Logarithme : études de fonctions – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Fonction logarithme · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: ne pas oublier u' au numérateur ; et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, pas $\dfrac{1}{\ln x}$.
- $\ln(u(x))$ n'existe que si $u(x) > 0$, strictement : l'ensemble de définition vient en premier.
- Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$: le signe de $\dfrac{N(x)}{x}$ est celui de $N(x)$.
- $\dfrac{\ln x}{x}$ en 0^+ n'est pas une forme indéterminée : c'est $\dfrac{-\infty}{0^+}$, la limite est $-\infty$.
- Forme « $\infty - \infty$ » : on factorise par le terme le plus fort pour faire apparaître $\dfrac{\ln x}{x^n}$; « négligeable » ne veut pas dire que la différence tend vers 0.
- Position de la courbe et de la tangente $y = ax + b$: on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$, pas celui de $f(x)$.

Exercice 1 – Dériver ★

Calcule la dérivée de chaque fonction, dérivable sur l'intervalle indiqué ($]0\,;+\infty[$ sinon).

a) $f(x) = x^2 - 3\ln x$

b) $g(x) = \ln(3x+1)$ sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

c) $h(x) = x\,\ln x$

d) $k(x) = \ln\left(x^2+4\right)$ sur $\mathbb{R}$

e) $m(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

f) $p(x) = \ln(5-2x)$ sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$

g) $r(x) = (\ln x)^2$

h) $s(x) = \ln(e^x+1)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 – Limites avec ln ★

Détermine chaque limite. Dis s'il y a une forme indéterminée, puis cite la règle utilisée.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + x)$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,\ln x$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

Exercice 3 – Ensemble de définition ★

Donne l'ensemble de définition D de chaque fonction.

a) $f(x) = \ln(2x - 6)$

b) $f(x) = \ln(4 - x)$

c) $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$

d) $f(x) = \ln\left(x^2 - 9\right)$

e) $f(x) = \ln \dfrac{x + 1}{x - 2}$

f) $f(x) = \ln(-x)$

g) $f(x) = \ln x + \ln(3 - x)$

h) $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$

Exercice 4 – Étudier les variations ★★

Calcule la dérivée, étudie son signe, dresse le tableau de variations et donne la valeur exacte de l'extremum.

a) $f(x) = x - 2\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$

b) $g(x) = x\,\ln x - x$ sur $]0\,;\,+\infty[$

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

d) $k(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 5\right)$ sur $\mathbb{R}$

e) $m(x) = 3\ln x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

Exercice 5 – Lever une forme indéterminée ★★

Détermine chaque limite en levant la forme indéterminée.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - x^2\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 2x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(2x + 1) - \ln x)$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x + 1}$

Exercice 6 – Tangentes ★★

Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a donné.

a) $f(x) = \ln x$, $a = 2$.

b) $f(x) = x \ln x$, $a = e$.

c) $f(x) = \ln(2x-1)$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $a = 1$.

d) $f(x) = (\ln x)^2$, $a = e$.

e) $f(x) = \ln\left(x^2+3\right)$, $a = 1$.

Exercice 7 – Étude complète ★★★

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montre que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.
3. Dresse le tableau de variations de f et donne son minimum.
4. Déduis-en que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x < \dfrac{x^2}{2}$.
5. Détermine une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.

Exercice 8 – La courbe sous sa tangente ★★★

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $\ln$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montre que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.
2. On pose $g(x) = \ln x - (x-1)$. Calcule $g'(x)$ et dresse le tableau de variations de g.
3. Déduis-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.
4. Sans calculatrice, montre que $\ln 1{,}1 < 0{,}1$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque affirmation d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\left(\ln\left(x^2+5\right)\right)' = \dfrac{1}{x^2+5}$

b) $\left(x^2 \ln x\right)' = 2$

c) « $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée. »

d) « $\ln x$ est négligeable devant $3x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x) = 0$. »

e) $T : y = \dfrac{x}{e}$ est la tangente à la courbe de $\ln$ en e. « $\ln x > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc la courbe est au-dessus de T sur cet intervalle. »

f) « $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$ est définie sur $[-2\,;\,2]$. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. La dérivée de $x \mapsto \ln\left(4x^2+1\right)$ est :

   A $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+1}$ **B** $x \mapsto \dfrac{8x}{4x^2+1}$ **C** $x \mapsto \dfrac{4x}{4x^2+1}$ **D** $x \mapsto 8x$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2\ln x - x)$ vaut :

   A 0 **B** $+\infty$ **C** 2 **D** $-\infty$

3. L'ensemble de définition de $x \mapsto \ln\left(x^2 - 4x\right)$ est :

   A $]-\infty\,;\,0[\cup]4\,;\,+\infty[$ **B** $]0\,;\,4[$ **C** $]4\,;\,+\infty[$ **D** $\mathbb{R}$

4. Le minimum de $x \mapsto x\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$ vaut :

   A 0 **B** -1 **C** $-\dfrac{1}{e}$ **D** $\dfrac{1}{e}$

5. La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse e^2 a pour équation :

   A $y = \dfrac{x}{e^2}$ **B** $y = \dfrac{x}{e^2} + 2$ **C** $y = 2x - e^2$ **D** $y = \dfrac{x}{e^2} + 1$

6. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\ln x + 3)$ vaut :

   A 3 **B** $-\infty$ **C** $+\infty$ **D** 0

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).