Corrigé – Logarithme : études de fonctions

Mathématiques – Terminale spécialité

Fonction logarithme · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Dériver ★

Calcule la dérivée de chaque fonction, dérivable sur l'intervalle indiqué ($]0\,;+\infty[$ sinon).

a) $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$f'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x}$$

b) On pose $u(x) = 3x+1$, $u'(x) = 3$, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$$g'(x) = \frac{3}{3x+1}$$

c) On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$(uv)' = u'v + uv'$:

$$h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

d) $x^2 + 4 > 0$ pour tout réel x.

On pose $u(x) = x^2+4$, $u'(x) = 2x$, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$$

e) On pose $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, puis on simplifie par x :

$$m'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

f) On pose $u(x) = 5 - 2x$, $u'(x) = -2$, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$$p'(x) = -\frac{2}{5-2x}$$

g) $\left(u^2\right)' = 2u'u$ avec $u(x) = \ln x$:

$$r'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x}$$

h) $e^x + 1 > 0$.

On pose $u(x) = e^x + 1$, $u'(x) = e^x$, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$s'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Exercice 2 – Limites avec ln ★

Détermine chaque limite. Dis s'il y a une forme indéterminée, puis cite la règle utilisée.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x + x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$.

Ce n'est pas une forme indéterminée : pas de croissance comparée.

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

d) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

e) Forme $0 \times \infty$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.

f) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$: x^2 l'emporte sur $\ln x$.

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\ln 1 = 0$.

Par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

h) Pour $x > 1$, $\dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ par croissance comparée (et $\dfrac{\ln x}{x} > 0$ pour $x > 1$).

Par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

Exercice 3 – Ensemble de définition ★

Donne l'ensemble de définition D de chaque fonction.

a) Il faut $2x - 6 > 0 \iff 2x > 6 \iff x > 3$.

$D =]3\,;\,+\infty[$

b) Il faut $4 - x > 0 \iff x < 4$.
$D =]-\infty\,;\,4[$

c) $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout réel x : aucune condition.
$D = \mathbb{R}$

d) Il faut $x^2 - 9 > 0$.
Le trinôme $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ a pour racines -3 et 3 ; il est positif à l'extérieur des racines.
$D =]-\infty\,;\,-3[\cup]3\,;\,+\infty[$

e) Il faut $\dfrac{x+1}{x-2} > 0$ (et $x \neq 2$).
Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$D =]-\infty\,;\,-1[\cup]2\,;\,+\infty[$

f) Il faut $-x > 0 \iff x < 0$.
$D =]-\infty\,;\,0[$

g) Il faut $x > 0$ **et** $3 - x > 0$, soit $x > 0$ et $x < 3$.
$D =]0\,;\,3[$

h) Il faut $1 - x^2 > 0$.
Le trinôme $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ a pour racines -1 et 1 ; son coefficient de x^2 est négatif : il est positif entre les racines.
$D =]-1\,;\,1[$

Exercice 4 – Étudier les variations ★★

Calcule la dérivée, étudie son signe, dresse le tableau de variations et donne la valeur exacte de l'extremum.

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$
$= \dfrac{x-2}{x}$

$x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$, négatif avant 2 et positif après.

x	0		2		$+\infty$
f		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	

Minimum : $f(2) = 2 - 2\ln 2$.

b) On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

$\ln x < 0$ sur $]0\,;\,1[$, $\ln 1 = 0$ et $\ln x > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
g		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Minimum : $g(1) = 1 \times 0 - 1 = -1$.

c) On pose $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\dfrac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$x^2 > 0$: $h'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$.

$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$ (exponentielle strictement croissante).

x	0		e		$+\infty$
h		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	

Maximum : $h(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

d) $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$: k est définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 - 2x + 5$, $u'(x) = 2x - 2$, et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$:

$$k'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}$$

Le dénominateur est strictement positif : $k'(x)$ a le signe de $2x - 2$, négatif avant 1 et positif après.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
k		$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	

Minimum : $k(1) = \ln(1 - 2 + 5) = \ln 4 = 2\ln 2$.

e) $m'(x) = \dfrac{3}{x} - x$
$= \dfrac{3 - x^2}{x}$

$x > 0$: $m'(x)$ a le signe de $3 - x^2$, qui s'annule en $\sqrt{3}$ sur $]0\,;\,+\infty[$: positif avant, négatif après.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
m		$\nearrow$	$\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}$	$\searrow$	

Maximum : $m(\sqrt{3}) = 3\ln\sqrt{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}\ln 3 - \dfrac{3}{2}$ (car $\ln\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\ln 3$).

Exercice 5 – Lever une forme indéterminée ★★

Détermine chaque limite en levant la forme indéterminée.

a) Forme $\infty - \infty$.
Pour $x > 0$, $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée : la parenthèse tend vers 1.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

b) Forme $\infty - \infty$.
Pour $x > 0$, $\ln x - x^2 = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée : la parenthèse tend vers -1.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right) = -\infty$.

c) Forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Pour $x > 0$, $\dfrac{\ln x + 2x}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + 2$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée.
Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 2x}{x} = 2$.

d) Forme $\infty - \infty$.
Pour $x > 0$, $\ln(2x+1) - \ln x = \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ ($\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$).
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$.
Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(2x+1) - \ln x) = \ln 2$.

e) Forme $\infty - \infty$.
Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x} + \ln x = \dfrac{1 + x\,\ln x}{x}$.
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\,\ln x = 0$ par croissance comparée, donc le numérateur tend vers 1, et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0^+$.
Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$.

f) Forme $\frac{\infty}{\infty}$.
Pour $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x+1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x+1}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ (quotient des termes de plus haut degré).
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$.

Exercice 6 – Tangentes ★★

Détermine une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a donné.

a) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(2) = \ln 2$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f'(2) = \dfrac{1}{2}$.
$y = \dfrac{1}{2}(x-2) + \ln 2$, soit $y = \dfrac{1}{2}x - 1 + \ln 2$.

b) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(e) = e \times \ln e = e$; $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$, donc $f'(e) = 2$.
$y = 2(x-e) + e = 2x - 2e + e$, soit $y = 2x - e$.

c) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(1) = \ln 1 = 0$; $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, donc $f'(1) = 2$.
$y = 2(x-1) + 0$, soit $y = 2x - 2$.

d) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(e) = (\ln e)^2 = 1$; $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x}$, donc $f'(e) = \dfrac{2}{e}$.
$y = \dfrac{2}{e}(x-e) + 1 = \dfrac{2}{e}x - 2 + 1$, soit $y = \dfrac{2}{e}x - 1$.

e) Tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f(1) = \ln 4 = 2\ln 2$; $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$, donc $f'(1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
$y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 2\ln 2$, soit $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + 2\ln 2$.

Exercice 7 – Étude complète ★★★

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (-2\ln x) = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
   En $+\infty$, forme $\infty - \infty$.
   Pour $x > 0$, $x^2 - 2\ln x = x^2\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée : la parenthèse tend vers 1.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$
$= \dfrac{2x^2 - 2}{x}$
$= \dfrac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}$
$= \dfrac{2\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)}{x}$

   On reconnaît $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ et $x + 1 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$, négatif avant 1 et positif après.

x	0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Minimum : $f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.

4. Le minimum de f est 1 : pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 1 > 0$.
   Donc $x^2 - 2\ln x > 0$, soit $2\ln x < x^2$, et en divisant par 2 : $\ln x < \dfrac{x^2}{2}$.

5. $f(e) = e^2 - 2\ln e = e^2 - 2$; $f'(e) = 2e - \dfrac{2}{e}$ (avec $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$).
   $y = \left(2e - \dfrac{2}{e}\right)(x - e) + e^2 - 2 = \left(2e - \dfrac{2}{e}\right)x - 2e^2 + 2 + e^2 - 2$,
   soit $y = \left(2e - \dfrac{2}{e}\right)x - e^2$.

Exercice 8 – La courbe sous sa tangente ★★★

1. $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$: $y = 1 \times (x - 1) + 0$, soit $y = x - 1$.

2. $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$
$= \dfrac{1 - x}{x}$

   $x > 0$: $g'(x)$ a le signe de $1 - x$, positif avant 1 et négatif après.

x	0		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

   Maximum : $g(1) = \ln 1 - 0 = 0$.

3. Le maximum de g est 0 : $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.
   Donc $\ln x \leqslant x - 1$: $\mathcal{C}$ est en dessous de T, et ne la touche qu'au point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

4. On applique la question 3 avec $x = 1{,}1 \neq 1$: $\ln 1{,}1 < 1{,}1 - 1$, soit $\ln 1{,}1 < 0{,}1$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque affirmation d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) *Le u' manque au numérateur :* $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ *avec* $u'(x) = 2x$.

$$\left(\ln\left(x^2+5\right)\right)' = \frac{2x}{x^2+5}$$

b) *On ne multiplie pas les dérivées :* $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\left(x^2 \ln x\right)' = 2x\ \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ \ln x + x$$

c) *Ce n'est pas une forme indéterminée.*

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0^+$: par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$.

d) *Négligeable ne veut pas dire que la différence tend vers* 0 *: on factorise.*

Pour $x>0$, $\ln x - 3x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 3\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, la parenthèse tend vers -3.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 3x) = -\infty$.

e) *On étudie le signe de* $\ln x - \dfrac{x}{e}$*, pas celui de* $\ln x$.

Avec $d(x) = \ln x - \dfrac{x}{e}$: $d'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-x}{ex}$, positif avant e et négatif après.

Maximum $d(e) = 1 - 1 = 0$: $d(x) \leqslant 0$, la courbe est en dessous de T sur tout $]0\,;\,+\infty[$.

f) *L'argument doit être* ***strictement*** *positif : en* ± 2*,* $\ln 0$ *n'existe pas.*

$4 - x^2 > 0 \iff x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$: $D =]-2\,;\,2[$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. La dérivée de $x \mapsto \ln\left(4x^2+1\right)$ est :

Réponse B : $x \mapsto \dfrac{8x}{4x^2+1}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u'(x) = 8x$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\ln x - x)$ vaut :

Réponse D : $-\infty$

$2\ln x - x = x\left(2\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$; la parenthèse tend vers -1 par croissance comparée.

3. L'ensemble de définition de $x \mapsto \ln\left(x^2-4x\right)$ est :

Réponse A : $]-\infty\,;\,0[\cup]4\,;\,+\infty[$

$x^2 - 4x = x(x-4) > 0$ à l'extérieur des racines 0 et 4.

4. Le minimum de $x \mapsto x\ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$ vaut :

Réponse C : $-\dfrac{1}{e}$

La dérivée $\ln x + 1$ s'annule en e^{-1}, négative avant, positive après ; $e^{-1}\ln e^{-1} = -e^{-1}$.

5. La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse e^2 a pour équation :

Réponse D : $y = \dfrac{x}{e^2} + 1$

$\ln e^2 = 2$ et $\ln'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$: $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2 = \dfrac{x}{e^2} + 1$.

6. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x + 3)$ vaut :

Réponse A : 3

$x \ln x \to 0$ en 0^+ par croissance comparée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).