49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Limites des fonctions de référence et asymptotes

À retenir : Limite finie ℓ en $\pm\infty$: asymptote horizontale $y=\ell$. Limite infinie en a : asymptote verticale $x=a$. En 0, je sépare : $\frac{1}{x}\to+\infty$ en 0^+, $-\infty$ en 0^-. $\mathrm{e}^x\to 0$ en $-\infty$. Une courbe peut couper son asymptote horizontale.

Ex. 1 ★☆☆ **Les limites de référence** — Donne chaque limite. Cite la limite de référence ou l'opération utilisée.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$

(d) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^4}$
(regarde à gauche et à droite)

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x$

Ex. 2 ★☆☆ **De la limite à l'asymptote** — Calcule la limite. Dis ensuite si la courbe a une asymptote. Si oui, précise si elle est horizontale ou verticale et donne son équation.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{1}{x-5}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-2)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+1)$

(e) $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3}{x+2}$

(f) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)$

Ex. 3 ★★☆ **Lire un tableau de variations** — On donne le tableau de variations de $f(x)=\frac{x+5}{(x+1)^2}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

x	-∞	-9	-1	+∞
f(x)	0	↘ $-\frac{1}{16}$ ↗	+∞ ‖ +∞ ↘	0

(a) Lis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelle asymptote en déduis-tu ?

(b) Lis les limites de f en -1 à gauche et à droite. Quelle asymptote en déduis-tu ?

(c) Calcule $f(-5)$. Ilyès affirme : « une courbe ne coupe jamais son asymptote horizontale ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 3 (suite)

(d) Retrouve par le calcul les limites de f en -1 lues dans le tableau.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les asymptotes** — Vrai ou faux ? Justifie.

(a) « La courbe de $q(x)=4+\frac{1}{x^2}$ a une asymptote verticale d'équation $x=4$. »

(b) « La droite $x=2$ est asymptote verticale à la courbe de $k(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}$. »

(c) « La droite $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de $p(x)=1-\mathrm{e}^x$ en $-\infty$, et la courbe est au-dessus. »

(d) « La fonction $r(x)=\frac{2}{x-4}$ a une limite en 4. »

Ex. 5 ★★★ **Deux valeurs interdites, deux comportements** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;2\}$ par $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Factorise le numérateur et le dénominateur de $f(x)$, puis simplifie $f(x)$ pour $x\neq-1$ et $x\neq2$.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to2} f(x)$. La droite d'équation $x=2$ est-elle asymptote à $\mathcal{C}$? Justifie.

(c) Calcule la limite de f en -1^- puis en -1^+. Interprète graphiquement.

(d) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (tu peux écrire $x+2=(x+1)+1$). Interprète graphiquement.

(e) Dresse le tableau de variations de f avec toutes ses limites. On admet que f est décroissante sur chaque intervalle où elle est définie.

Ex. 6 ★★★ **Une courbe et ses deux asymptotes** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Déduis-en une asymptote à $\mathcal{C}$ et donne son équation.

(b) Étudie la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.

(c) Calcule $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

(d) En 0^+, explique pourquoi la somme donne une forme indéterminée. Lève-la en écrivant $f(x)$ sur un seul dénominateur, puis conclus sur une asymptote.

(e) Sacha affirme : « $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f non plus. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Construire une fonction sur mesure** — Une fonction f s'écrit $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$, où a, b et c sont des réels avec $b \neq 0$. Voici son tableau de variations :

x	-∞	2	+∞
f(x)	-3	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	-3

(a) Lis dans le tableau les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donne les équations des asymptotes à sa courbe.

(b) Déduis-en a et c, puis le signe de b. Sachant que $f(3) = -1$, détermine b.

(c) Propose une fonction g dont la limite vaut 5 en $-\infty$ et en $+\infty$, et $+\infty$ en -4 à gauche comme à droite. Justifie.

(d) Noé affirme : « $h(x) = -3 + \dfrac{2}{2-x}$ a les mêmes asymptotes que f, donc le même tableau de variations. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) On veut une limite égale à 2 en $-\infty$ et à $+\infty$ en $+\infty$. Explique pourquoi $2 + x^3$, $2 + x^4$ et $2 + \sqrt{x}$ ne conviennent pas. Propose une fonction qui convient.

2. *Opérations sur les limites*

À retenir : Nomme l'opération. $\ell \times \infty$ ou $\frac{\ell}{0}$ $(\ell \neq 0)$: étudie les signes. Une forme indéterminée ne vaut jamais 0 ou 1 d'office : en $\pm\infty$, factorise par le terme dominant ; en a, par $(x - a)$, ou conjugue.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : sans forme indéterminée** — Détermine chaque limite en nommant l'opération utilisée (somme, produit ou quotient).

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3\sqrt{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)(x^2+1)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + \mathrm{e}^x\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-2}{x}$

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : forme indéterminée ou pas ?** — Pour chaque limite, dis d'abord s'il s'agit d'une forme indéterminée (et de quel type), puis détermine la limite.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4 - 7x^3 + 2\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 - 3x\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2 + x}{1 - 2x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 3\sqrt{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 2}{3x + 1}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \left(x^2 + 4\right)$

Ex. 10 ★★☆ **Deux valeurs interdites** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète graphiquement le résultat.

(b) Factorise $x^2 - x - 2$, puis dresse son tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 (suite)

(c) Déduis-en $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

(d) Détermine $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$. Quelles asymptotes verticales $\mathcal{C}$ admet-elle ?

Ex. 11 ★★☆ **Quatre copies à corriger** — Ben a relevé une erreur dans chacune de ces copies. Trouve-la, puis détermine la bonne limite en rédigeant.

(a) Inès : « En $+\infty$, $2x^2 \to +\infty$ et $x^3 \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2 - x^3) = 0$. »

(b) Malo : « Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^2+1}{3x^2-x} = 1$. »

(c) Yanis : « En 1, je garde les termes de plus haut degré : $\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ a pour limite $\frac{x^2}{x^2} = 1$. »

(d) Léna : « Le numérateur tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = 0$. »

Ex. 12 ★★★ **Vrai ou faux sur les opérations** — Vrai ou faux ? Justifie. Si c'est vrai, donne une preuve par les opérations sur les limites. Si c'est faux, donne un contre-exemple. Les fonctions f et g sont définies là où on en a besoin.

(a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = 0$.

(b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(c) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = -\infty$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to1} g(x) = 0$ avec $g(x) \neq 0$ pour $x \neq 1$, alors $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(e) « Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, on est face à une forme indéterminée. »

Ex. 13 ★★★ **Truites dans un lac** — Noé, garde-pêche, suit les truites réintroduites dans un lac. D'après un premier modèle, le nombre de truites t années après leur introduction est $P(t) = \frac{900t+200}{t+4}$, pour $t \geqslant 0$.

(a) Combien de truites a-t-on introduites ? Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$, puis interprète-la graphiquement et dans le contexte.

(b) La population peut-elle un jour dépasser cette limite ? Justifie en étudiant le signe de $P(t) - \ell$, où ℓ est la limite trouvée.

(c) Le second modèle de Noé est $Q(t) = 40\sqrt{t} + 50$. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)$. Pourquoi ce modèle est-il peu réaliste à long terme ?

Ex. 13 **(suite)**

(d) Hors contexte, on pose $f(x) = \frac{900x+200}{x+4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Détermine les limites de f à gauche et à droite en -4, puis en $-\infty$. Interprète graphiquement.

Ex. 14 ★★★ **Une fonction sur mesure** — On cherche des réels a, b et c tels que la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$ pour $x \neq c$ vérifie trois conditions : la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale en $+\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale, et $f(0) = 1$.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a, puis déduis-en la valeur de a.

(b) Explique pourquoi $c = 2$, puis détermine b.

(c) Détermine $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ en étudiant le signe de $x-2$. La condition sur l'asymptote verticale est-elle remplie ?

(d) On admet que f est croissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$. Remplace les « ? » de ce tableau par les limites :

x	-∞	2	+∞
f(x)	?	↗ ? ‖ ? ↗	?

(e) Construis une fonction g telle que $g(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = -\infty$. Justifie.

3. *Lever une forme indéterminée*

À retenir : En $\pm\infty$, factorise par le terme de plus haut degré, en haut ET en bas : $\frac{2x^2+1}{x^2-x} \to 2$. En un réel a, simplifie par $(x-a)$ ou conjugue. « $\infty - \infty = 0$ » et « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » sont faux, et $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : formes indéterminées en l'infini** — Détermine chaque limite. En cas de forme indéterminée, factorise par le terme de plus haut degré.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^3 - 7x^2 + 1)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^4 - 3x^3 + 2x)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2 - x + 4}{3x^2 + 5x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x^3+4}$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2}{5x^2 + 1}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 3x)$

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : la forme 0/0 en un réel** — Chaque limite est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Détermine-la en simplifiant par $(x-a)$ ou en utilisant l'expression conjuguée.

(a) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2 - 16}{x+4}$

Ex. 16 **(suite)**

(b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ (développe $(x-2)(x^2+2x+4)$)

(d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+3x}{2x^2+x}$
(attention : on est en un réel)

Ex. 17 ★★☆ **Les erreurs d'Inès** — Inès a rédigé les limites ci-dessous. Pour chacune, dis si elle a raison, justifie, puis corrige si besoin.

(a) Inès écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 4x) = 0$ car « $+\infty - \infty = 0$ ».

(b) Inès écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{4x^2-x} = 1$ car numérateur et dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$.

(c) Pour $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$, Inès ne garde que les termes de plus haut degré et trouve 1.

(d) Inès écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + 2x^2) = +\infty$ car « une puissance de x tend vers $+\infty$ ».

Ex. 18 ★★☆ **Racines carrées à l'infini** — Soit $f(x) = \sqrt{x^2+5} - x$, définie sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$, définie sur $]-\infty\,;-3] \cup]0\,;+\infty[$.

(a) Explique pourquoi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée et précise de quel type.

(b) Avec l'expression conjuguée, détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète graphiquement le résultat.

(c) La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est-elle une forme indéterminée ? Détermine-la.

(d) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(e) Lucas affirme que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ vaut la même chose qu'en $+\infty$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Un paramètre qui change tout** — Pour un réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f_a(x) = \frac{x^2+ax-12}{x-3}$.

(a) Dans cette question, $a = 0$. Détermine $\lim\limits_{x\to3^-} f_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f_0(x)$, puis donne-en une interprétation graphique.

(b) Toujours avec $a = 0$, détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)$ en justifiant par une factorisation. La courbe a-t-elle une asymptote horizontale ?

(c) On revient au cas général. Détermine la valeur de a pour laquelle la limite de f_a en 3 est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

(d) Pour cette valeur de a, détermine la limite de f_a en 3. Pour quels réels a la droite d'équation $x = 3$ est-elle asymptote verticale ? Justifie.

Ex. 20 ★★★ **Une culture de bactéries** — Une culture de bactéries est observée en laboratoire. On modélise le nombre de bactéries, en milliers, au bout de t heures ($t \geqslant 0$) par $P(t) = \frac{8t^2+3t+2}{t^2+1}$.

(a) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$ en levant la forme indéterminée, puis interprète ce résultat dans le contexte.

(b) On note ℓ la limite trouvée. Exprime $P(t) - \ell$ sous forme d'un seul quotient. Pour $t > 2$, la population est-elle au-dessus ou au-dessous de ℓ milliers ?

(c) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} t \times \big(P(t) - \ell\big)$, en précisant la forme indéterminée rencontrée.

(d) Un autre modèle propose $R(t) = \frac{8t^2+3t+2}{t+1}$. Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t)$. Ce modèle te paraît-il réaliste pour une culture en milieu limité ?

Ex. 21 ★★★ **Conjuguée et valeur interdite** — Soit h la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;4\right[\cup]4\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

(a) Explique pourquoi la limite de h en 4 est une forme indéterminée, puis détermine-la à l'aide de l'expression conjuguée.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ en factorisant le numérateur par $\sqrt{x}$ et le dénominateur par x. Interprète graphiquement.

(c) Sacha affirme : « h n'est pas définie en 4, donc la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à sa courbe. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) On admet que h est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;4\right[$ et sur $]4\,;+\infty[$. Calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis dresse le tableau de variations de h avec ses limites.

4. *Limite d'une fonction composée*

À retenir : Pour $g(u(x))$: je pose $X = u(x)$, je cherche la limite de X (avec 0^+ ou 0^-), puis celle de g en cette valeur : « par composition ». Le côté compte : $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ en 0^+, $\to 0$ en 0^-. $x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est un produit.

Ex. 22 ★☆☆ **Automatismes : composées en l'infini** — Détermine chaque limite. Rédige en deux temps : limite de $X = u(x)$, puis limite de la fonction extérieure, et conclus « par composition ».

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-2x}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$

Ex. 23 ★☆☆ **Automatismes : en un réel, le côté compte** — Détermine chaque limite. Précise si $X = u(x)$ tend vers 0^+ ou vers 0^- quand c'est utile, puis conclus « par composition ».

(a) $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ (b) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

(c) $\lim\limits_{x\to3^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{3-x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to3^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{3-x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{e}^{2x+1}$ (f) $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

Ex. 24 ★★☆ **Composée ou produit ? L'erreur de Lina** — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Lina écrit : « Je pose $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0$ et $\mathrm{e}^X \to 1$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. »

(a) Lina a-t-elle raison ? Justifie, puis donne la bonne limite de f en $+\infty$.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

(c) Explique pourquoi on obtient une forme indéterminée en 0^+, puis lève-la en écrivant $f(x)$ à l'aide de $X = \frac{1}{x}$.

(d) La courbe de f admet-elle une asymptote parallèle à un axe ? Justifie.

Ex. 25 ★★☆ **Un quotient à l'intérieur** — Soit f définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ et g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1-x}{x+2}}$.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète graphiquement.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$. Interprète graphiquement.

(c) Calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

(d) Calcule les limites de g en -2 à gauche et à droite. Qu'en déduis-tu pour la courbe de g ?

Ex. 26 ★★★ **Quatre côtés à surveiller** — Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x^2}{1-x^2}}$. On admet le tableau de variations de f, incomplet :

x	-∞	-1	0	1	+∞
f(x)	?	↘ ? ‖ ? ↘	1	↗ ? ‖ ? ↗	?

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète graphiquement.

(b) Étudie le signe de $1 - x^2$, puis détermine les limites de f en 1 à gauche et à droite.

(c) Mathis affirme : « $f(-x) = f(x)$, donc les limites de f en -1^- et en -1^+ sont celles de f en 1^- et en 1^+. » A-t-il raison ? Donne ces deux limites.

(d) Complète le tableau de variations, puis donne les équations de toutes les asymptotes à la courbe de f.

(e) Vérifie que $\frac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \frac{2}{1-x^2}$. Vrai ou faux, sans utiliser le tableau : « pour tout $x > 1$, $f(x) < \mathrm{e}^{-2}$ » ? Justifie.

Ex. 27 ★★★ **Deux modèles pour les chevreuils** — Zoé, garde forestière, suit les chevreuils d'une forêt. Le nombre de chevreuils, en centaines, t années après le premier comptage, est modélisé de deux façons. Pour $t \geqslant 0$: $N(t) = \frac{12}{1+3\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ et $M(t) = 12\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$.

(a) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t}$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Interprète dans le contexte.

(b) Calcule $N(0)$ et une valeur approchée de $M(0)$ à 0,01 près. Quel modèle correspond à un premier comptage de 300 chevreuils ?

(c) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} M(t)$ en rédigeant les deux compositions successives.

(d) Vrai ou faux : « d'après le modèle M, la forêt comptera un jour plus de 1 200 chevreuils » ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Une fonction, plusieurs intérieurs** — Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(X) = \sqrt{X^2+1} - X$, et h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1} - \mathrm{e}^{x}$.

(a) Détermine $\lim\limits_{X\to-\infty} g(X)$.

(b) Explique pourquoi la limite de g en $+\infty$ est une forme indéterminée, puis montre que pour tout réel X, $g(X) = \frac{1}{\sqrt{X^2+1}+X}$.

(c) Déduis-en $\lim\limits_{X\to+\infty} g(X)$. Interprète graphiquement.

(d) Vérifie que $h(x) = g(\mathrm{e}^{x})$. Déduis-en les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$, avec les asymptotes.

(e) Propose une fonction u telle que $g(u(x))$ tende vers 0 quand $x \to 0^{+}$ et vers $+\infty$ quand $x \to 0^{-}$. Justifie.

5. *Comparaison et théorème des gendarmes*

À retenir : Limite infinie : une seule inégalité suffit (minorer pour $+\infty$, majorer pour $-\infty$). Limite finie : deux bornes de même limite (gendarmes), ex. $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Multiplier par un négatif change le sens.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : une inégalité pour une limite infinie** — Détermine chaque limite à l'aide d'une seule inégalité et du théorème de comparaison.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - 3\sin x\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^3 + 2\cos x\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(3 + \sin x)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right)(\cos x - 4)$

(e) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \dfrac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

Ex. 30 ★★☆ **Automatismes : encadrer puis appliquer les gendarmes** — Encadre l'expression par deux fonctions de même limite, puis conclus avec le théorème des gendarmes.

(a) $\lim\limits_{x\to0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\cos x}{x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5 - \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x + \sin x}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\sin x$

Ex. 31 ★★☆ **Trois copies à corriger** — Chaque élève a fait une erreur. Trouve-la et explique-la, puis donne la bonne conclusion en la justifiant.

(a) Lina étudie $f(x) = x - 2\cos x$ en $-\infty$ et écrit : « $\cos x \geqslant -1$ donc $-2\cos x \geqslant 2$ et $f(x) \geqslant x + 2$ ». Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Hugo écrit : « pour $x > 0$, $-x \leqslant x\sin x \leqslant x$, donc d'après les gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x = 0$ ». Calcule $g(2k\pi)$ et $g\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ pour $g(x) = x\sin x$ et k entier naturel, puis conclus.

(c) Nora écrit : « $\cos x \leqslant 1$ donc $x^2 + x\cos x \leqslant x^2 + x$, qui tend vers $+\infty$: la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ ». Corrige sa démonstration.

Ex. 32 ★★☆ **Utilisateurs d'une appli de covoiturage** — Le nombre d'utilisateurs actifs d'une appli de covoiturage, en milliers, est modélisé par $N(t) = \frac{80t + 6\sin t}{t+1}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en mois.

(a) À l'aide d'un encadrement de $\sin t$, encadre $N(t)$ entre deux quotients pour tout $t \geqslant 0$.

(b) Calcule la limite en $+\infty$ de chacune des deux bornes obtenues.

(c) Déduis-en $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Interprète ce résultat graphiquement, puis dans le contexte.

(d) Écris $N(t) - 80$ sous la forme d'un seul quotient et étudie son signe. Que peut-on dire du nombre d'utilisateurs ?

Ex. 33 ★★★ **Une exponentielle qui ondule** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)\,\mathrm{e}^{x}$.

(a) Encadre $2 + \cos x$ pour tout réel x, puis déduis-en un encadrement de $f(x)$. Justifie le sens de chaque inégalité.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

(c) Malo écrit : « f est majorée par $x \mapsto 4\mathrm{e}^{x}$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis détermine cette limite correctement.

(d) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,f(x)$ en rédigeant soigneusement l'encadrement.

Ex. 34 ★★★ **Quatre affirmations à trancher** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie ta réponse avec soin (encadrement ou contre-exemple).

(a) Si, pour tout $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 3 + \frac{1}{x}$, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{x}{2+\sin x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + 5x\sin x\right) = +\infty$.

(d) La fonction q définie sur $]1\,;+\infty[$ par $q(x) = \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 1$.

Ex. 35 ★★★ **Température dans une serre** — Inès règle le chauffage d'une serre. La température, en °C, est modélisée par $\theta(t) = 18 + 3\cos t + 40\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en heures. Elle teste ensuite un régulateur : $\theta_2(t) = 18 + (40 + 3\cos t)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

(a) Encadre $\theta(t)$ pour tout $t \geqslant 0$ par deux fonctions de t, puis détermine la limite de chaque borne en $+\infty$.

(b) Peut-on en déduire la limite de θ en $+\infty$? Justifie, en étudiant $\theta(2k\pi)$ et $\theta(\pi + 2k\pi)$ pour k entier grand.

(c) Inès affirme : « à partir de 30 heures, la température reste comprise entre 15 °C et 22 °C ». A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta_2(t)$, interprète graphiquement le résultat, puis compare ce modèle au premier.

6. *Croissances comparées de x^n et e^x*

À retenir : En $+\infty$: $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$ et $x^n\mathrm{e}^{-x} \to 0$; en $-\infty$: $x^n\mathrm{e}^x \to 0$. Utilise-les seulement devant une forme indéterminée : $\mathrm{e}^x - x^2 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)$. Piège : $x\mathrm{e}^x \to +\infty$ en $+\infty$, par produit.

Ex. 36 ★☆☆ **Automatismes : l'exponentielle l'emporte** — Détermine la limite, en citant la propriété ou l'opération utilisée.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\,\mathrm{e}^x$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x}$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$
(pense au taux d'accroissement de exp en 0)

Ex. 37 ★☆☆ **Forme indéterminée ou pas ?** — Dis d'abord si la limite est une forme indéterminée, puis détermine-la.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - x^3\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^x - x^3\right)$

Ex. 37 (suite)

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 4)\,\mathrm{e}^{-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{2x}$ (tu peux poser $X = 2x$)

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$

Ex. 38 ★★☆ **Un même quotient, deux comportements** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x - 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Faut-il une croissance comparée ? Justifie.

(c) Détermine $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

(d) Donne les équations des asymptotes à $\mathcal{C}$ parallèles aux axes.

Ex. 39 ★★☆ **L'erreur de Malik** — Soit $g(x) = (2x^2 - x)\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. Malik écrit : « Par croissance comparée, $x^n\mathrm{e}^x$ tend vers 0, donc g tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. »

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Malik a-t-il raison en $+\infty$? Justifie.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ avec une justification correctement rédigée.

(c) La courbe de g a-t-elle une asymptote horizontale ? Justifie.

(d) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x^2 - x}$.

Ex. 40 ★★★ **Un antalgique dans le sang** — On injecte un antalgique à un patient. La concentration du produit dans le sang, en mg/L, t heures après l'injection, est modélisée par $C(t) = 8t\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Montre que, pour tout $t \geqslant 0$, $C'(t) = 8(1 - 0{,}4t)\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

(b) Étudie les variations de C sur $[0\,;+\infty[$ et donne la valeur exacte de son maximum.

(c) En posant $X = 0{,}4t$, détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$. Dresse le tableau de variations de C et interprète la limite pour la courbe.

(d) Lina affirme : « La concentration finit par s'annuler : à partir d'un certain instant, il n'y a plus de produit dans le sang. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 41 ★★★ **Un taux d'accroissement déguisé** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

(a) En posant $X = 2x$ et en reconnaissant un taux d'accroissement de exp, détermine $\lim\limits_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}$.

(b) Déduis-en $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

(c) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. S'agit-il d'une forme indéterminée ? Justifie.

Ex. 41 (suite)

(d) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(e) $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote verticale ? Une asymptote horizontale ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Quatre affirmations à trancher** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse, puis justifie ta réponse.

(a) « Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x} = 0$. »

(b) « $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x} = 0$. »

(c) « Pour toute fonction polynôme P, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$. »

(d) « Il existe des réels a et b tels que $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{x}$ vérifie $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. »

7. *Problèmes type bac*

À retenir : Aux bornes de l'ensemble de définition : une limite finie ℓ en $\pm\infty$ donne l'asymptote horizontale $y = \ell$, une limite infinie en a donne l'asymptote verticale $x = a$. Le signe de $f(x) - \ell$ donne la position : $2 - \frac{1}{x} < 2$ pour $x > 0$.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : limites aux bornes, version bac** — Calcule chaque limite. Si tu rencontres une forme indéterminée, nomme-la avant de la lever.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \mathrm{e}^{x})$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \mathrm{e}^{x})$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3}{2-x}$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$

Ex. 44 ★☆☆ **Lire un tableau de variations** — Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$:

x	-∞	-2	1	+∞
f(x)	2	↘ −∞ ‖ +∞ ↘	−1 ↗	2

(a) Donne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interprète graphiquement.

(b) Donne les limites de f en -2 à gauche et à droite. Qu'en déduis-tu pour la courbe ?

(c) Nadia affirme : « La droite $x = 1$ est asymptote verticale, car f change de sens de variation en 1. » A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Sur $]-\infty\,;-2[$, la courbe est-elle au-dessus ou en dessous de la droite d'équation $y = 2$? Justifie.

(e) Sur $[1\,;+\infty[$, la courbe est-elle au-dessus ou en dessous de la droite d'équation $y = 2$? Justifie.

(f) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}$.

Ex. 45 ★★☆ **Extrait de bac : une fonction rationnelle** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

(a) Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe admet-elle une asymptote horizontale ? Justifie.

(b) Détermine les limites de f en 1 à gauche et à droite, puis interprète graphiquement.

(c) Montre que, pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

(d) Dresse le tableau de variations complet de f, avec les limites aux bornes.

Ex. 46 ★★☆ **Une population de poissons qui se stabilise** — Dans un lac, le nombre de poissons, en milliers, est modélisé par $P(t) = \frac{9\mathrm{e}^{0{,}5t}}{\mathrm{e}^{0{,}5t}+2}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en années. On admet que P est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Calcule $P(0)$ et interprète ce résultat dans le contexte.

(b) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$, puis interprète graphiquement et dans le contexte.

(c) On note ℓ cette limite. Écris $P(t) - \ell$ sous la forme d'un seul quotient, puis déduis-en la position de la courbe par rapport à son asymptote.

(d) Un garde-pêche affirme : « Comme P est croissante, la population dépassera un jour 10 000 poissons. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Extrait de bac : une fonction (ax + b)e^(−x) de bout en bout** — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale en $-\infty$? Justifie.

(b) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en nommant la forme indéterminée rencontrée, puis interprète graphiquement le résultat.

(c) Montre que, pour tout réel x, $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(d) Dresse le tableau de variations complet de f, avec ses limites et la valeur exacte de son maximum.

(e) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote. La courbe coupe-t-elle cette asymptote ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Une courbe prise entre deux asymptotes** — Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

(a) Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

(b) En $+\infty$, Tom écrit : « Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, donc $g(x)$ tend vers 1. » Explique son erreur, puis détermine la bonne limite et interprète-la.

Ex. 48 **(suite)**

(c) On note ℓ la limite trouvée en $+\infty$. Écris $g(x) - \ell$ sous la forme d'un seul quotient, puis déduis-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.

(d) Étudie la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote en $-\infty$.

(e) Calcule $g'(x)$, dresse le tableau de variations complet de g, puis donne un encadrement de $g(x)$ valable pour tout réel x.

Ex. 49 ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de bougies** — Maëlle fabrique x milliers de bougies ($x > 0$). Le coût total, en milliers d'euros, est $C(x) = 2x + 4 - 4\mathrm{e}^{-x}$. Le coût moyen par bougie, en euros, est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, défini sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x)$. Interprète ce résultat graphiquement, puis dans le contexte.

(b) Nomme la forme indéterminée rencontrée en 0^+, puis détermine $\lim\limits_{x \to 0^+} M(x)$.

(c) La courbe de M admet-elle une asymptote verticale ? Justifie.

(d) Étudie le signe de $M(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$. Interprète graphiquement, puis pour Maëlle.

(e) On admet que M est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Dresse son tableau de variations avec limites et déduis-en un encadrement de $M(x)$.