Corrigé – Logarithme : calculs, équations

Mathématiques – Terminale spécialité

Fonction logarithme · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Valeurs exactes ★

Calcule sans calculatrice. Rappels : $\ln\left(e^{a}\right) = a$ pour tout réel a, et $e^{\ln b} = b$ pour tout réel $b > 0$.

a) $\ln\left(e^{3}\right)$
$= 3$

b) $e^{\ln 5}$
$= 5$

c) $\ln 1 + \ln e$
$= 0 + 1$
$= 1$

d) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{2}}\right)$
$= \ln\left(e^{-2}\right)$
$= -2$

e) $e^{2\ln 3}$
$= \left(e^{\ln 3}\right)^{2}$
$= 3^{2}$
$= 9$

f) $e^{-\ln 4}$
$= \dfrac{1}{e^{\ln 4}}$
$= \dfrac{1}{4}$

g) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
$= \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$
$= \dfrac{1}{2}$

h) $e^{\ln 7 - \ln 2}$
$= \dfrac{e^{\ln 7}}{e^{\ln 2}}$
$= \dfrac{7}{2}$

Exercice 2 – Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$ ★

Écris chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$. Décompose d'abord en facteurs premiers.

a) $\ln 8$
$= \ln\left(2^{3}\right)$
$= 3\ln 2$

b) $\ln 18$
$= \ln\left(2 \times 3^2\right)$
$= \ln 2 + \ln\left(3^2\right)$
$= \ln 2 + 2\ln 3$

c) $\ln \dfrac{1}{9}$
$= -\ln 9$
$= -\ln\left(3^2\right)$
$= -2\ln 3$

d) $\ln 72$
$= \ln\left(2^3 \times 3^2\right)$
$= \ln\left(2^3\right) + \ln\left(3^2\right)$
$= 3\ln 2 + 2\ln 3$

e) $\ln \dfrac{16}{3}$
$= \ln 16 - \ln 3$
$= \ln\left(2^4\right) - \ln 3$
$= 4\ln 2 - \ln 3$

f) $\ln\left(\sqrt{6}\right)$
$= \dfrac{1}{2}\ln 6$
$= \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$
$= \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$

g) $\ln 0{,}75$
$= \ln \dfrac{3}{4}$
$= \ln 3 - \ln\left(2^2\right)$
$= \ln 3 - 2\ln 2$

h) $\ln 54 - \ln 4$
$= \ln\left(2 \times 3^3\right) - \ln\left(2^2\right)$
$= \ln 2 + 3\ln 3 - 2\ln 2$
$= 3\ln 3 - \ln 2$

Exercice 3 – Équations avec exp et ln ★

Résous chaque équation. S'il y a un ln, commence par le domaine.

a) $e^x = 7$
$\iff x = \ln 7$ *($e^x = k \iff x = \ln k$, car $k > 0$)*
$S = \{\ln 7\}$

b) Domaine : $x > 0$.
$\ln x = -2$
$\iff x = e^{-2}$ *(on applique l'exponentielle, strictement croissante)*
$S = \left\{e^{-2}\right\}$

c) $e^{3x-1} = 2$

$\iff 3x - 1 = \ln 2$ *(on applique* $\ln$*)*

$\iff 3x = 1 + \ln 2$ *(on ajoute* 1*)*

$\iff x = \dfrac{1+\ln 2}{3}$ *(on divise par* 3*)*

$S = \left\{\dfrac{1+\ln 2}{3}\right\}$

d) $e^x = -3$

Une exponentielle est strictement positive : elle ne vaut jamais -3.

$S = \varnothing$

e) Domaine : $2x + 1 > 0$, soit $x > -\dfrac{1}{2}$.

$\ln(2x+1) = 0$

$\iff 2x + 1 = 1$ *(*$0 = \ln 1$ *et* $\ln$ *est strictement croissante)*

$\iff x = 0$

$0 > -\dfrac{1}{2}$: la solution est dans le domaine.

$S = \{0\}$

f) $e^{-x} = \dfrac{1}{5}$

$\iff -x = \ln\dfrac{1}{5}$ *(on applique* $\ln$*)*

$\iff -x = -\ln 5$ *(*$\ln\dfrac{1}{b} = -\ln b$*)*

$\iff x = \ln 5$

$S = \{\ln 5\}$

g) Domaine : $x - 3 > 0$, soit $x > 3$.

$\ln(x-3) = 1$

$\iff x - 3 = e$ *(on applique l'exponentielle, strictement croissante :* $e^1 = e$*)*

$\iff x = 3 + e$

$S = \{e + 3\}$

h) $4e^{2x} = 12$

$\iff e^{2x} = 3$ *(on divise par* 4*)*

$\iff 2x = \ln 3$ *(on applique* $\ln$*)*

$\iff x = \dfrac{\ln 3}{2}$

$S = \left\{\dfrac{\ln 3}{2}\right\}$

Exercice 4 – Simplifier ★★

Simplifie au maximum. Dans la dernière, x est un réel quelconque.

a) $\ln 50 + \ln 2 - \ln 25$

$= \ln\dfrac{50 \times 2}{25}$

$= \ln 4$

$= \ln\left(2^2\right)$

$= 2\ln 2$

b) $3\ln 2 - \ln\dfrac{1}{4}$
$= 3\ln 2 + \ln 4$
$= 3\ln 2 + 2\ln 2$
$= 5\ln 2$

c) $e^{\ln 3 + 2\ln 2}$
$= e^{\ln 3} \times e^{2\ln 2}$
$= 3 \times \left(e^{\ln 2}\right)^2$
$= 3 \times 4$
$= 12$

d) $\ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$
$= \ln\left(\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$
$= \ln\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2\right)$
$= \ln(3-1)$
$= \ln 2$

e) $2\ln\left(e^{3x}\right) - \ln\left(e^{x+1}\right)$
$= 2 \times 3x - (x+1)$
$= 6x - x - 1$
$= 5x - 1$

Exercice 5 – Équations : le domaine d'abord ★★

Résous chaque équation. Donne le domaine, puis vérifie que chaque solution y est.

a) Domaine : $3x - 2 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \dfrac{2}{3}$.
$\ln(3x-2) = \ln(x+4)$
$\iff 3x - 2 = x + 4$ *(*$\ln a = \ln b \iff a = b$*)*
$\iff 2x = 6$
$\iff x = 3$
$3 > \dfrac{2}{3}$: la solution est dans le domaine.
$S = \{3\}$

b) Domaine : $x > 0$ et $x - 2 > 0$, soit $x > 2$.
$\ln x + \ln(x-2) = \ln 8$
$\iff \ln(x(x-2)) = \ln 8$ *(*$\ln a + \ln b = \ln(ab)$*)*
$\iff x(x-2) = 8$ *(*$\ln$ *est strictement croissante)*
$\iff x^2 - 2x - 8 = 0$
$\Delta = 4 + 32 = 36$: $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$.
-2 *n'est pas dans le domaine : on l'écarte.*
$S = \{4\}$

c) Domaine : $x+1>0$ et $x-1>0$, soit $x>1$.
$\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln 3$
$\iff \ln((x+1)(x-1))=\ln 3$ *($\ln a+\ln b=\ln(ab)$)*
$\iff x^2-1=3$ *($\ln$ est strictement croissante)*
$\iff x^2=4$
$x=2$ ou $x=-2$; -2 *n'est pas dans le domaine.*
$S=\{2\}$

d) Domaine : $x>0$ et $2x+3>0$, soit $x>0$.
$2\ln x=\ln(2x+3)$
$\iff \ln(x^2)=\ln(2x+3)$ *($2\ln a=\ln(a^2)$)*
$\iff x^2=2x+3$ *($\ln$ est strictement croissante)*
$\iff x^2-2x-3=0$
$\Delta=4+12=16$: $x=-1$ ou $x=3$; on écarte -1, hors du domaine.
$S=\{3\}$

e) Domaine : $x>0$.
En posant $X=\ln x$, l'équation devient $X^2-3X+2=0$.
$(\ln x)^2-3\ln x+2=0$
$\Delta=9-8=1$: $X=\dfrac{3-1}{2}=1$ ou $X=\dfrac{3+1}{2}=2$.
$\ln x=1$ ou $\ln x=2$, soit $x=e$ ou $x=e^2$ (tous deux positifs).
$S=\{e\,;\,e^2\}$

f) $e^{2x}=(e^x)^2$.
En posant $X=e^x$, l'équation devient $X^2-X-6=0$, avec $X>0$.
$e^{2x}-e^x-6=0$
$\Delta=1+24=25$: $X=\dfrac{1-5}{2}=-2$ ou $X=\dfrac{1+5}{2}=3$.
$e^x=-2$ est impossible (une exponentielle est strictement positive).
$e^x=3 \iff x=\ln 3$.
$S=\{\ln 3\}$

Exercice 6 – Inéquations ★★

Résous chaque inéquation, en donnant d'abord le domaine s'il y a un ln.

a) Domaine : $x>0$.
On garde $x>0$ dans l'ensemble des solutions.
$\ln x<3$
$\iff x<e^3$ *(on applique l'exponentielle, strictement croissante)*
$S=]0\,;\,e^3[$

b) $e^{2x+1}\geqslant 4$
$\iff 2x+1\geqslant \ln 4$ *(on applique* $\ln$*, strictement croissante)*
$\iff 2x\geqslant 2\ln 2-1$ *($\ln 4=2\ln 2$)*
$\iff x\geqslant \ln 2-\dfrac{1}{2}$ *(on divise par* 2*)*
$S=[\ln 2-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty[$

c) Domaine : $5-x>0$, soit $x<5$.
$\ln(5-x) \geqslant 0$
$\iff 5-x \geqslant 1$ *(*$0=\ln 1$ *et* $\ln$ *est strictement croissante)*
$\iff x \leqslant 4$
$S=]-\infty\,;\,4]$

d) Domaine : $2x-1>0$ et $x+3>0$, soit $x>\dfrac{1}{2}$.
$\ln(2x-1) < \ln(x+3)$
$\iff 2x-1<x+3$ *(*$\ln$ *est strictement croissante)*
$\iff x<4$
Avec le domaine $x>\dfrac{1}{2}$:
$S=]\dfrac{1}{2}\,;\,4[$

e) $e^{-3x}>2$
$\iff -3x>\ln 2$ *(on applique* $\ln$*)*
$\iff x<-\dfrac{\ln 2}{3}$ *(on divise par* $-3<0$ *: le sens change)*
$S=]-\infty\,;\,-\dfrac{\ln 2}{3}[$

f) Domaine : $x>0$.
$3-2\ln x>0$
$\iff -2\ln x>-3$ *(on retranche* 3*)*
$\iff \ln x<\dfrac{3}{2}$ *(on divise par* -2 *: le sens change)*
$\iff x<e^{\frac{3}{2}}$ *(on applique l'exponentielle, strictement croissante)*
$S=]0\,;\,e^{\frac{3}{2}}[$

Exercice 7 – Deux logarithmes face à face ★★★

1. Il faut $x-1>0$, $x+2>0$ et $4x-2>0$, soit $x>1$, $x>-2$ et $x>\dfrac{1}{2}$.
   Les trois conditions ensemble donnent $x>1$: $D=]1\,;\,+\infty[$.

2. $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(4x-2)$
   $\iff \ln((x-1)(x+2))=\ln(4x-2)$ *(*$\ln a+\ln b=\ln(ab)$*)*
   $\iff x^2+x-2=4x-2$ *(*$\ln$ *est strictement croissante)*
   $\iff x^2-3x=0$
   $\iff x(x-3)=0$ *(on factorise par* x*)*
   $x=0$ ou $x=3$; 0 *n'est pas dans* D *: on l'écarte.*
   $S=\{3\}$

3. $\ln(x-1)+\ln(x+2)<\ln(4x-2)$
   $\iff \ln((x-1)(x+2))<\ln(4x-2)$
   $\iff x^2+x-2<4x-2$ *(*$\ln$ *est strictement croissante)*
   $\iff x(x-3)<0$
   Sur D, $x>0$: $x(x-3)$ a le signe de $x-3$.
   $\iff x-3<0$
   Avec $x>1$:
   $S=]1\,;\,3[$

4. On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: l'inéquation devient $X^2 - 4X + 3 \leqslant 0$.
   $\Delta = 16 - 12 = 4$: racines $X = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $X = \dfrac{4+2}{2} = 3$.
   Le trinôme est négatif ou nul entre ses racines : $1 \leqslant X \leqslant 3$.
   $e^{2x} - 4e^x + 3 \leqslant 0$
   $1 \leqslant e^x \leqslant 3$
   $\iff \ln 1 \leqslant x \leqslant \ln 3$ *(on applique* ln*, strictement croissante)*
   $\iff 0 \leqslant x \leqslant \ln 3$
   $S = [0\,;\,\ln 3]$

Exercice 8 – Des seuils (calculatrice autorisée) ★★★

1. $0{,}85^n < 0{,}1$
   $\iff n \ln 0{,}85 < \ln 0{,}1$ *(*ln *est strictement croissante, et* $\ln(a^n) = n\ln a$*)*
   $\iff n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85}$ *(on divise par* $\ln 0{,}85 < 0$ *: le sens change)*

   $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \approx 14{,}17$: le plus petit entier est $n = 15$.

2. $5000 \times 1{,}03^n > 8000$
   $\iff 1{,}03^n > 1{,}6$ *(on divise par* 5000*)*
   $\iff n \ln 1{,}03 > \ln 1{,}6$ *(on applique* ln*)*
   $\iff n > \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}03}$ *(on divise par* $\ln 1{,}03 > 0$ *: le sens ne change pas)*

   $\dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}03} \approx 15{,}9$: le capital dépasse 8000 € au bout de 16 années.

3. $1 - 0{,}9^n \geqslant 0{,}95$
   $\iff -0{,}9^n \geqslant -0{,}05$ *(on retranche* 1*)*
   $\iff 0{,}9^n \leqslant 0{,}05$ *(on multiplie par* -1 *: le sens change)*
   $\iff n \ln 0{,}9 \leqslant \ln 0{,}05$ *(on applique* ln*)*
   $\iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9}$ *(on divise par* $\ln 0{,}9 < 0$ *: le sens change)*

   $\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}9} \approx 28{,}43$: il faut au moins 29 lancers.

4. $2 - u_n = 3 \times 0{,}6^n$, qui est positif : on cherche les n tels que $3 \times 0{,}6^n < 0{,}001$.
   $3 \times 0{,}6^n < 0{,}001$
   $\iff 0{,}6^n < \dfrac{1}{3000}$ *(on divise par* 3*)*
   $\iff n \ln 0{,}6 < -\ln 3000$ *(on applique* ln *:* $\ln \dfrac{1}{3000} = -\ln 3000$*)*
   $\iff n > -\dfrac{\ln 3000}{\ln 0{,}6}$ *(on divise par* $\ln 0{,}6 < 0$ *: le sens change)*

   $-\dfrac{\ln 3000}{\ln 0{,}6} \approx 15{,}67$: u_n est à moins de 10^{-3} de 2 à partir du rang 16.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque calcul d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ *: on multiplie* 3 *par* 5*, on ne les additionne pas.*

$$\begin{aligned}&\ln 3 + \ln 5\\&= \ln(3 \times 5)\\&= \ln 15\end{aligned}$$

b) $\ln(3^2) = 2\ln 3$ *: l'exposant sort devant ;* $(\ln 3)^2$ *est un autre nombre.*

$$\begin{aligned}&\ln 9\\&= \ln\left(3^2\right)\\&= 2\ln 3\end{aligned}$$

c) *Le domaine a été oublié : il faut* $x > 0$ *et* $x - 3 > 0$*, soit* $x > 3$.

$$\begin{aligned}&\ln x + \ln(x-3) = \ln 4\\&\iff x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \textit{(}\ln a + \ln b = \ln(ab)\textit{, puis }\ln\textit{ est strictement croissante)}\\&x = -1 \text{ ou } x = 4 \text{ ; on écarte } -1\text{, hors du domaine.}\\&S = \{4\}\end{aligned}$$

d) $\ln(-1)$ *n'existe pas :* $\ln$ *n'est défini que pour les nombres strictement positifs.*
Une exponentielle est strictement positive : $e^{2x} = -1$ n'a aucune solution, $S = \varnothing$.

e) $\ln 0{,}7 < 0$ *: en divisant par* $\ln 0{,}7$*, le sens change.*

$$\begin{aligned}&0{,}7^n < 0{,}2\\&\iff n\ln 0{,}7 < \ln 0{,}2 \quad \textit{(on applique }\ln\textit{)}\\&\iff n > \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}7} \quad \textit{(on divise par }\ln 0{,}7 < 0\textit{)}\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}7} \approx 4{,}51$: les entiers qui conviennent sont ceux à partir de 5.

f) *Le signe moins est dans l'exposant :* $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

$$\begin{aligned}&e^{-\ln 5}\\&= \frac{1}{e^{\ln 5}}\\&= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\ln 20 - \ln 5$ est égal à :

Réponse C : $2\ln 2$
$\ln 20 - \ln 5 = \ln\dfrac{20}{5} = \ln 4 = 2\ln 2$.

2. L'ensemble des solutions de $\ln(x+2) < 0$ est :

Réponse A : $]-2\,;\,-1[$
Domaine $x > -2$; $\ln(x+2) < \ln 1 \iff x + 2 < 1 \iff x < -1$. On garde le domaine.

3. La solution de $e^{1-x} = 4$ est :

Réponse D : $1 - 2\ln 2$
$1 - x = \ln 4 = 2\ln 2$, donc $x = 1 - 2\ln 2$.

4. (Calculatrice autorisée.) Le plus petit entier n tel que $0{,}95^n < 0{,}4$ est :

Réponse B : 18
$n > \dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}95} \approx 17{,}86$ (le sens change car $\ln 0{,}95 < 0$), donc $n = 18$.

5. L'ensemble des solutions de $(\ln x)^2 = 4$ est :

Réponse A : $\left\{e^{-2}\,;\,e^{2}\right\}$
$\ln x = -2$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e^{-2}$ ou $x = e^{2}$, tous deux strictement positifs.

6. Pour tout réel x non nul, $\ln\left(x^2\right)$ est égal à :

Réponse D : $2\ln|x|$
$x^2 = |x|^2$ et $|x| > 0$: $\ln(x^2) = 2\ln|x|$. L'écriture $2\ln x$ n'a pas de sens pour $x < 0$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).