Corrigé – Limites de suites : calculs

Mathématiques – Terminale spécialité

Limites de suites · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Opérations sur les limites ★

Détermine la limite de (u_n) en citant la règle utilisée (somme, produit, quotient).

a) $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim (3n-1) = +\infty$.
Par somme, $\lim u_n = +\infty$.

b) $\lim \dfrac{2}{n} = 0$.
Par somme, $\lim u_n = 5$.

c) $\lim \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$ et $\lim \left(2 - \dfrac{4}{n^2}\right) = 2$.
Par produit ($3 \times 2 = 6$), $\lim u_n = 6$.

d) $\lim \left(-2n^3\right) = -\infty$ et $\lim \left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$.
Par somme, $\lim u_n = -\infty$.

e) $\lim \left(n^2 + 1\right) = +\infty$; le numérateur est constant.
Par quotient, $\lim u_n = 0$.

f) $\lim \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$.
Par somme, $\lim u_n = -4$.

g) $\lim \left(\dfrac{1}{n} - 3\right) = -3$ et $\lim (n+2) = +\infty$.
Un facteur tend vers un nombre négatif, l'autre vers $+\infty$.
Par produit (règle des signes), $\lim u_n = -\infty$.

h) $\lim \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim \left(1 + \dfrac{5}{n}\right) = 1$ (non nul).
Par quotient, $\lim u_n = 2$.

Exercice 2 – Limite de q^n ★

Détermine la limite de (u_n), si elle existe. Compare d'abord q à -1 et à 1.

a) $q = 1{,}3 > 1$, donc $\lim 1{,}3^n = +\infty$.
D'après le cours, $\lim u_n = +\infty$.

b) $-1 < 0{,}6 < 1$, donc $\lim 0{,}6^n = 0$.
D'après le cours, $\lim u_n = 0$.

c) $-1 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim 0{,}8^n = 0$ et $\lim(-3 \times 0{,}8^n) = 0$.
Par somme, $\lim u_n = 4$.

d) $2 > 1$, donc $\lim 2^n = +\infty$; on multiplie par $-5 < 0$.
Par produit, $\lim u_n = -\infty$.

e) $-1 < -0{,}4 < 1$, donc $\lim (-0{,}4)^n = 0$ (les termes changent de signe mais se rapprochent de 0).
D'après le cours, $\lim u_n = 0$.

f) $q = -3 \leqslant -1$ *: la suite n'a pas de limite.*
Les termes changent de signe à chaque rang (1, -3, 9, $-27\ldots$) et s'éloignent de 0 : ni limite finie, ni limite infinie.

g) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.
Par produit puis par somme, $\lim u_n = 1$.

h) $\dfrac{5}{2^n} = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.
Par produit, $\lim u_n = 0$.

Exercice 3 – Forme indéterminée ou pas ? ★

Donne la forme de la limite. Si elle n'est pas indéterminée, donne la limite ; sinon, écris seulement « forme indéterminée ».

a) $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim (-n) = -\infty$: forme « $+\infty - \infty$ ».
C'est une forme indéterminée : il faudra transformer l'écriture.

b) $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim n = +\infty$: forme « $+\infty + \infty$ », qui n'est pas indéterminée.
Par somme, $\lim u_n = +\infty$.

c) $\lim (n+1) = +\infty$ et $\lim n^2 = +\infty$: forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
C'est une forme indéterminée : il faudra transformer l'écriture.

d) $\lim \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim n^2 = +\infty$: forme « $0 \times \infty$ ».
C'est une forme indéterminée : il faudra transformer l'écriture.

e) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim (-n) = -\infty$: forme « $0 - \infty$ », qui n'est pas indéterminée.
Par somme, $\lim u_n = -\infty$.

f) $\lim (2-n) = -\infty$ et $\lim (n+3) = +\infty$: forme « $-\infty \times (+\infty)$ », qui n'est pas indéterminée.
Par produit, $\lim u_n = -\infty$.

g) $\lim \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim (-n) = -\infty$: forme « $+\infty - \infty$ ».
C'est une forme indéterminée : il faudra transformer l'écriture.

h) $\lim (n+1) = +\infty$ et $\lim \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2$: forme « $\dfrac{+\infty}{2}$ », qui n'est pas indéterminée.
Par quotient, $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4 – Factoriser par le terme dominant ★★

Lève l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré, puis conclus.

a) Forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour $n \geqslant 1$:

$u_n = n^2\left(1 - \dfrac{5}{n}\right)$ *(on factorise par n^2)*

$\lim n^2 = +\infty$ et $\lim\left(1 - \dfrac{5}{n}\right) = 1$.

Par produit, $\lim u_n = +\infty$.

b) Forme « $-\infty + \infty$ ».

Pour $n \geqslant 1$:

$u_n = n^3\left(-1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right)$ *(on factorise par n^3)*

$\lim n^3 = +\infty$ et $\lim\left(-1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right) = -1$.

Par produit, $\lim u_n = -\infty$.

c) Forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour $n \geqslant 1$:

$u_n = n^4\left(3 - \dfrac{100}{n}\right)$

$\lim n^4 = +\infty$ et $\lim\left(3 - \dfrac{100}{n}\right) = 3$.

Le coefficient 100 *ne change rien : c'est le degré qui compte.*

Par produit, $\lim u_n = +\infty$.

d) Forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} = \dfrac{n}{\sqrt{n}}$:

$u_n = n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *(on factorise par n)*

$\lim n = +\infty$ et $\lim\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Par produit, $\lim u_n = +\infty$.

e) Forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour $n \geqslant 1$:

$u_n = n^3\left(\dfrac{2}{n} - 1 + \dfrac{7}{n^3}\right)$ *(on factorise par n^3, le plus haut degré)*

$\lim n^3 = +\infty$ et $\lim\left(\dfrac{2}{n} - 1 + \dfrac{7}{n^3}\right) = -1$.

Par produit, $\lim u_n = -\infty$.

Exercice 5 – Quotients ★★

Lève l'indétermination « $\frac{\infty}{\infty}$ » en factorisant en haut et en bas par le terme de plus haut degré, puis conclus.

a) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \quad \textit{(on simplifie par } n \neq 0\textit{)}$$

$\lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right) = 1$.

Par quotient, $\lim u_n = 2$.

b) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}$$

$$u_n = n \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}} \quad \textit{(car } \frac{n^2}{n} = n\textit{)}$$

$\lim\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}}\right) = \frac{1}{3}$ et $\lim n = +\infty$.

Par produit, $\lim u_n = +\infty$.

c) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n\left(5-\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$u_n = \frac{5-\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \quad \textit{(car } \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\textit{)}$$

$\lim\left(5-\frac{4}{n}\right) = 5$ et $\lim\left(n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) = +\infty$.

Par quotient, $\lim u_n = 0$.

d) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}-4\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{n^2}-4}{2+\frac{1}{n}}$$

$\lim\left(\frac{1}{n^2}-4\right) = -4$ et $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$.

Par quotient ($\frac{-4}{2} = -2$), $\lim u_n = -2$.

e) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n^3\left(3 - \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(\dfrac{1}{n^3} - 1\right)}$$

$$u_n = \frac{3 - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^3} - 1}$$

$\lim\left(3 - \dfrac{1}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\left(\dfrac{1}{n^3} - 1\right) = -1$.

Par quotient, $\lim u_n = -3$.

f) Pour $n \geqslant 1$, on factorise par $\sqrt{n}$:

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$u_n = \frac{2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}}$$

$\lim\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$ et $\lim\left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Par quotient, $\lim u_n = 2$.

Exercice 6 – Plusieurs puissances ★★

Factorise par la puissance de plus grande base, puis conclus.

a) Forme « $+\infty - \infty$ ».

$u_n = 5^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)$ *(car* $\dfrac{2^n}{5^n} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$*)*

$-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, donc $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$; et $\lim 5^n = +\infty$.

Par produit, $\lim u_n = +\infty$.

b) $u_n = \left(\dfrac{2}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ *(on divise chaque terme par* 4^n*)*

$u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$ sont dans $]-1;1[$: les deux puissances tendent vers 0.

Par somme, $\lim u_n = 0$.

c) On divise en haut et en bas par 3^n (avec $3^{n+1} = 3 \times 3^n$) :

$$u_n = \frac{3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$$

$\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Par quotient, $\lim u_n = 3$.

d) $u_n = 3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right)$ *(on factorise par 3^n, la plus grande base)*
$\lim\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -1$ et $\lim 3^n = +\infty$.
Par produit, $\lim u_n = -\infty$.

e) $u_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$ *(on divise par 6^n ; $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$)*
$\lim\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.
Par quotient, $\lim u_n = 1$.

Exercice 7 – Avec la quantité conjuguée ★★★

Multiplie et divise par la quantité conjuguée, puis conclus. Toutes les suites sont définies pour $n \geqslant 2$.

a) Forme « $+\infty - \infty$ ».
$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$ *(quantité conjuguée)*
$u_n = \dfrac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$ *($(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$)*
$u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$
$\lim\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n}\right) = +\infty$.
Par quotient, $\lim u_n = 0$.

b) Forme « $+\infty - \infty$ ».
$u_n = \dfrac{\left(n^2+n\right) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$ *(quantité conjuguée)*
$u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$
Nouvelle forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » : pour $n > 0$, $\sqrt{n^2+n} = \sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.
$u_n = \dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + n}$
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + 1}$ *(on simplifie par n)*
$\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + 1\right) = 2$.
Par quotient, $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

c) Forme « $+\infty - \infty$ ».
$u_n = \dfrac{n^2 - \left(n^2 - 2n\right)}{n + \sqrt{n^2 - 2n}}$ *(quantité conjuguée)*
$u_n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n^2 - 2n}}$
$u_n = \dfrac{2n}{n + n\sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}}$ *(pour $n \geqslant 2$, $\sqrt{n^2 - 2n} = n\sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}$)*
$u_n = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}}$
$\lim \left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}\right) = 2.$
Par quotient, $\lim u_n = 1$.

d) Forme « $+\infty - \infty$ ».
$u_n = \dfrac{\left(4n^2 + n\right) - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$ *(quantité conjuguée)*
$u_n = \dfrac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}$
$u_n = \dfrac{n}{n\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} + 2n}$ *($\sqrt{4n^2 + n} = n\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}}$)*
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} + 2}$
$\lim \left(\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} + 2\right) = 4.$
Par quotient, $\lim u_n = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 8 – Deux sommes ★★★

1. S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 1 :
   $S_n = \dfrac{1 - 0{,}8^{n+1}}{1 - 0{,}8} = \dfrac{1 - 0{,}8^{n+1}}{0{,}2} = 5(1 - 0{,}8^{n+1})$.

2. $-1 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim \left(0{,}8^{n+1}\right) = 0$.
   Par somme puis par produit, $\lim S_n = 5 \times (1 - 0) = 5$.

3. $\dfrac{T_n}{n^2} = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{2}$ (on simplifie par $n \neq 0$).
   $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1.$
   Par quotient, $\lim \dfrac{T_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

4. Somme géométrique de raison 3 : $R_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3-1} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

$\dfrac{R_n}{3^n} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2\times 3^n} = \dfrac{3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2}$ (on divise par 3^n).

$\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Par somme et quotient, $\lim \dfrac{R_n}{3^n} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 9 – Trouve l'erreur ★★

Chaque raisonnement d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis corrige.

a) $\infty - \infty$ *est une forme indéterminée, pas* 0.

Pour $n \geqslant 1$, $n^3 - n^2 = n^3\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$; par produit, $\lim(n^3 - n^2) = +\infty$.

b) $\dfrac{\infty}{\infty}$ *est une forme indéterminée.*

$\dfrac{n+5}{3n} = \dfrac{n\left(1+\dfrac{5}{n}\right)}{3n} = \dfrac{1+\dfrac{5}{n}}{3}$ pour $n \geqslant 1$; par quotient, la limite est $\dfrac{1}{3}$.

c) $q = -1{,}5 \leqslant -1$ *: la suite n'a pas de limite.*

Ses termes alternent de signe (1 ; $-1{,}5$; $2{,}25$; …) en s'éloignant de 0.

d) *On multiplie par* $-4 < 0$ *:* $\lim(-4 \times 1{,}1^n) = -\infty$.

Par somme, $\lim(2 - 4 \times 1{,}1^n) = -\infty$.

e) *Les degrés ne sont pas égaux :* 2 *en haut,* 1 *en bas.*

Pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{4n^2+n}{2n+1} = \dfrac{n^2\left(4+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)} = n \times \dfrac{4+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}$.

Le quotient tend vers 2 et n vers $+\infty$: par produit, la limite est $+\infty$.

f) $\sqrt{A} - \sqrt{B} \neq \sqrt{A-B}$.

Avec la quantité conjuguée : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Le dénominateur tend vers $+\infty$: par quotient, la limite est 0.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\lim \dfrac{2n^2-n}{3-4n^2}$ vaut :

Réponse D : $-\dfrac{1}{2}$

On factorise par n^2 : $\dfrac{2-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}-4} \to \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{2}{3}$ prend le terme constant 3 au lieu du terme dominant $-4n^2$.

2. $\lim(5 - 2 \times 0{,}7^n)$ vaut :

Réponse B : 5

$-1 < 0{,}7 < 1$: $0{,}7^n \to 0$, donc la limite est 5.

3. $\lim(4^n - 3^n)$ vaut :

Réponse A : $+\infty$
$4^n - 3^n = 4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$: produit de $+\infty$ par un facteur qui tend vers 1.

4. La suite $((-1{,}2)^n)$:

Réponse C : n'a pas de limite
$q = -1{,}2 \leqslant -1$: pas de limite.

5. $\lim\left(\sqrt{n^2 + 6n} - n\right)$ vaut :

Réponse C : 3
Quantité conjuguée : $\dfrac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n} = \dfrac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1} \to \dfrac{6}{2} = 3$.

6. Laquelle de ces formes est indéterminée ?

Réponse B : $0 \times \infty$
$+\infty + \infty = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} \to 0$, $(+\infty)\times(-\infty) = -\infty$; seule $0 \times \infty$ est indéterminée.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).