Limites de suites : calculs – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Limites de suites · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- « $\infty - \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $0 \times \infty$ » ne valent ni 0 ni 1 : ce sont des formes indéterminées, on transforme l'écriture.
- Polynôme ou quotient : on factorise par le terme de plus haut degré, en haut **et** en bas (pour $n \geqslant 1$).
- q^n : vers $+\infty$ si $q > 1$, vers 0 si $-1 < q < 1$, pas de limite si $q \leqslant -1$. Le coefficient compte : $-2 \times 3^n \to -\infty$.
- Plusieurs puissances : on factorise par la plus grande base, pour ne garder que des $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ avec $0 < \dfrac{a}{b} < 1$.
- Différence de deux racines : on multiplie et on divise par la quantité conjuguée, car $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.
- Une limite se justifie par une règle nommée : « par somme », « par produit », « par quotient ».

Exercice 1 – Opérations sur les limites ★

Détermine la limite de (u_n) en citant la règle utilisée (somme, produit, quotient).

a) $u_n = n^2 + 3n - 1$

b) $u_n = 5 - \dfrac{2}{n}$

c) $u_n = \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 - \dfrac{4}{n^2}\right)$

d) $u_n = -2n^3 - \sqrt{n}$

e) $u_n = \dfrac{7}{n^2 + 1}$

f) $u_n = -4 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$

g) $u_n = \left(\dfrac{1}{n} - 3\right)(n + 2)$

h) $u_n = \dfrac{2 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{5}{n}}$

Exercice 2 – Limite de q^n ★

Détermine la limite de (u_n), si elle existe. Compare d'abord q à -1 et à 1.

a) $u_n = 1{,}3^n$

b) $u_n = 0{,}6^n$

c) $u_n = 4 - 3 \times 0{,}8^n$

d) $u_n = -5 \times 2^n$

e) $u_n = (-0{,}4)^n$

f) $u_n = (-3)^n$

g) $u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1$

h) $u_n = \dfrac{5}{2^n}$

Exercice 3 – Forme indéterminée ou pas ? ★

Donne la forme de la limite. Si elle n'est pas indéterminée, donne la limite ; sinon, écris seulement « forme indéterminée ».

a) $u_n = n^2 - n$

b) $u_n = n^2 + n$

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$

d) $u_n = \dfrac{3}{n} \times n^2$

e) $u_n = \dfrac{1}{n} - n$

f) $u_n = (2-n)(n+3)$

g) $u_n = \sqrt{n} - n$

h) $u_n = \dfrac{n+1}{2 - \dfrac{1}{n}}$

Exercice 4 – Factoriser par le terme dominant ★★

Lève l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré, puis conclus.

a) $u_n = n^2 - 5n$

b) $u_n = -n^3 + 4n^2 + 1$

c) $u_n = 3n^4 - 100n^3$

d) $u_n = n - \sqrt{n}$

e) $u_n = 2n^2 - n^3 + 7$

Exercice 5 – Quotients ★★

Lève l'indétermination « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » en factorisant en haut et en bas par le terme de plus haut degré, puis conclus.

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

b) $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n-2}$

c) $u_n = \dfrac{5n-4}{n^2+1}$

d) $u_n = \dfrac{1-4n^2}{2n^2+n}$

e) $u_n = \dfrac{3n^3-n}{1-n^3}$

f) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+5}$

Exercice 6 – Plusieurs puissances ★★

Factorise par la puissance de plus grande base, puis conclus.

a) $u_n = 5^n - 2^n$

b) $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{4^n}$

c) $u_n = \dfrac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 1}$

d) $u_n = 2^n - 3^n$

e) $u_n = \dfrac{6^n - 5^n}{6^n + 4^n}$

Exercice 7 – Avec la quantité conjuguée ★★★

Multiplie et divise par la quantité conjuguée, puis conclus. Toutes les suites sont définies pour $n \geqslant 2$.

a) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

c) $u_n = n - \sqrt{n^2 - 2n}$

d) $u_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

Exercice 8 – Deux sommes ★★★

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \cdots + 0{,}8^n$, $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ (pour $n \geqslant 1$) et $R_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$.

1. Montre que $S_n = 5(1 - 0{,}8^{n+1})$.
2. Déduis-en la limite de (S_n).
3. On admet que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Détermine la limite de $\dfrac{T_n}{n^2}$.
4. Exprime R_n en fonction de n, puis détermine la limite de $\dfrac{R_n}{3^n}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) « $\lim (n^3 - n^2) = +\infty - \infty = 0$. »

b) « $\lim \dfrac{n+5}{3n} = 1$, car $\dfrac{\infty}{\infty} = 1$. »

c) « $q = -1{,}5$ et $|q| > 1$, donc $\lim (-1{,}5)^n = +\infty$. »

d) « $\lim 1{,}1^n = +\infty$, donc $\lim (2 - 4 \times 1{,}1^n) = +\infty$. »

e) « $\lim \dfrac{4n^2 + n}{2n + 1} = \dfrac{4}{2} = 2$ (quotient des coefficients). »

f) « $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1-n} = 1$, donc la limite est 1. »

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\lim \dfrac{2n^2 - n}{3 - 4n^2}$ vaut :

   A $\dfrac{1}{2}$ **B** $-\dfrac{2}{3}$ **C** 0 **D** $-\dfrac{1}{2}$

2. $\lim(5 - 2 \times 0{,}7^n)$ vaut :

   A 3 **B** 5 **C** $-\infty$ **D** 0

3. $\lim(4^n - 3^n)$ vaut :

   A $+\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $-\infty$

4. La suite $((-1{,}2)^n)$:

   A tend vers $+\infty$ **B** tend vers 0 **C** n'a pas de limite **D** tend vers $-\infty$

5. $\lim\left(\sqrt{n^2 + 6n} - n\right)$ vaut :

   A 0 **B** $+\infty$ **C** 3 **D** 6

6. Laquelle de ces formes est indéterminée ?

   A $+\infty + \infty$ **B** $0 \times \infty$ **C** $\dfrac{1}{+\infty}$ **D** $(+\infty) \times (-\infty)$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).