## 1. Limites des fonctions de référence et asymptotes

**Ex. 1** ★☆☆ **Les limites de référence**

(a) Exposant 5 impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

(b) Exposant 6 pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
(et pas $-\infty$ : $\mathrm{e}^x$ reste strictement positif).

(d) Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

(e) Pour $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$ : $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Les deux limites diffèrent, donc $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite « en 0 » tout court.

(f) Exposant 4 pair : $x^4 \to 0$ en restant strictement positif des deux côtés, donc $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^4} = +\infty$.

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

(h) L'exponentielle est définie en 0 : $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$.

**Ex. 2** ★☆☆ **De la limite à l'asymptote**

(a) $\frac{1}{x^2} \to 0$, donc par somme la limite vaut 7. Limite finie en $+\infty$ : asymptote horizontale d'équation $y = 7$ en $+\infty$.

(b) Quand $x \to 5^+$, $x - 5 \to 0^+$, donc par quotient la limite vaut $+\infty$. Limite infinie en 5 : asymptote verticale d'équation $x = 5$.

(c) $\mathrm{e}^x \to 0$, donc par somme la limite vaut $-2$. Asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.

(d) Exposant pair : $x^4 \to +\infty$, donc par somme la limite vaut $+\infty$. Limite infinie en $-\infty$ : pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

(e) Quand $x \to -2^-$, $x + 2 \to 0^-$ et $3 > 0$, donc par quotient la limite vaut $-\infty$. Asymptote verticale d'équation $x = -2$.

(f) Polynôme défini en 1 : la limite vaut $1^2 + 3 = 4$. Limite finie en un réel : pas d'asymptote.

**Ex. 3** ★★☆ **Lire un tableau de variations**

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ : la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ : la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

**Ex. 3** (suite)

(c) $f(-5) = \frac{0}{16} = 0$ : la courbe passe par le point $(-5\,;0)$, qui est sur la droite $y = 0$. Ilyès a tort : la courbe coupe ici son asymptote horizontale.

(d) Quand $x \to -1$, $x + 5 \to 4 > 0$ et $(x+1)^2 \to 0^+$ à gauche comme à droite (un carré est positif). Par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ : on retrouve le tableau.

**Ex. 4** ★★☆ **Vrai ou faux sur les asymptotes**

(a) Faux : en $\pm\infty$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, donc par somme $q(x) \to 4$. La droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale, et non verticale. L'asymptote verticale est la droite d'équation $x = 0$ : $x^2 \to 0^+$ des deux côtés, donc par quotient puis par somme $q(x) \to +\infty$.

(b) Faux : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, donc pour $x \neq 2$, $k(x) = x + 3$, qui tend vers 5 quand $x \to 2$. La limite est finie : pas d'asymptote verticale.

(c) Faux : $\mathrm{e}^x \to 0$, donc par somme $p(x) \to 1$. L'asymptote $y = 1$ existe bien, mais $p(x) - 1 = -\mathrm{e}^x < 0$ : la courbe est en dessous.

(d) Faux : quand $x \to 4^+$, $x - 4 \to 0^+$ et $r(x) \to +\infty$. Quand $x \to 4^-$, $x - 4 \to 0^-$ et $r(x) \to -\infty$. Les deux limites sont différentes, donc pas de limite en 4 (mais il y a une asymptote verticale d'équation $x = 4$).

**Ex. 5** ★★★ **Deux valeurs interdites, deux comportements**

(a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Pour $x \neq -1$ et $x \neq 2$, on simplifie par $(x-2)$ : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

(b) Pour $x \neq 2$ proche de 2, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{4}{3}$. Cette limite est finie, donc la droite $x = 2$ n'est pas asymptote : la valeur interdite disparaît après simplification.

(c) Quand $x \to -1$, $x + 2 \to 1$. À gauche, $x + 1 \to 0^-$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. À droite, $x + 1 \to 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

(d) $f(x) = \frac{(x+1)+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$. En $\pm\infty$, $x + 1 \to \pm\infty$, donc par quotient $\frac{1}{x+1} \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**Ex. 5** **(suite)**

(e) Avec les limites trouvées :

| x | -∞ | -1 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | $\searrow -\infty \parallel +\infty \searrow$ | $\frac{4}{3} \parallel \frac{4}{3} \searrow$ | 1 |

En 2, la double barre marque la valeur interdite. Les deux limites y valent $\frac{4}{3}$ : pas d'asymptote verticale.

**Ex. 6** ★★★ **Une courbe et ses deux asymptotes**

(a) En $\pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{1}{x^2} \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) $f(x) - 1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, ce nombre a le signe de $x - 1$. Pour $x < 1$ ($x \neq 0$), $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $y = 1$. En $x = 1$, elle la coupe. Pour $x > 1$, elle est au-dessus.

(c) En $0^-$, $\frac{1}{x} \to -\infty$. De plus $x^2 \to 0^+$, donc $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.

(d) En $0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ et $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ : c'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On écrit $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2}$. Le numérateur tend vers $-1$ et $x^2 \to 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

(e) Non. D'après les deux questions précédentes, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. Les limites à gauche et à droite sont égales, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ : le terme $-\frac{1}{x^2}$ impose son signe des deux côtés.

**Ex. 7** ★★★ **Construire une fonction sur mesure**

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$. La droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale.

(b) En $\pm\infty$, $\frac{b}{x-c} \to 0$, donc par somme $f(x) \to a$ : $a = -3$. La valeur interdite est $c$, donc $c = 2$. En $2^+$, $x - 2 \to 0^+$ et $f(x) \to +\infty$, donc $b > 0$. Enfin $f(3) = -3 + \frac{b}{1} = -1$, donc $b = 2$ et $f(x) = -3 + \frac{2}{x-2}$.

(c) Par exemple $g(x) = 5 + \frac{1}{(x+4)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. En $\pm\infty$, $(x+4)^2 \to +\infty$, donc $\frac{1}{(x+4)^2} \to 0$ et par somme $g(x) \to 5$. En $-4$, à gauche comme à droite, $(x+4)^2 \to 0^+$, donc par quotient puis par somme $g(x) \to +\infty$.

**Ex. 7** **(suite)**

(d) Non. En $\pm\infty$, $\frac{2}{2-x} \to 0$, donc par somme $h(x) \to -3$. En $2^+$, $2 - x \to 0^-$, donc par quotient $h(x) \to -\infty$. En $2^-$, $2 - x \to 0^+$, donc $h(x) \to +\infty$. Les asymptotes $y = -3$ et $x = 2$ sont bien les mêmes, mais les limites en 2 sont inversées : le tableau n'est pas celui de $f$.

(e) En $-\infty$, $x^3 \to -\infty$ (exposant impair), donc $2 + x^3 \to -\infty$. De même, $x^4 \to +\infty$ (exposant pair), donc $2 + x^4 \to +\infty$. Enfin, $\sqrt{x}$ n'est définie que sur $[0\,;+\infty[$, donc on ne peut pas étudier $2 + \sqrt{x}$ en $-\infty$. La fonction $k(x) = 2 + \mathrm{e}^x$ convient : $\mathrm{e}^x \to 0$ en $-\infty$, donc par somme $k(x) \to 2$ (asymptote horizontale $y = 2$). Et $\mathrm{e}^x \to +\infty$ en $+\infty$, donc $k(x) \to +\infty$.

## 2. *Opérations sur les limites*

**Ex. 8** ★★★ **Automatismes : sans forme indéterminée**

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $-3 < 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} -3\sqrt{x} = -\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et le numérateur vaut 6. Par quotient, la limite est 0.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée : par produit, la limite est $+\infty$.

(d) $2 + \frac{1}{x} \to 2$ par somme, et $x^2 + 1 \to +\infty$. Comme $2 > 0$, par produit, la limite est $+\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée.

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Par somme, la limite est $-\infty$.

(f) Le numérateur vaut $-2 < 0$. Pour $x > 0$, le dénominateur tend vers $0^+$. Par quotient, la limite est $-\infty$.

**Ex. 9** ★★★ **Automatismes : forme indéterminée ou pas ?**

(a) C'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour $x \neq 0$, $x^4 - 7x^3 + 2 = x^4\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^4}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $x^4 \to +\infty$. Par produit, la limite est $+\infty$.

(b) Ce n'est pas une forme indéterminée : $x^2 \to +\infty$ et $-3x \to +\infty$ en $-\infty$. Par somme, la limite est $+\infty$.

(c) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$, le quotient vaut $\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-2}$. Par quotient, la limite est $\frac{4}{-2} = -2$ : asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.

**Ex. 9** **(suite)**

(d) C'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $x - 3\sqrt{x} = x\left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$. Par quotient, $\frac{3}{\sqrt{x}} \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1, et $x \to +\infty$. Par produit, la limite est $+\infty$.

(e) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{1}{3}$, le quotient vaut $x^2 \times \frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x}}$. On a $x^2 \to +\infty$ et la fraction tend vers $\frac{1}{3} > 0$. Par produit, la limite est $+\infty$.

(f) C'est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Pour $x \neq 0$, l'expression vaut $x + \frac{4}{x}$. On a $x \to +\infty$ et $\frac{4}{x} \to 0$. Par somme, la limite est $+\infty$.

**Ex. 10** ★★☆ **Deux valeurs interdites**

(a) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$. On a $\frac{1}{x} \to 0$ et la fraction tend vers 1. Par produit, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) $-1$ est racine évidente de $x^2 - x - 2$. Le produit des racines vaut $-2$, donc l'autre racine est 2 : $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Ce trinôme est positif sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]2\,;+\infty[$, et négatif sur $]-1\,;2[$.

(c) Le numérateur tend vers $5 > 0$. Pour $x < 2$ proche de 2, le dénominateur est négatif, donc il tend vers $0^-$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Pour $x > 2$, il tend vers $0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

(d) Le numérateur tend vers $2 > 0$. Pour $x < -1$, le dénominateur tend vers $0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$. Pour $x > -1$ proche de $-1$, il tend vers $0^-$, donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}$.

**Ex. 11** ★★☆ **Quatre copies à corriger**

(a) C'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$, pas 0. Pour $x \neq 0$, $2x^2 - x^3 = x^3\left(\frac{2}{x} - 1\right)$. La parenthèse tend vers $-1$ et $x^3 \to +\infty$. Par produit, la limite est $-\infty$.

(b) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, pas 1. Pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{3}$, le quotient vaut $\frac{6+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}}$. Par quotient, la limite est $\frac{6}{3} = 2$ : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

**Ex. 11** **(suite)**

(c) La règle du terme de plus haut degré ne vaut pas en un réel. En 1, c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Or $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Pour $x \neq 1$, le quotient vaut $\frac{x+1}{x+3}$. Par quotient, la limite est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(d) Le dénominateur tend aussi vers 0 : c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Avec l'expression conjuguée, pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 9$, $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$. Par quotient, la limite est $\frac{1}{6}$.

**Ex. 12** ★★★ **Vrai ou faux sur les opérations**

(a) Faux. On prend $f(x) = \frac{2}{x^2}$ et $g(x) = x^3$ : c'est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Pour $x \neq 0$, $f(x) \times g(x) = 2x$, qui tend vers $+\infty$, et non vers 0.

(b) Vrai. Ce n'est pas une forme indéterminée : par somme, $+\infty + (+\infty)$ donne $+\infty$. Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 + \sqrt{x}\right) = +\infty$.

(c) Vrai. On a $\lim f = -3$ avec $-3 < 0$, et $\lim g = +\infty$ : ce n'est pas une forme indéterminée. Par produit (règle des signes), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = -\infty$. Exemple : $\left(-3 + \frac{1}{x}\right) \times x = -3x + 1$, qui tend vers $-\infty$.

(d) Faux. On prend $f(x) = -2$ et $g(x) = x - 1$. Pour $x > 1$, $x - 1 \to 0^+$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-2}{x-1} = -\infty$. Pour $x < 1$, $x - 1 \to 0^-$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$. La limite à gauche et la limite à droite sont différentes : il faut toujours étudier le signe de $g$.

(e) Faux. En $-\infty$, $\mathrm{e}^x \to 0$ et $x \to -\infty$. Un quotient du type $\frac{0}{\infty}$ n'est pas une forme indéterminée : par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$.

**Ex. 13** ★★★ **Truites dans un lac**

(a) $P(0) = \frac{200}{4} = 50$ : on a introduit 50 truites. En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $t > 0$, $P(t) = \frac{t\left(900+\frac{200}{t}\right)}{t\left(1+\frac{4}{t}\right)} = \frac{900+\frac{200}{t}}{1+\frac{4}{t}}$. Le numérateur tend vers 900 et le dénominateur vers 1 : par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 900$. La droite d'équation $y = 900$ est asymptote horizontale en $+\infty$. À long terme, la population se stabilise autour de 900 truites.

(b) On a $P(t) - 900 = \frac{900t+200-900(t+4)}{t+4} = \frac{-3400}{t+4}$. Pour $t \geqslant 0$, $t + 4 > 0$, donc $P(t) - 900 < 0$. La population reste donc toujours inférieure à 900 truites, sans jamais les atteindre.

**Ex. 13** **(suite)**

(c) On a $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$ et $40>0$, donc par produit $\lim\limits_{t\to+\infty}40\sqrt{t}=+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=+\infty$. Ce modèle prévoit une population qui grandit sans limite, ce qui est impossible dans un lac aux ressources limitées.

(d) Le numérateur tend vers $900\times(-4)+200=-3400$. Pour $x<-4$, $x+4\to0^-$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to-4^-}f(x)=+\infty$. Pour $x>-4$, $x+4\to0^+$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=-4$ est asymptote verticale. En $-\infty$, la factorisation de la première question donne, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=900$ : la droite d'équation $y=900$ est aussi asymptote horizontale en $-\infty$.

**Ex. 14** ★★★ **Une fonction sur mesure**

(a) Pour $x\neq0$ et $x\neq c$, on factorise par $x$ : $f(x)=\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(1-\frac{c}{x}\right)}=\frac{a+\frac{b}{x}}{1-\frac{c}{x}}$. Le numérateur tend vers $a$ et le dénominateur vers 1 : par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. L'asymptote d'équation $y=-3$ impose donc $a=-3$.

(b) Pour tout réel $x_0\neq c$, le numérateur tend vers $ax_0+b$ et le dénominateur vers $x_0-c\neq0$. Par quotient, $f$ a une limite finie en $x_0$. Une asymptote verticale ne peut donc être qu'en la valeur interdite $c$, d'où $c=2$. Ensuite, $f(0)=\frac{b}{-2}=1$ donne $b=-2$. Ainsi $f(x)=\frac{-3x-2}{x-2}$.

(c) Le numérateur tend vers $-3\times2-2=-8$. Pour $x<2$, $x-2\to0^-$ : par quotient (règle des signes), $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$. Pour $x>2$, $x-2\to0^+$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$. Les limites sont infinies, donc la droite d'équation $x=2$ est bien asymptote verticale.

(d) La factorisation de la première question donne aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$, par quotient.

| x | -∞ | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f(x) | $-3$ | $\nearrow+\infty\,\|\|\,-\infty\nearrow$ | $-3$ |

(e) Par exemple, $g(x)=\frac{2}{1-x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. On a bien $g(0)=2$. En $\pm\infty$, $1-x$ tend vers $\mp\infty$, donc par quotient $g(x)\to0$. Pour $x<1$, $1-x\to0^+$ et le numérateur vaut $2>0$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=+\infty$. Pour $x>1$, $1-x\to0^-$ : par quotient, $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=-\infty$.

## 3. *Lever une forme indéterminée*

**Ex. 15** ★☆☆ **Automatismes : formes indéterminées en l'infini**

(a) Ce n'est pas une forme indéterminée : $4x^3\to-\infty$ (puissance impaire) et $-7x^2\to-\infty$. Par somme, la limite vaut $-\infty$.

(b) C'est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$ : $-x^4\to-\infty$ et $-3x^3\to+\infty$ (puissance impaire). Pour $x\neq0$ : $-x^4-3x^3+2x=x^4\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)$. Or $x^4\to+\infty$ (puissance paire) et la parenthèse tend vers $-1$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

(c) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x\neq0$ : $\frac{x^2\left(6-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x}\right)}=\frac{6-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{5}{x}}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{6}{3}=2$ (et non 1). La droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

(d) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x>0$ : $\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{1}{x^2}\times\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^3}}$. Le premier facteur tend vers 0 et le second vers 2. Par produit, la limite vaut 0. Asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

(e) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x\neq0$ : $\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x^2}\right)}=x\times\frac{1-\frac{2}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}}$. Ici $x\to-\infty$ et le quotient tend vers $\frac{1}{5}$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

(f) C'est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Pour $x>0$ : $\sqrt{x}-3x=x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)$, et la parenthèse tend vers $-3$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

**Ex. 16** ★☆☆ **Automatismes : la forme 0/0 en un réel**

(a) $x^2-16=(x-4)(x+4)$. Pour $x\neq-4$, le quotient vaut $x-4$, qui tend vers $-8$. La limite vaut $-8$.

(b) 1 est racine évidente du numérateur et du dénominateur : $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Pour $x\neq1$ et $x\neq-1$, le quotient vaut $\frac{x+5}{x+1}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{6}{2}=3$.

(c) En développant, $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$. Pour $x\neq2$, le quotient vaut $x^2+2x+4$, qui tend vers $4+4+4=12$. La limite vaut 12.

(d) Pour $x\geqslant-9$ et $x\neq0$ : $\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$. Le dénominateur tend vers 6. Par quotient, la limite vaut $\frac{1}{6}$.

(e) La règle du terme de plus haut degré ne vaut pas en 0 (elle donnerait $\frac{1}{2}$, ce qui est faux). On factorise par $x$ : pour $x\neq0$ et $x\neq-\frac{1}{2}$, $\frac{x(x+3)}{x(2x+1)}=\frac{x+3}{2x+1}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{3}{1}=3$.

**Ex. 17** ★★☆ **Les erreurs d'Inès**

(a) Elle a tort : c'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$, qui ne vaut pas automatiquement 0. Pour $x \neq 0$ : $x^2 - 4x = x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)$. Or $x^2 \to +\infty$ et la parenthèse tend vers 1. Par produit, la limite vaut $+\infty$.

(b) Elle a tort : c'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, qui ne vaut pas automatiquement 1. Pour $x \neq 0$ : $\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{1}{4}$. Asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{4}$ en $+\infty$.

(c) Elle a tort : la règle du terme de plus haut degré ne vaut qu'en $\pm\infty$. En 1, c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -3$, le quotient vaut $\frac{x+1}{x+3}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(d) Elle a tort : c'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$, car $x^3 \to -\infty$ (puissance impaire) et $2x^2 \to +\infty$. Pour $x \neq 0$ : $x^3 + 2x^2 = x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Or $x^3 \to -\infty$ et la parenthèse tend vers 1. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

**Ex. 18** ★★☆ **Racines carrées à l'infini**

(a) Par composition, $\sqrt{x^2+5} \to +\infty$ et $-x \to -\infty$. C'est donc une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

(b) Pour tout réel $x$, $\sqrt{x^2+5} + x > 0$ car $\sqrt{x^2+5} > |x|$. Donc $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x} = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$ par somme. Par quotient, la limite vaut 0 : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

(c) Non : $\sqrt{x^2+5} \to +\infty$ et $-x \to +\infty$. Par somme, la limite vaut $+\infty$, sans forme indéterminée.

(d) Pour $x > 0$ : $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$, donc $g(x) = \sqrt{1+\frac{3}{x}}$. Par composition, la limite vaut $\sqrt{1} = 1$. Asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

(e) Il a tort. Pour $x \leqslant -3$ : $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, donc $\sqrt{x^2+3x} = -x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$ et $g(x) = -\sqrt{1+\frac{3}{x}}$. Par composition, la limite vaut $-1$. Asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

**Ex. 19** ★★★ **Un paramètre qui change tout**

(a) Le numérateur $x^2 - 12$ tend vers $9 - 12 = -3$. Pour $x < 3$, $x - 3 < 0$ : le dénominateur tend vers $0^-$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 3^-} f_0(x) = +\infty$. Pour $x > 3$, le dénominateur tend vers $0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 3^+} f_0(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de $f_0$.

**Ex. 19** **(suite)**

(b) En $\pm\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$ : $f_0(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{12}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = x \times \frac{1-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$. Le quotient tend vers 1. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$. Ces limites sont infinies : la courbe n'a pas d'asymptote horizontale.

(c) Le dénominateur tend vers 0 en 3. Il y a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ seulement si le numérateur s'annule aussi en 3 : $9 + 3a - 12 = 0$, soit $3a - 3 = 0$, donc $a = 1$.

(d) Pour $a = 1$, 3 est racine du numérateur, donc on factorise par $(x-3)$ : $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$. Pour $x \neq 3$, $f_1(x) = x + 4$, qui tend vers 7. Donc $\lim\limits_{x\to 3} f_1(x) = 7$ : la limite est finie, il n'y a pas d'asymptote verticale. Si $a \neq 1$, le numérateur tend vers $3a - 3 \neq 0$ et le dénominateur vers 0 : par quotient, les limites en $3^-$ et en $3^+$ sont infinies. La droite d'équation $x = 3$ est donc asymptote verticale si et seulement si $a \neq 1$.

**Ex. 20** ★★★ **Une culture de bactéries**

(a) C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $t > 0$, on factorise par $t^2$ en haut et en bas : $P(t) = \frac{t^2\left(8+\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{8+\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}$. Le numérateur tend vers 8 et le dénominateur vers 1 : par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 8$. La droite d'équation $y = 8$ est asymptote horizontale : à long terme, la population se stabilise vers 8 000 bactéries.

(b) $P(t) - 8 = \frac{8t^2+3t+2-8(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{3t-6}{t^2+1}$. Pour $t > 2$, $3t - 6 > 0$ et $t^2 + 1 > 0$, donc $P(t) - 8 > 0$ : la population est au-dessus de 8 000 bactéries (elle s'approche de ce niveau par le haut).

(c) $t \to +\infty$ et $P(t) - 8 \to 0$ : c'est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$. On a $t \times (P(t) - 8) = \frac{3t^2-6t}{t^2+1} = \frac{3-\frac{6}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}$ pour $t > 0$. Par quotient, la limite est 3.

(d) Pour $t > 0$ : $R(t) = \frac{t^2\left(8+\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} = t \times \frac{8+\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}$. Le quotient tend vers 8 et $t \to +\infty$ : par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = +\infty$. La population croîtrait sans limite, ce qui n'est pas réaliste quand les ressources sont limitées : le premier modèle est plus crédible.

**Ex. 21** ★★★ **Conjuguée et valeur interdite**

(a) En 4, $\sqrt{2x+1}-3 \to \sqrt{9}-3=0$ et $x-4 \to 0$ : forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 4$ : $h(x) = \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}$. Le dénominateur tend vers 6, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 4} h(x) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(b) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x > 4$ : $h(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}}{1-\frac{4}{x}}$. Par composition, $\sqrt{2+\frac{1}{x}} \to \sqrt{2}$ ; le quotient tend vers $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ : l'axe des abscisses, d'équation $y=0$, est asymptote horizontale en $+\infty$.

(c) Faux. Une asymptote verticale d'équation $x=4$ exige une limite infinie en 4. Or $h$ tend vers $\frac{1}{3}$, une limite finie : la courbe présente seulement un « trou » au point d'abscisse 4, sans asymptote verticale.

(d) $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{0}-3}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{-3}{-\frac{9}{2}} = \frac{2}{3}$. Tableau :

| x | $-\frac{1}{2}$ | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| h(x) | $\frac{2}{3}$ | $\searrow \frac{1}{3} \parallel \frac{1}{3} \searrow$ | 0 |

## 4. *Limite d'une fonction composée*

**Ex. 22** ★☆☆ **Automatismes : composées en l'infini**

(a) On pose $X=-x^2$. Quand $x \to +\infty$, $X \to -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition, la limite vaut 0.

(b) Quand $x \to -\infty$, $x^2 \to +\infty$ aussi, donc $X=-x^2 \to -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition, la limite vaut 0 (comme en $+\infty$).

(c) On pose $X=3-2x$. Quand $x \to -\infty$, $-2x \to +\infty$ donc $X \to +\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Par composition, la limite est $+\infty$.

(d) On pose $X=\sqrt{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$. Par composition, la limite est $+\infty$.

(e) $-x \to -\infty$, donc par composition $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Par somme, $X = 2+\mathrm{e}^{-x} \to 2$, et $\frac{1}{X} \to \frac{1}{2}$ quand $X \to 2$. La limite vaut $\frac{1}{2}$ : asymptote horizontale d'équation $y=\frac{1}{2}$ en $+\infty$.

(f) Quand $x \to +\infty$, $\frac{5}{x^2} \to 0$, donc par somme $X = 9+\frac{5}{x^2} \to 9$. Comme $\sqrt{X} \to \sqrt{9} = 3$ quand $X \to 9$, par composition la limite vaut 3.

**Ex. 23** ★★☆ **Automatismes : en un réel, le côté compte**

(a) Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$. Quand $x \to 0$, $x^2 \to 0^+$ des deux côtés, donc par quotient $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $X = -\frac{1}{x^2} \to -\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, par composition la limite vaut 0 : ici, le côté ne change rien.

(b) Quand $x \to 0^-$, $X = \frac{1}{x} \to -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ : par composition, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$. Par somme, $1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 1$, donc par quotient la limite vaut 2.

(c) Quand $x \to 3^+$, $3-x \to 0^-$, donc par quotient $X = \frac{1}{3-x} \to -\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, par composition la limite vaut 0.

(d) Quand $x \to 3^-$, $3-x \to 0^+$, donc par quotient $X \to +\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, par composition la limite est $+\infty$ : asymptote verticale d'équation $x=3$.

(e) Quand $x \to 1$, $X = 2x+1 \to 3$. La fonction exponentielle est continue, donc $\mathrm{e}^X \to \mathrm{e}^3$ quand $X \to 3$. Par composition, la limite vaut $\mathrm{e}^3$.

(f) Quand $x \to 4^-$, $X = 4-x \to 0^+$, donc par composition $\sqrt{4-x} \to 0^+$. Par quotient (1 divisé par $0^+$), la limite est $+\infty$ : asymptote verticale d'équation $x=4$.

**Ex. 24** ★★☆ **Composée ou produit ? L'erreur de Lina**

(a) Non. $f$ est le produit de $x$ par $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ : la composition donne seulement $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}^0 = 1$. Comme $x \to +\infty$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) En $-\infty$ : $\frac{1}{x} \to 0$ donc par composition $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 1$, et $x \to -\infty$ : par produit, la limite est $-\infty$. En $0^-$ : $\frac{1}{x} \to -\infty$ donc par composition $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$, et $x \to 0$ : par produit, la limite vaut 0.

(c) En $0^+$ : $x \to 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ : forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^X}{X}$ avec $X = \frac{1}{x} \to +\infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(d) Oui : comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale. Pas d'asymptote horizontale : $f$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

## Ex. 25 ★★☆ Un quotient à l'intérieur

(a) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ à l'intérieur. Pour $x > 3$, $X = \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$, qui tend vers 2 par quotient. Comme $\sqrt{X} \to \sqrt{2}$ quand $X \to 2$, par composition la limite vaut $\sqrt{2}$ : asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$ en $+\infty$.

(b) Quand $x \to 3^+$, $2x+1 \to 7$ et $x - 3 \to 0^+$, donc par quotient $X \to +\infty$. Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, par composition la limite est $+\infty$ : asymptote verticale d'équation $x = 3$.

(c) $X = \frac{1-x}{x+2} = \frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{2}{x}}$ pour $x \neq 0$, qui tend vers $-1$ en $+\infty$ comme en $-\infty$. Comme $\mathrm{e}^X \to \mathrm{e}^{-1}$ quand $X \to -1$, par composition les deux limites valent $\mathrm{e}^{-1}$ : asymptote horizontale d'équation $y = \mathrm{e}^{-1}$.

(d) Quand $x \to -2$, $1 - x \to 3$. À droite, $x + 2 \to 0^+$ donc $X \to +\infty$ et, par composition, $g(x) \to +\infty$. À gauche, $x + 2 \to 0^-$ donc $X \to -\infty$ et, par composition, $g(x) \to 0$. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale : la limite infinie n'a lieu qu'à droite de $-2$.

## Ex. 26 ★★★ Quatre côtés à surveiller

(a) On pose $X = \frac{2x^2}{1-x^2}$. En $+\infty$, c'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$, on factorise par $x^2$ : $X = \frac{2}{\frac{1}{x^2}-1}$. Comme $\frac{1}{x^2} \to 0$, $X \to -2$ par quotient. Et $\lim\limits_{X \to -2} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-2}$, donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-2}$. Le calcul est le même en $-\infty$ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-2}$. La droite d'équation $y = \mathrm{e}^{-2}$ est donc asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ est positif sur $]-1\,;1[$ et négatif sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. En $1^-$ : $2x^2 \to 2$ et $1 - x^2 \to 0^+$, donc $X \to +\infty$ par quotient. Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ par composition. En $1^+$ : $1 - x^2 \to 0^-$, donc $X \to -\infty$. Comme $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, on a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ par composition. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.

(c) Non. Si $x \to -1^-$, alors $x < -1$, donc $-x > 1$ et $-x \to 1^+$ : la parité échange les côtés. On a donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$. Vérification directe : pour $x < -1$, $1 - x^2 \to 0^-$, donc $X \to -\infty$ et $\mathrm{e}^X \to 0$. Pour $-1 < x < 1$, $1 - x^2 \to 0^+$, donc $X \to +\infty$ et $\mathrm{e}^X \to +\infty$.

## Ex. 26 (suite)

(d)

| x | -∞ | -1 | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $\mathrm{e}^{-2}$ | ↘ 0 ‖ +∞ ↘ | 1 | ↗ +∞ ‖ 0 ↗ | $\mathrm{e}^{-2}$ |

Asymptotes : la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{e}^{-2}$ (en $-\infty$ et en $+\infty$), et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

(e) On a $-2 + \frac{2}{1-x^2} = \frac{-2(1-x^2)+2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$. Pour $x > 1$, $1 - x^2 < 0$, donc $\frac{2}{1-x^2} < 0$ et $\frac{2x^2}{1-x^2} < -2$. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $f(x) < \mathrm{e}^{-2}$ : c'est vrai. Sur $]1\,;+\infty[$, la courbe reste sous son asymptote d'équation $y = \mathrm{e}^{-2}$.

## Ex. 27 ★★★ Deux modèles pour les chevreuils

(a) On pose $X = -0{,}5t$. Quand $t \to +\infty$, $X \to -\infty$, et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0$. Par somme, $1 + 3\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} \to 1$, donc par quotient $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 12$. La droite d'équation $y = 12$ est asymptote horizontale en $+\infty$ : selon ce modèle, la population se stabilise vers 1 200 chevreuils.

(b) $N(0) = \frac{12}{1+3} = 3$, soit 300 chevreuils.
$M(0) = 12\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}60$, soit environ 60 chevreuils. C'est donc le modèle $N$ qui correspond à un premier comptage de 300 chevreuils.

(c) Première composition : $\mathrm{e}^{-0{,}5t} \to 0$ (première question) et $\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 0$, donc $Y = -3\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} \to 0^-$. Seconde composition : $\lim\limits_{Y \to 0} \mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^0 = 1$. Par composition, $\mathrm{e}^{-3\mathrm{e}^{-0{,}5t}} \to 1$, donc par produit $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t) = 12$. Les deux modèles prévoient la même stabilisation, vers 1 200 chevreuils (asymptote d'équation $y = 12$).

(d) Faux. Pour tout $t \geqslant 0$, $-3\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} < 0$, donc $\mathrm{e}^{-3\mathrm{e}^{-0{,}5t}} < \mathrm{e}^0 = 1$ (l'exponentielle est strictement croissante), et donc $M(t) < 12$. La population s'approche de 1 200 chevreuils sans jamais les atteindre.

## Ex. 28 ★★★ Une fonction, plusieurs intérieurs

(a) Quand $X \to -\infty$, $X^2 + 1 \to +\infty$ et $\lim\limits_{Y \to +\infty} \sqrt{Y} = +\infty$, donc $\sqrt{X^2+1} \to +\infty$ par composition. De plus $-X \to +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{X \to -\infty} g(X) = +\infty$.

(b) En $+\infty$, $\sqrt{X^2+1} \to +\infty$ (par composition) et $-X \to -\infty$ : c'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On a $\sqrt{X^2+1} > \sqrt{X^2} = |X| \geqslant -X$, donc $\sqrt{X^2+1} + X > 0$. On multiplie par l'expression conjuguée : $g(X) = \frac{(\sqrt{X^2+1}-X)(\sqrt{X^2+1}+X)}{\sqrt{X^2+1}+X} = \frac{X^2+1-X^2}{\sqrt{X^2+1}+X} = \frac{1}{\sqrt{X^2+1}+X}$.

**Ex. 28** **(suite)**

(c) Quand $X \to +\infty$, par somme $\sqrt{X^2+1} + X \to +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{X\to+\infty} g(X) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de $g$ en $+\infty$.

(d) $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$, donc $h(x) = g(\mathrm{e}^x)$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. En $+\infty$ : $X \to +\infty$ et $g(X) \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ par composition (asymptote d'équation $y = 0$). En $-\infty$ : $X \to 0^+$. Par somme puis composition, $\sqrt{X^2+1} \to \sqrt{1} = 1$, et $-X \to 0$, donc $g(X) \to 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ (asymptote d'équation $y = 1$).

(e) On prend $u(x) = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^+$, $X = \frac{1}{x} \to +\infty$ et $g(X) \to 0$ : par composition, la limite vaut 0. Quand $x \to 0^-$, $X \to -\infty$ et $g(X) \to +\infty$ : par composition, la limite est $+\infty$.

## 5. *Comparaison et théorème des gendarmes*

**Ex. 29** ★☆☆ **Automatismes : une inégalité pour une limite infinie**

(a) Pour tout réel $x$, $\sin x \leqslant 1$. On multiplie par $-3 < 0$, ce qui change le sens : $-3\sin x \geqslant -3$, donc $x^2 - 3\sin x \geqslant x^2 - 3$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3) = +\infty$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

(b) Pour tout réel $x$, $\cos x \leqslant 1$, donc $2\cos x \leqslant 2$ et $-x^3 + 2\cos x \leqslant -x^3 + 2$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3+2) = -\infty$. Par comparaison, la limite vaut $-\infty$.

(c) $\sin x \geqslant -1$, donc $3 + \sin x \geqslant 2$. Pour $x > 0$, on multiplie par $x$ : $x(3+\sin x) \geqslant 2x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

(d) $\cos x \leqslant 1$, donc $\cos x - 4 \leqslant -3$. On multiplie par $x^2 + 1 > 0$ : $(x^2+1)(\cos x - 4) \leqslant -3(x^2+1)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -3(x^2+1) = -\infty$. Par comparaison, la limite vaut $-\infty$.

(e) Pour tout $x \neq 0$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant -1$, donc $2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 1$. Pour $x > 0$, on divise par $x$ : $\frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \geqslant \frac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$ (asymptote verticale d'équation $x = 0$).

**Ex. 30** ★★☆ **Automatismes : encadrer puis appliquer les gendarmes**

(a) Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$. On multiplie par $x^2 > 0$ : $-x^2 \leqslant x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x^2$. Les deux bornes tendent vers 0 en 0. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

(b) $-3 \leqslant 3\cos x \leqslant 3$. On divise par $x^2+1 > 0$ : $-\frac{3}{x^2+1} \leqslant \frac{3\cos x}{x^2+1} \leqslant \frac{3}{x^2+1}$. Les deux bornes tendent vers 0 en $-\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

(c) Pour $x > 0$ : $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. On multiplie par $-1$, ce qui change le sens, et l'encadrement reste symétrique : $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant -\frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. On ajoute 5 : $5 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 5 - \frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}} \leqslant 5 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Les deux bornes tendent vers 5. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 5 (asymptote horizontale d'équation $y = 5$).

(d) $4x - 1 \leqslant 4x + \sin x \leqslant 4x + 1$. Pour $x > 0$, on divise par $x$ : $4 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{4x+\sin x}{x} \leqslant 4 + \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 4. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 4 (asymptote horizontale d'équation $y = 4$).

(e) $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. On multiplie par $\mathrm{e}^x > 0$ : $-\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x \sin x \leqslant \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

**Ex. 31** ★★☆ **Trois copies à corriger**

(a) Erreur : quand on multiplie par $-2 < 0$, le sens de l'inégalité change. On obtient $-2\cos x \leqslant 2$, donc $f(x) \leqslant x + 2$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(b) Erreur : les bornes $-x$ et $x$ tendent vers $-\infty$ et $+\infty$. Leurs limites sont différentes, donc le théorème des gendarmes ne permet rien. On a $g(2k\pi) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Donc $g$ prend la valeur 0 et des valeurs aussi grandes que l'on veut pour des $x$ aussi grands que l'on veut. Elle n'a pas de limite en $+\infty$.

(c) Erreur : majorer par une fonction qui tend vers $+\infty$ ne permet de rien conclure. Il faut minorer. $\cos x \geqslant -1$. Pour $x > 0$, on multiplie par $x$ : $x\cos x \geqslant -x$, donc $x^2 + x\cos x \geqslant x^2 - x = x(x-1)$. Par produit, $x(x-1) \to +\infty$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

**Ex. 32** ★★☆ **Utilisateurs d'une appli de covoiturage**

(a) $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$. On multiplie par $6 > 0$ : $-6 \leqslant 6\sin t \leqslant 6$. On ajoute $80t$, puis on divise par $t+1>0$ : $\frac{80t-6}{t+1} \leqslant N(t) \leqslant \frac{80t+6}{t+1}$.

(b) On a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par $t$ : $\frac{80t-6}{t+1} = \frac{80-\frac{6}{t}}{1+\frac{1}{t}}$, qui tend vers 80 par quotient. De même, $\frac{80t+6}{t+1} = \frac{80+\frac{6}{t}}{1+\frac{1}{t}}$ tend vers 80.

(c) Les deux bornes ont la même limite 80. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 80$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 80$. À long terme, le nombre d'utilisateurs se stabilise vers 80 000.

(d) $N(t) - 80 = \frac{80t+6\sin t-80t-80}{t+1} = \frac{6\sin t-80}{t+1}$. Comme $6\sin t \leqslant 6$, le numérateur est inférieur ou égal à $-74$, donc négatif. Le dénominateur est positif.
Donc $N(t) < 80$ : l'appli n'atteint jamais 80 000 utilisateurs, elle s'en approche par valeurs inférieures.

**Ex. 33** ★★★ **Une exponentielle qui ondule**

(a) Pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. En ajoutant 2 : $1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$. On multiplie par $\mathrm{e}^x > 0$, ce qui conserve le sens : $\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^x$ pour tout réel $x$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\mathrm{e}^x = 0$. Les deux bornes ont la même limite : d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe de $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

(c) Malo a tort, même si sa majoration est juste ($f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^x \leqslant 4\mathrm{e}^x$) : majorer par une fonction qui tend vers $+\infty$ ne permet aucune conclusion. Pour une limite $+\infty$, il faut une minoration. On a $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ : par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) Pour $x < 0$, on multiplie $\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^x$ par $x < 0$, ce qui change le sens : $3x\mathrm{e}^x \leqslant x\,f(x) \leqslant x\mathrm{e}^x$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x\mathrm{e}^x = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,f(x) = 0$.

**Ex. 34** ★★★ **Quatre affirmations à trancher**

(a) Faux. Les bornes tendent vers 1 et vers 3 : deux limites différentes, le théorème des gendarmes ne s'applique pas. Contre-exemple : $f(x) = 2+\sin x$ vérifie $1-\frac{1}{x} \leqslant 1 \leqslant f(x) \leqslant 3 \leqslant 3+\frac{1}{x}$ pour $x > 0$, mais $f$ n'a pas de limite en $+\infty$, car $\sin x$ n'en a pas.

**Ex. 34** (suite)

(b) Vrai. Pour tout réel $x$, $1 \leqslant 2+\sin x \leqslant 3$, donc $2+\sin x > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc $\frac{1}{2+\sin x} \geqslant \frac{1}{3}$. Pour $x > 0$, on multiplie par $x$ : $\frac{x}{2+\sin x} \geqslant \frac{x}{3}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

(c) Vrai. Pour $x < 0$, on part de $\sin x \leqslant 1$ et on multiplie par $5x < 0$, ce qui change le sens : $5x\sin x \geqslant 5x$.
Donc $x^2 + 5x\sin x \geqslant x^2 + 5x = x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)$, qui tend vers $+\infty$ par produit. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

(d) Vrai. Pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ et les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $\frac{\sin x}{x} \to 0$. On divise numérateur et dénominateur par $x \neq 0$ : $q(x) = \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$, et par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 1$.

**Ex. 35** ★★★ **Température dans une serre**

(a) $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$, donc $-3 \leqslant 3\cos t \leqslant 3$, puis $15 + 40\mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant \theta(t) \leqslant 21 + 40\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$, donc par somme les bornes tendent vers 15 et vers 21.

(b) Non : les deux bornes ont des limites différentes, le théorème des gendarmes ne permet rien. De plus, $\theta(2k\pi) = 21 + 40\mathrm{e}^{-0{,}4k\pi}$ se rapproche de 21, alors que $\theta(\pi + 2k\pi) = 15 + 40\mathrm{e}^{-0{,}2(\pi+2k\pi)}$ se rapproche de 15. La fonction $\theta$ n'a donc pas de limite en $+\infty$ : la température oscille.

(c) Oui. Pour $t \geqslant 0$, $\theta(t) \geqslant 15 + 40\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 15$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est décroissante, donc pour $t \geqslant 30$, $40\mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant 40\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}099$. Alors $\theta(t) \leqslant 21 + 40\mathrm{e}^{-6} < 22$.

(d) $37 \leqslant 40 + 3\cos t \leqslant 43$. On multiplie par $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$ et on ajoute 18 : $18 + 37\mathrm{e}^{-0{,}2t} \leqslant \theta_2(t) \leqslant 18 + 43\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. Les deux bornes tendent vers 18 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta_2(t) = 18$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 18$. Avec le régulateur, la température se stabilise à 18 °C ; sans lui, elle oscille.

## 6. *Croissances comparées de $x^n$ et $e^x$*

**Ex. 36** ★☆☆ **Automatismes : l'exponentielle l'emporte**

(a) Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^4} = +\infty$.

(b) Ce n'est pas une forme indéterminée : $x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$, donc par produit la limite est $+\infty$. Pas besoin de croissance comparée.

**Ex. 36** **(suite)**

(c) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$ ; par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 \mathrm{e}^x = 0$.

(d) Ce n'est pas une forme indéterminée : $x^2 \to +\infty$ et $-x \to +\infty$, donc $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ par composition ; par produit, la limite est $+\infty$.

(e) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$ ; par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x} = 0$.

(f) $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de exp en 0 ; comme exp est dérivable en 0, il tend vers $\exp'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

**Ex. 37** ★☆☆ **Forme indéterminée ou pas ?**

(a) Forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On met $\mathrm{e}^x$ en facteur : $\mathrm{e}^x - x^3 = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}\right)$. Par croissance comparée, $\frac{x^3}{\mathrm{e}^x} \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1 ; par produit, la limite est $+\infty$.

(b) Pas de forme indéterminée : $\mathrm{e}^x \to 0$ et $-x^3 \to +\infty$ ; par somme, la limite est $+\infty$.

(c) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$. On développe : $x^2 \mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$. Par croissance comparée, $x^2 \mathrm{e}^{-x} \to 0$, et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ ; par somme, la limite est 0.

(d) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Avec $X = 2x$, qui tend vers $-\infty$ : $x\,\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2} X \mathrm{e}^X$. Par croissance comparée, $X\mathrm{e}^X \to 0$ ; par produit, la limite est 0.

(e) Pas de forme indéterminée : $x + 1 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^x \to 0^+$ ; par quotient, la limite est $-\infty$.

**Ex. 38** ★★☆ **Un même quotient, deux comportements**

(a) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On divise par $\mathrm{e}^x$ : $f(x) = \frac{1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$. Par croissance comparée, $\frac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0$, et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ ; par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

(b) Non : $\mathrm{e}^x \to 0$, donc le numérateur tend vers $-\infty$ par somme, et le dénominateur tend vers $-1$. Ce n'est pas une forme indéterminée : par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Le numérateur tend vers $\mathrm{e}^0 + 0 = 1$. Pour $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 1$, donc le dénominateur tend vers $0^+$ : par quotient, la limite est $+\infty$. Pour $x < 0$, il tend vers $0^-$ : la limite est $-\infty$.

(d) Asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ ; asymptote verticale d'équation $x = 0$. En $-\infty$, pas d'asymptote horizontale, puisque $f$ tend vers $+\infty$.

**Ex. 39** ★★☆ **L'erreur de Malik**

(a) Ce n'est pas une forme indéterminée : $2x^2 - x = x^2\left(2 - \frac{1}{x}\right) \to +\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$ ; par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Malik a donc tort en $+\infty$ : la propriété $x^n \mathrm{e}^x \to 0$ n'est valable qu'en $-\infty$.

(b) En $-\infty$, $2x^2 - x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^x \to 0$ : forme indéterminée du type $0 \times \infty$. On développe : $g(x) = 2x^2\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x$. Par croissance comparée, $x^2\mathrm{e}^x \to 0$ et $x\,\mathrm{e}^x \to 0$ ; par produit puis par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Ici, le résultat de Malik est juste.

(c) Oui : en $-\infty$, asymptote horizontale d'équation $y = 0$. En $+\infty$, il n'y en a pas, puisque $g$ tend vers $+\infty$.

(d) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\frac{\mathrm{e}^x}{2x^2 - x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}$. Par croissance comparée, $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \to +\infty$, et le second facteur tend vers $\frac{1}{2}$ ; par produit, la limite est $+\infty$ : l'exponentielle l'emporte sur le polynôme.

**Ex. 40** ★★★ **Un antalgique dans le sang**

(a) $C$ est le produit de $u(t) = 8t$ et de $v(t) = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$, avec $u'(t) = 8$ et $v'(t) = -0{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.
Donc $C'(t) = 8\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 8t \times (-0{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}4t} = 8(1 - 0{,}4t)\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

(b) Comme $\mathrm{e}^{-0{,}4t} > 0$, $C'(t)$ a le signe de $1 - 0{,}4t$. Ce facteur est positif pour $t < 2{,}5$ et négatif pour $t > 2{,}5$. Donc $C$ est croissante sur $[0\,;2{,}5]$ et décroissante sur $[2{,}5\,;+\infty[$. On a $C(0) = 0$ et $C(2{,}5) = 8 \times 2{,}5 \times \mathrm{e}^{-1} = \frac{20}{\mathrm{e}} \approx 7{,}36$.

(c) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$. On écrit $C(t) = 20 \times 0{,}4t\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} = 20\,X\mathrm{e}^{-X}$ avec $X = 0{,}4t$. Quand $t \to +\infty$, $X \to +\infty$, et par croissance comparée $X\mathrm{e}^{-X} \to 0$. Par composition puis par produit, $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$.

| t | 0 | 2{,}5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| C(t) | 0 | ↗ $\frac{20}{\mathrm{e}}$ ↘ | 0 |

La courbe de $C$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

(d) Non. Pour $t > 0$, $8t > 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}4t} > 0$, donc $C(t) > 0$ : la concentration ne s'annule jamais. Elle tend vers 0 (asymptote d'équation $y = 0$) : à long terme, le produit devient négligeable, mais il ne disparaît jamais complètement dans ce modèle.

**Ex. 41** ★★★ **Un taux d'accroissement déguisé**

(a) Forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On pose $X = 2x$ : quand $x \to 0$, $X \to 0$. Or $\frac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = \frac{\mathrm{e}^X - \mathrm{e}^0}{X - 0}$ est le taux d'accroissement de exp entre 0 et $X$. Comme exp est dérivable en 0, il tend vers $\exp'(0) = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} = 1$.

(b) Pour $x \neq 0$, $g(x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x}$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2 \times 1 = 2$.

(c) Ce n'est pas une forme indéterminée. Par composition, $\mathrm{e}^{2x} \to 0$, donc le numérateur tend vers $-1$ et le dénominateur $x$ tend vers $-\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Aucune croissance comparée n'est nécessaire.

(d) On a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On écrit $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} - \frac{1}{x}$ et $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} = 2 \times \frac{\mathrm{e}^X}{X}$ avec $X = 2x \to +\infty$. Par croissance comparée, $\frac{\mathrm{e}^X}{X} \to +\infty$. Par composition et par produit, $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} \to +\infty$. Comme $\frac{1}{x} \to 0$, par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

(e) Pas d'asymptote verticale en $x = 0$, car la limite de $g$ en 0 est finie (elle vaut 2). En $-\infty$, $g$ tend vers 0 : $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$, $g$ tend vers $+\infty$ : pas d'asymptote horizontale de ce côté.

**Ex. 42** ★★★ **Quatre affirmations à trancher**

(a) Faux. Ce n'est pas une forme indéterminée : en $-\infty$, $x^3 \to -\infty$ et, par composition, $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x} = -\infty$. La propriété $x^n \mathrm{e}^{-x} \to 0$ n'est valable qu'en $+\infty$.

(b) Vrai. Forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Pour $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant 1$, donc $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x} \geqslant \sqrt{x}$ ; comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $0 \leqslant \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\,\mathrm{e}^{-x}$. Par croissance comparée, $x\,\mathrm{e}^{-x} \to 0$ ; d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

(c) Vrai. On écrit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, d'où $P(x)\mathrm{e}^{-x} = a_n x^n \mathrm{e}^{-x} + \cdots + a_1 x \mathrm{e}^{-x} + a_0 \mathrm{e}^{-x}$. Pour $k \geqslant 1$, $x^k \mathrm{e}^{-x} \to 0$ en $+\infty$ par croissance comparée, et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Par produit puis par somme, la limite vaut 0 : l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme.

(d) Vrai. $f(0) = b$, donc il faut $b = 2$. En $-\infty$, $f(x) = a\,x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x$ et, par croissance comparée, $x\mathrm{e}^x \to 0$ ; comme $\mathrm{e}^x \to 0$, par somme $f(x) \to 0$ quel que soit $a$. En $+\infty$, si $a < 0$, $ax + 2 \to -\infty$ et $\mathrm{e}^x \to +\infty$ : par produit, $f(x) \to -\infty$ (pas de forme indéterminée). Par exemple, $f(x) = (2 - x)\,\mathrm{e}^x$ convient.

## 7. *Problèmes type bac*

**Ex. 43** ★★★ **Automatismes : limites aux bornes, version bac**

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \mathrm{e}^x) = -\infty$.

(b) Forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x} - 1\right)$. Par croissances comparées, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$, donc $\frac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0$ par inverse, et la parenthèse tend vers $-1$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \mathrm{e}^x) = -\infty$.

(c) Forme indéterminée du type $0 \times \infty$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^x = 0$ : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.

(d) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x \neq 0$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Par croissances comparées, $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \to +\infty$ ; $\frac{1}{x^2} \to 0$, donc le second facteur tend vers 1 par quotient. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1} = +\infty$ : pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

(e) $x^2 + 3 \to 7$ et, quand $x \to 2^+$, $2 - x \to 0^-$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3}{2 - x} = -\infty$ : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe.

(f) $4x + 1 \to -\infty$. $-x \to +\infty$, donc $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ par composition. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x + 1)\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

**Ex. 44** ★★★ **Lire un tableau de variations**

(a) Par lecture, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

(c) Non. Une asymptote verticale $x = a$ correspond à une limite infinie en $a$. Or 1 appartient à l'ensemble de définition, $f(1) = -1$, et le tableau n'indique ni double barre ni limite infinie en 1 : la seule asymptote verticale est $x = -2$. Le changement de sens de variation en 1 donne un minimum, pas une asymptote.

(d) Sur $]-\infty\,;-2[$, $f$ est décroissante et sa limite en $-\infty$ vaut 2.
Donc $f(x) < 2$, c'est-à-dire $f(x) - 2 < 0$ : la courbe est en dessous de l'asymptote.

(e) Sur $[1\,;+\infty[$, $f$ est croissante, part de $-1$ et tend vers 2 sans jamais l'atteindre.
Donc $f(x) - 2 < 0$ : la courbe est en dessous de l'asymptote.

**Ex. 44 (suite)**

(f) $f(x)-2\to 0$ quand $x\to+\infty$, et $f(x)-2<0$ sur $[1\,;+\infty[$, donc $f(x)-2\to 0^-$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-2}=-\infty$.

**Ex. 45 ★★☆ Extrait de bac : une fonction rationnelle**

(a) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour $x\notin\{0\,;1\}$, $f(x)=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x\times\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$. Le quotient tend vers 1 ; par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Les limites sont infinies : pas d'asymptote horizontale.

(b) $x^2+1\to 2$. Quand $x\to 1^-$, $x-1\to 0^-$ ; quand $x\to 1^+$, $x-1\to 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale.

(c) $f=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2+1$, $u'=2x$, $v=x-1$, $v'=1$. $f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

(d) $(x-1)^2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2-2x-1$. $\Delta=8$, racines $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ : positif à l'extérieur des racines. $f(1-\sqrt{2})=\frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=2-2\sqrt{2}$ et $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$.

| x | -∞ | 1−√2 | 1 | 1+√2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −∞ | ↗ 2−2√2 ↘ | −∞ ‖ +∞ ↘ | 2+2√2 ↗ | +∞ |

**Ex. 46 ★★☆ Une population de poissons qui se stabilise**

(a) $P(0)=\frac{9\times1}{1+2}=3$ : au départ, le lac compte 3 000 poissons.

(b) Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On divise par $e^{0,5t}$ : $P(t)=\frac{9}{1+2e^{-0,5t}}$. Par composition, $e^{-0,5t}\to 0$ ; par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=9$. La droite d'équation $y=9$ est asymptote horizontale : à long terme, la population se stabilise vers 9 000 poissons.

(c) $P(t)-9=\frac{9e^{0,5t}-9e^{0,5t}-18}{e^{0,5t}+2}=\frac{-18}{e^{0,5t}+2}$. Le dénominateur est strictement positif, donc $P(t)-9<0$ : la courbe est en dessous de son asymptote horizontale.

(d) Non. D'après la question précédente, $P(t)<9$ pour tout $t\geqslant 0$ : la population reste en dessous de 9 000 poissons. Elle augmente mais ne dépassera jamais 10 000. Une fonction croissante peut avoir une limite finie.

**Ex. 47 ★★★ Extrait de bac : une fonction (ax + b)eˆ(−x) de bout en bout**

(a) Quand $x\to-\infty$ : $2x-1\to-\infty$, et $-x\to+\infty$ donc $e^{-x}\to+\infty$ par composition. Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. La limite est infinie : pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

(b) Quand $x\to+\infty$ : $2x-1\to+\infty$ et $e^{-x}\to 0$, c'est une forme indéterminée du type $0\times\infty$. On développe : $f(x)=2\times\frac{x}{e^x}-e^{-x}$. Par croissances comparées, $\frac{e^x}{x}\to+\infty$, donc $\frac{x}{e^x}\to 0$ par inverse ; et $e^{-x}\to 0$ par composition. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ : l'axe des abscisses (droite d'équation $y=0$) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(c) On dérive un produit $uv$ avec $u(x)=2x-1$, $u'(x)=2$, $v(x)=e^{-x}$, $v'(x)=-e^{-x}$ : $f'(x)=2e^{-x}-(2x-1)e^{-x}=(2-2x+1)e^{-x}=(3-2x)e^{-x}$.

(d) Comme $e^{-x}>0$, $f'(x)$ a le signe de $3-2x$ : $f'(x)>0$ sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[$ et $f'(x)<0$ sur $]\frac{3}{2}\,;+\infty[$. Le maximum vaut $f(\frac{3}{2})=2e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}45$.

| x | -∞ | 1{,}5 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f(x) | −∞ | ↗ $2e^{-1,5}$ | ↘ 0 |

(e) L'asymptote est la droite $y=0$. Comme $f(x)-0=(2x-1)e^{-x}$ et $e^{-x}>0$, ce signe est celui de $2x-1$ : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ et au-dessus sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$. Oui, elle la coupe au point de coordonnées $(\frac{1}{2}\,;0)$ car $f(\frac{1}{2})=0$ : une courbe peut couper son asymptote horizontale.

**Ex. 48 ★★★ Une courbe prise entre deux asymptotes**

(a) Quand $x\to-\infty$, $e^x\to 0$, donc $4e^x-1\to-1$ et $e^x+1\to 1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$ : la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

(b) Tom tombe sur une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ : il ne peut rien conclure sans la lever. On factorise par $e^x$ : $g(x)=\frac{e^x(4-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}=\frac{4-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Par composition, $e^{-x}\to 0$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=4$ : la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(c) $g(x)-4=\frac{4e^x-1-4(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{-5}{e^x+1}$. Comme $e^x+1>0$, $g(x)-4<0$ pour tout réel $x$ : $\mathcal{C}$ est toujours strictement en dessous de la droite $y=4$.

(d) $g(x)-(-1)=\frac{4e^x-1+e^x+1}{e^x+1}=\frac{5e^x}{e^x+1}>0$ car $e^x>0$. Donc $\mathcal{C}$ est toujours strictement au-dessus de la droite $y=-1$.

**Ex. 48** **(suite)**

(e) Par la dérivée d'un quotient : $g'(x) = \frac{4\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)-(4\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{5\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} > 0$, donc $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

| x | -∞ | +∞ |
|---|---|---|
| g(x) | $-1$ | ↗ 4 |

D'après les questions précédentes, pour tout réel $x$ : $-1 < g(x) < 4$.

**Ex. 49** ★★★ **Le coût moyen d'un atelier de bougies**

(a) $M(x) = 2 + \frac{4}{x} - 4 \times \mathrm{e}^{-x} \times \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$ : $\frac{4}{x} \to 0$ ; $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ par composition et $\frac{1}{x} \to 0$, donc leur produit tend vers 0. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = 2$ : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$. Pour une très grosse production, le coût moyen se rapproche de 2 € par bougie.

(b) Quand $x \to 0^+$, $C(x) \to 0 + 4 - 4 = 0$ et $x \to 0$ : c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On écrit $M(x) = 2 + 4 \times \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$. En posant $h = -x$, $\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ avec $h \to 0$ ; or $\lim\limits_{h\to0} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1$ (taux d'accroissement de l'exponentielle en 0). Par composition, cette fraction tend vers 1, donc par somme $\lim\limits_{x\to0^+} M(x) = 2 + 4 = 6$.

(c) Non. $M$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ : la seule asymptote verticale possible est la droite d'équation $x = 0$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} M(x) = 6$ est finie : la droite $x = 0$ n'est pas asymptote verticale. Une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ne donne pas forcément une limite infinie.

(d) $M(x) - 2 = \frac{4-4\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{4(1-\mathrm{e}^{-x})}{x}$. Pour $x > 0$, $-x < 0$ donc $\mathrm{e}^{-x} < 1$ et $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$ ; avec $x > 0$, on obtient $M(x) - 2 > 0$. La courbe est toujours strictement au-dessus de son asymptote $y = 2$ : le coût moyen reste toujours supérieur à 2 € par bougie, sans jamais l'atteindre.

(e)

| x | 0 | +∞ |
|---|---|---|
| M(x) | ‖ 6 | ↘ 2 |

$M$ décroît strictement de 6 (limite en $0^+$, non atteinte) vers 2 (limite en $+\infty$, non atteinte) : pour tout $x > 0$, $2 < M(x) < 6$. Le coût moyen d'une bougie est toujours compris strictement entre 2 € et 6 €.