Logarithme : calculs, équations – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Fonction logarithme · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, mais $\ln(a+b)$ ne se décompose pas.
- $\ln(a^2) = 2\ln a$, alors que $(\ln a)^2$ est un carré : ne pas les confondre.
- Domaine d'abord : chaque argument de ln doit être strictement positif ; une solution hors du domaine se rejette.
- $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$: une exponentielle est toujours strictement positive.
- Seuil $q^n < s$ avec $0 < q < 1$: $\ln q < 0$, donc diviser par $\ln q$ change le sens.
- $e^{-\ln b} = \dfrac{1}{b}$ et $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$ (pour $b > 0$) : le signe moins ne sort pas devant l'exponentielle.

Exercice 1 – Valeurs exactes ★

Calcule sans calculatrice. Rappels : $\ln\left(e^a\right) = a$ pour tout réel a, et $e^{\ln b} = b$ pour tout réel $b > 0$.

a) $\ln\left(e^3\right)$

b) $e^{\ln 5}$

c) $\ln 1 + \ln e$

d) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$

e) $e^{2\ln 3}$

f) $e^{-\ln 4}$

g) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$

h) $e^{\ln 7 - \ln 2}$

Exercice 2 – Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$ ★

Écris chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$. Décompose d'abord en facteurs premiers.

a) $\ln 8$

b) $\ln 18$

c) $\ln \dfrac{1}{9}$

d) $\ln 72$

e) $\ln \dfrac{16}{3}$

f) $\ln\left(\sqrt{6}\right)$

g) $\ln 0{,}75$

h) $\ln 54 - \ln 4$

Exercice 3 – Équations avec exp et ln ★

Résous chaque équation. S'il y a un ln, commence par le domaine.

a) $e^x = 7$

b) $\ln x = -2$

c) $e^{3x-1} = 2$

d) $e^x = -3$

e) $\ln(2x+1) = 0$

f) $e^{-x} = \dfrac{1}{5}$

g) $\ln(x-3) = 1$

h) $4e^{2x} = 12$

Exercice 4 – Simplifier ★★

Simplifie au maximum. Dans la dernière, x est un réel quelconque.

a) $\ln 50 + \ln 2 - \ln 25$

b) $3\ln 2 - \ln \dfrac{1}{4}$

c) $e^{\ln 3 + 2\ln 2}$

d) $\ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$

e) $2\ln\left(e^{3x}\right) - \ln\left(e^{x+1}\right)$

Exercice 5 – Équations : le domaine d'abord ★★

Résous chaque équation. Donne le domaine, puis vérifie que chaque solution y est.

a) $\ln(3x-2) = \ln(x+4)$

b) $\ln x + \ln(x-2) = \ln 8$

c) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$

d) $2\ln x = \ln(2x+3)$

e) $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

f) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Exercice 6 – Inéquations ★★

Résous chaque inéquation, en donnant d'abord le domaine s'il y a un ln.

a) $\ln x < 3$

b) $e^{2x+1} \geqslant 4$

c) $\ln(5-x) \geqslant 0$

d) $\ln(2x-1) < \ln(x+3)$

e) $e^{-3x} > 2$

f) $3 - 2\ln x > 0$

Exercice 7 – Deux logarithmes face à face ★★★

On pose $A(x) = \ln(x-1) + \ln(x+2)$ et $B(x) = \ln(4x-2)$.

1. Détermine l'ensemble D des réels x pour lesquels $A(x)$ et $B(x)$ existent.
2. Résous dans D l'équation $A(x) = B(x)$.
3. Résous dans D l'inéquation $A(x) < B(x)$.
4. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \leqslant 0$.

Exercice 8 – Des seuils (calculatrice autorisée) ★★★

Pour chaque question, résous l'inéquation avec ln, puis conclus par un entier.

1. Détermine le plus petit entier naturel n tel que $0{,}85^n < 0{,}1$.
2. Un capital de 5000 € est placé à intérêts composés : au bout de n années, il vaut $5000 \times 1{,}03^n$ euros. Au bout de combien d'années dépasse-t-il 8000 € ?
3. On lance n fois une pièce truquée ; la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile » est $1 - 0{,}9^n$. Combien de lancers faut-il au minimum pour que cette probabilité soit au moins égale à $0{,}95$?
4. La suite (u_n) est définie par $u_n = 2 - 3 \times 0{,}6^n$. À partir de quel rang u_n est-il à moins de 10^{-3} de 2 ?

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\ln 3 + \ln 5 = \ln 8$

b) $\ln 9 = (\ln 3)^2$

c) $\ln x + \ln(x-3) = \ln 4 \iff x(x-3) = 4 \iff x = -1$ ou $x = 4$, donc $S = \{-1\,;\,4\}$.

d) $e^{2x} = -1 \iff 2x = \ln(-1) \iff x = \dfrac{\ln(-1)}{2}$

e) $0{,}7^n < 0{,}2 \iff n \ln 0{,}7 < \ln 0{,}2 \iff n < \dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}7}$

f) $e^{-\ln 5} = -5$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\ln 20 - \ln 5$ est égal à :

   A $\ln 15$ **B** $\dfrac{\ln 20}{\ln 5}$ **C** $2\ln 2$ **D** 4

2. L'ensemble des solutions de $\ln(x+2) < 0$ est :

   A $]-2\,;\,-1[$ **B** $]-\infty\,;\,-1[$ **C** $]-1\,;\,+\infty[$ **D** $]-2\,;\,+\infty[$

3. La solution de $e^{1-x} = 4$ est :

   A $1 + 2\ln 2$ **B** $2\ln 2 - 1$ **C** $\ln 3$ **D** $1 - 2\ln 2$

4. (Calculatrice autorisée.) Le plus petit entier n tel que $0{,}95^n < 0{,}4$ est :

   A 17 **B** 18 **C** 8 **D** il n'existe pas

5. L'ensemble des solutions de $(\ln x)^2 = 4$ est :

   A $\{e^{-2}\,;\,e^{2}\}$ **B** $\{e^{2}\}$ **C** $\{-2\,;\,2\}$ **D** $\{e^{4}\}$

6. Pour tout réel x non nul, $\ln\left(x^2\right)$ est égal à :

   A $2\ln x$ **B** $(\ln x)^2$ **C** $\ln(2x)$ **D** $2\ln|x|$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).