B'(x) = 6 \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \frac{12-(2x+1)}{2x+1} = \frac{11-2x}{2x+1}$.

Ex. 42 **(suite)**

(b) Sur $[0\,;20]$, $2x+1>0$, donc $B'(x)$ a le signe de $11-2x$. On a $11-2x>0 \iff x<\frac{11}{2}$.
$B(0)=6\ln 1-0=0$, $B\left(\frac{11}{2}\right)=6\ln 12-\frac{11}{2}$ et $B(20)=6\ln 41-20\approx 2{,}281$.

x	0		$\frac{11}{2}$		20
B′(x)		+	0	−	
B(x)	0	↗	$6\ln 12-\frac{11}{2}$	↘	$6\ln 41-20$

B est croissante sur $\left[0\,;\frac{11}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{11}{2}\,;20\right]$.

(c) $12=2^2\times 3$, donc $\ln 12=2\ln 2+\ln 3$. Le maximum vaut $B\left(\frac{11}{2}\right)=12\ln 2+6\ln 3-\frac{11}{2}\approx 9{,}409$ milliers d'euros. Le bénéfice maximal est d'environ 9 409 €, atteint pour 5,5 tonnes.

(d) Vrai. Sur $\left[0\,;\frac{11}{2}\right]$, B est croissante, donc $B(x)\geqslant B(0)=0$. Sur $\left[\frac{11}{2}\,;20\right]$, B est décroissante, donc $B(x)\geqslant B(20)\approx 2{,}281>0$. Ainsi $B(x)\geqslant 0$ sur $[0\,;20]$: le gérant a raison.