Terminale maths complémentaires / Limites de fonctions

benprof particulier.fr

40 exercices en 5 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. *Limites des fonctions de référence et opérations*

À retenir : Je pars des limites de référence et je nomme la règle : somme, produit ou quotient. Je surveille les signes (constante négative, puissance impaire, côté de 0). Une forme indéterminée se nomme, puis se lève.

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : les limites de référence** — Donne chaque limite sans calcul, en citant la fonction de référence utilisée. Précise le signe quand la limite vaut 0.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$ (rappel : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$)

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

(g) Peut-on calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$? Justifie.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : compléter le tableau des opérations** — u et v sont deux fonctions dont on connaît les limites en $+\infty$. Donne la limite demandée en nommant la règle (somme, produit, quotient), ou écris « FI » si c'est une forme indéterminée.

(a) $\lim u = 4$ et $\lim v = -\infty$: $\lim(u+v) = \ldots$

(b) $\lim u = +\infty$ et $\lim v = +\infty$: $\lim(u+v) = \ldots$

(c) $\lim u = +\infty$ et $\lim v = +\infty$: $\lim(u-v) = \ldots$

(d) $\lim u = -2$ et $\lim v = +\infty$: $\lim(u\times v) = \ldots$

(e) $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -\infty$: $\lim(u\times v) = \ldots$

(f) $\lim u = 7$ et $\lim v = -\infty$: $\lim \dfrac{u}{v} = \ldots$

(g) $\lim u = 0$ et $\lim v = +\infty$: $\lim(u\times v) = \ldots$

Ex. 3 ★☆☆ **Limites en 0, à droite et à gauche** — Pour chaque limite, donne le signe du dénominateur au voisinage de 0, puis conclus en nommant la règle.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}$

Ex. 3 (suite)

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{-5}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4}{x^2}$ (étudie les deux côtés)

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3}$

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$

(g) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a-t-elle une limite en 0 ? Justifie.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les opérations** — Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie en nommant la règle utilisée.

(a) « $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = 3$, et pour $x < 0$ la courbe de $x \mapsto 3 + \dfrac{1}{x}$ est au-dessus de la droite $y = 3$. »

(b) « $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^x) = +\infty$, car $e^x \to -\infty$. »

(c) « $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x) = 0$, car $+\infty - \infty = 0$. » Indication : $x^2 - x = x(x-1)$.

(d) « $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(x^2+3) = +\infty$, car les deux facteurs tendent vers l'infini. »

(e) « $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6}{\sqrt{x} + e^x} = 0$. »

Ex. 5 ★★☆ **La copie de Maël** — Ben a corrigé la copie de Maël : chaque ligne ci-dessous contient une erreur (dans le résultat ou dans la justification). Explique l'erreur, puis rédige la bonne réponse.

(a) « $\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - 3e^x) = +\infty$, car $e^x \to +\infty$. »

(b) « $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + \dfrac{5}{x}\right) = +\infty$ par somme, car $x^2 \to +\infty$ et $\dfrac{5}{x} \to +\infty$. »

(c) « $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x} + 1) = 1$. » Corrige, puis calcule la limite de $\sqrt{x} + 1$ là où elle a un sens, en $+\infty$.

(d) « $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 7) = +\infty$, car un cube est toujours positif. »

Ex. 6 ★★☆ **Le coût moyen d'une fromagerie** — Une fromagerie de Rodez fabrique q kilos de tomme par jour, avec $q > 0$. Le coût moyen d'un kilo, en euros, est $C_M(q) = 9 + \dfrac{360}{q}$.

(a) Calcule $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q)$. Que peux-tu en déduire pour la courbe de C_M ?

Ex. 6 **(suite)**

(b) On note ℓ la limite trouvée. Étudie le signe de $C_M(q) - \ell$ pour $q > 0$. Déduis-en la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.

(c) Calcule $\lim\limits_{\substack{q \to 0 \\ q>0}} C_M(q)$. Interprète graphiquement.

(d) Que signifient ces résultats pour la fromagerie ?

Ex. 7 ★★★ **Une courbe coincée entre deux asymptotes** — On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x+1}$ et sa courbe $\mathcal{C}_f$. Rappel : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en nommant chaque règle. Interprète graphiquement.

(b) Explique pourquoi les règles ne permettent pas de conclure en $+\infty$. Montre que $f(x) = \frac{1+3e^{-x}}{1+e^{-x}}$, puis déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(c) On note ℓ la limite de f en $+\infty$. Écris $f(x) - \ell$ sous la forme d'un seul quotient, puis déduis-en la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$.

(d) On note ℓ' la limite de f en $-\infty$. Fais le même travail avec $f(x) - \ell'$ et l'asymptote en $-\infty$.

(e) Inès affirme : « Pour tout réel x, $f(x)$ est strictement compris entre les deux asymptotes horizontales. » A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 8 ★★★ **Les truites du lac : deux modèles** — Dans un lac du Jura, on réintroduit des truites. Le nombre de truites, en centaines, t années après la réintroduction ($t \geqslant 0$), est estimé par deux modèles : $P(t) = \frac{12t+3}{t+1}$ (modèle A) et $Q(t) = 10 - 7e^{-t}$ (modèle B).

(a) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ en nommant la forme indéterminée, puis la méthode qui permet de la lever. Interprète ce résultat dans le contexte.

(b) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t)$ en nommant chaque règle. Interprète ce résultat dans le contexte.

(c) On note ℓ la limite de P en $+\infty$. Écris $P(t) - \ell$ sous la forme d'un seul quotient. Selon le modèle A, la population atteint-elle un jour ℓ centaines ? Justifie.

(d) Selon le modèle A, au bout de combien d'années le lac compte-t-il plus de 1 100 truites ?

(e) Léna affirme : « À long terme, le modèle A prévoit 200 truites de plus que le modèle B. » A-t-elle raison ? Justifie.

2. *Lever une forme indéterminée : le terme dominant*

À retenir : Forme indéterminée en $\pm\infty$: je la nomme, puis je factorise par le terme de plus haut degré, en haut et en bas : $\frac{2x^2+1}{5x^2-x} = \frac{2+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x}} \to \frac{2}{5}$. En un réel a, « $0/0$ » : je factorise par $(x-a)$. « $\infty/\infty = 1$ » est faux.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : nommer puis lever la forme indéterminée** — Pour chaque limite, nomme la forme indéterminée, puis lève-la en factorisant par le terme dominant. Conclus en citant la règle utilisée.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 + 6x^3 - x)$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 + 9x^2 - 4)$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 1}{3x^2 + 5x}$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 4}{2x^2 - 3}$

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 - x}{x^2 + 1}$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 4\sqrt{x})$

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les formes indéterminées** — Vrai ou faux ? Justifie par un calcul ou par un contre-exemple. Dans les deux premiers items, f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

(a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

(b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 5}{x^3 + 1} = 0$.

(d) La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe de $x \mapsto \frac{9x^2-2}{3x^2+4}$.

(e) En $-\infty$, $x^2 - 8x^3$ est une forme indéterminée.

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Malo en moins l'infini** — Malo cherche la limite en $-\infty$ de $f(x) = \frac{2x^3-x^2+5}{4x^2+3x}$, définie pour $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{3}{4}$. Il écrit : « En $-\infty$, x est très petit, donc ce sont les termes de plus bas degré qui comptent : $f(x)$ se comporte comme $\frac{5}{3x}$, donc la limite vaut 0. »

(a) En $-\infty$, calcule la limite du numérateur et étudie celle du dénominateur. Nomme la forme indéterminée qui apparaît.

(b) Explique l'erreur de Malo : quels termes faut-il garder en $-\infty$?

(c) Calcule correctement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en factorisant en haut et en bas.

(d) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Justifie.

Ex. 12 ★★☆ **Une forme « 0/0 » en un réel** — Soit $g(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$, définie pour $x \neq -3$ et $x \neq 3$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe.

(a) Quelle forme obtiens-tu quand x tend vers 3 ? Pourquoi la règle du terme dominant ne sert-elle à rien ici ?

(b) Vérifie que $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, puis calcule $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

Ex. 12 **(suite)**

(c) Calcule les limites de g en -3 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

(d) Calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$, puis donne toutes les asymptotes de $\mathcal{C}_g$.

Ex. 13 ★★☆ **Un quotient d'exponentielles et son tableau** — Soit $h(x) = \frac{2e^x+3}{e^x-1}$, définie pour $x \neq 0$. On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(a) En $+\infty$, nomme la forme indéterminée, puis lève-la en factorisant par e^x en haut et en bas.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. Y a-t-il une forme indéterminée ? Justifie.

(c) Étudie le signe de $e^x - 1$, puis calcule les limites de h en 0 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

(d) On admet que h est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$. Complète le tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h(x)	… ↘	… ‖ …	↘ …

puis donne les trois asymptotes de $\mathcal{C}_h$.

Ex. 14 ★★☆ **Les poissons du lac** — Dans un lac près d'Annecy, on réintroduit une espèce de poisson. Le nombre de poissons, en milliers, t années après la réintroduction, est modélisé par $P(t) = \frac{60t+20}{t+4}$ pour $t \geqslant 0$.

(a) Calcule $P(0)$ et interprète ce résultat.

(b) Nomme la forme indéterminée en $+\infty$, puis calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$.

(c) Écris la différence entre $P(t)$ et la limite trouvée à la question précédente sous la forme d'un seul quotient, puis étudie son signe pour $t \geqslant 0$.

(d) À partir de combien d'années la population dépasse-t-elle 50 000 poissons ?

(e) Un garde-pêche affirme : « la population augmente chaque année, donc elle finira par dépasser 100 000 poissons. » A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 15 ★★★ **Une famille de quotients : tout dépend des degrés** — Pour tout réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \frac{ax^3+4x^2-3}{2x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_a$ sa courbe. Comme $2x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x, f_a est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(a) On prend $a = 0$. Noé écrit : « en $+\infty$, c'est $\frac{\infty}{\infty}$, donc la limite vaut 1 ». Corrige son erreur en calculant $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)$.

(b) Étudie la position de $\mathcal{C}_0$ par rapport à son asymptote horizontale en $+\infty$.

(c) On suppose $a \neq 0$. Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ selon le signe de a. La courbe $\mathcal{C}_a$ a-t-elle une asymptote horizontale ? Justifie.

Ex. 15 **(suite)**

(d) Ben garde $a = 0$ mais remplace le dénominateur par $2x^4 + 1$: $g(x) = \frac{4x^2-3}{2x^4+1}$. Nomme la forme indéterminée en $-\infty$, lève-la, puis interprète graphiquement le résultat.

Ex. 16 ★★★ **Retrouver une fonction à partir de son tableau** — Soit $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, où a, b et c sont des réels. On sait que $f(0) = -1$ et que f a le tableau de variations suivant. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	2 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 2

(a) Lis sur le tableau les limites de f aux bornes, puis donne les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

(b) Détermine a, b et c en justifiant chaque valeur.

(c) Avec l'expression trouvée, retrouve par le calcul les limites de f en 3, à gauche puis à droite, en étudiant le signe de $x - 3$.

(d) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.

(e) Propose une fonction g, qui n'est pas un quotient de polynômes, dont la courbe a la droite $y = 2$ pour asymptote en $+\infty$ mais aucune asymptote horizontale en $-\infty$. Justifie.

3. *Limite en l'infini et asymptote horizontale*

À retenir : Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale (étudie aussi $-\infty$). Position : signe de $f(x) - \ell$. « ∞/∞ » se lève en factorisant : en $\pm\infty$, $\frac{4x^2+1}{2x^2-x} \to 2$.

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : limites en l'infini** — Détermine chaque limite. Si tu rencontres une forme indéterminée, nomme-la avant de la lever.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3 + 7x^2 - 4)$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 - 6x^3 + 1)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2 - 3}{2x^2 + x}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x + 1}{x^2 + 3}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 3x)$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5 - \dfrac{8}{x^3 + x}\right)$

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : exponentielle, des deux côtés** — Pour chaque fonction, calcule la limite en $-\infty$ et en $+\infty$, puis donne l'équation de chaque asymptote horizontale, s'il y en a. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(a) $f(x) = 4 + 3e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) $g(x) = 1 - 5e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $h(x) = \dfrac{6}{2 + e^{x}}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $k(x) = \dfrac{3}{x} - e^{-x}$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Ex. 19 ★☆☆ **Lire les asymptotes dans un tableau** — La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h(x)	$+\infty$ ↘	-4	↗ 3

(a) Lis $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

(b) Vrai ou faux : « la droite d'équation $x = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ ». Justifie.

(c) La courbe $\mathcal{C}_h$ admet-elle une asymptote horizontale en $-\infty$? Justifie.

(d) Sur $[-1;+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_h$ est-elle au-dessus ou en dessous de son asymptote horizontale ? Justifie avec le tableau.

Ex. 20 ★★☆ **Les deux erreurs d'Inès** — Inès étudie $f(x) = \frac{6x^2 - x}{4x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$. Elle écrit : « En $+\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, donc la limite vaut 1 : asymptote $y = 1$. »

(a) Explique l'erreur d'Inès.

(b) Calcule correctement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant.

(c) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis donne les asymptotes horizontales de $\mathcal{C}_f$.

(d) Pour $g(x) = x^2 - 4x$, Inès écrit : « en $+\infty$, $\infty - \infty = 0$, donc $y = 0$ est asymptote ». Corrige-la.

Ex. 21 ★★☆ **Une courbe qui traverse son asymptote** — On considère $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$ et sa courbe $\mathcal{C}_f$.

(a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprète graphiquement les deux limites.

(c) On note ℓ la limite trouvée. Écris $f(x) - \ell$ sous la forme d'une seule fraction.

(d) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.

(e) Vrai ou faux : « une courbe ne coupe jamais son asymptote horizontale ». Justifie avec f.

Ex. 22 ★★☆ **Le coût moyen d'un tabouret** — Une menuiserie de Quimper fabrique q centaines de tabourets, avec $q > 0$. Le coût moyen d'un tabouret, en euros, est $C_M(q) = \frac{25q + 130}{q + 1}$.

(a) Détermine les réels a et b tels que, pour $q > 0$, $C_M(q) = a + \frac{b}{q+1}$.

(b) Calcule $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q)$ en citant les règles utilisées.

(c) Interprète cette limite pour la courbe de C_M, puis pour la menuiserie.

(d) Le coût moyen peut-il devenir inférieur à cette limite ? Justifie avec un signe.

(e) À partir de combien de tabourets le coût moyen passe-t-il sous 26 € ?

Ex. 23 ★★★ **Les poissons d'un étang près de Montluçon** — On introduit des poissons dans un étang près de Montluçon. On modélise leur nombre, en milliers, par $P(t) = \frac{40t + 9}{2t + 3}$, où $t \geqslant 0$ est le temps en années. On note $\mathcal{C}_P$ la courbe de P.

(a) Calcule $P(0)$ et interprète ce résultat dans le contexte.

(b) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)$ en nommant la forme indéterminée. Interprète graphiquement, puis dans le contexte.

(c) On note ℓ la limite trouvée. Écris $P(t) - \ell$ sous la forme d'une seule fraction, puis déduis-en la position de $\mathcal{C}_P$ par rapport à son asymptote.

(d) Lucas affirme : « Un jour, le nombre de poissons sera exactement égal à cette limite. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Résous l'inéquation $P(t) > 19$ sur $[0;+\infty[$ et interprète le résultat.

Ex. 24 ★★★ **Retrouver une fonction grâce à ses asymptotes** — Soit a et b deux réels, et $f(x) = \frac{ae^x + b}{e^x + 1}$. On sait que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$, et qu'elle passe par le point $A(0;2)$. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$. Exprime $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en fonction de b, puis déduis-en la valeur de b.

(b) Utilise le point A pour trouver la valeur de a.

(c) Avec ces valeurs, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en nommant la forme indéterminée. Que peux-tu en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

(d) Pour chacune des deux asymptotes $y = \ell$, étudie le signe de $f(x) - \ell$ et donne la position de $\mathcal{C}_f$.

(e) Malo affirme : « $h(x) = 5e^x - 1$ a une asymptote horizontale en $-\infty$ et une en $+\infty$. » Vrai ou faux ? Justifie.

4. Limite en un réel, asymptote verticale, position de la courbe

À retenir : En une valeur interdite a : si le numérateur tend vers $\ell \neq 0$, étudie le signe du dénominateur de chaque côté de a (par exemple $\frac{-2}{0^+} \to -\infty$) ; la droite $x = a$ est alors asymptote. Si tout tend vers 0, c'est la forme « $\frac{0}{0}$ » : simplifie.

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : limites en une valeur interdite** — Calcule chaque limite en justifiant par le signe du dénominateur.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 7\\ x>7}} \dfrac{3}{7-x}$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{2+e^x}{x}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{x-5}{x+1}$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x-5}{x+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2}{(x+6)^2}$ (étudie les deux côtés)

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x}$

Ex. 26 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux en une valeur interdite** — Vrai ou faux ? Justifie.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-3}{(x+2)^2} = -\infty$.

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-9}{x} = +\infty$.

(d) La courbe de $x \mapsto \frac{x^2-64}{x+8}$ admet la droite d'équation $x = -8$ pour asymptote verticale.

(e) La courbe de $x \mapsto \frac{2}{x+5}$ admet la droite d'équation $y = -5$ pour asymptote verticale.

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur de Léa** — Léa étudie $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Elle écrit : « Le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote verticale. »

(a) Étudie le signe de $x - 2$ selon les valeurs de x.

(b) Calcule la limite de f quand x tend vers 2 par valeurs supérieures, puis par valeurs inférieures.

(c) Repère les deux erreurs de Léa et rédige une conclusion correcte.

Ex. 28 ★★☆ **Compléter un tableau de variations** — Soit $g(x) = \frac{x+5}{x-4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. On admet que g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;4[$ et sur $]4\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
g(x)	… ↘	… ‖ …	↘ …

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

(b) Calcule la limite de g en 4 à droite, puis à gauche.

(c) Complète le tableau de variations de g.

(d) Donne les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_g$.

Ex. 29 ★★☆ **Le coût d'une dépollution** — Près de Rouen, Inès étudie une usine qui veut éliminer p % de ses rejets polluants. Le coût, en milliers d'euros, est $C(p) = \frac{50p}{100-p}$ pour $p \in [0\,;100[$.

(a) Calcule le coût pour éliminer 80 % des rejets.

(b) Explique pourquoi on n'étudie la limite de C en 100 que par valeurs inférieures.

(c) Calcule $\lim\limits_{\substack{p\to 100\\ p<100}} C(p)$ en étudiant le signe de $100 - p$.

(d) Interprète ce résultat pour l'usine et donne l'asymptote correspondante à la courbe de C.

Ex. 30 ★★☆ **Choisir le bon paramètre** — Hugo cherche une fonction $f(x) = \frac{4x+c}{x+3}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, où c est un réel, dont la courbe a deux asymptotes : $y = 4$ et $x = -3$.

(a) Montre que, quel que soit c, $f(x)$ tend vers 4 en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Hugo essaie $c = 12$. Calcule la limite de f en -3. La droite $x = -3$ est-elle asymptote ? Justifie.

(c) Pour $c = 14$, calcule la limite de f en -3 à droite, puis à gauche.

(d) Pour $c = 14$, écris $f(x) - 4$ sous la forme d'un seul quotient, puis donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y = 4$.

Ex. 31 ★★★ **Deux valeurs interdites** — Soit $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^2-4x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\,;3\}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On admet que $2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(x-3)$ et que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interprète graphiquement.

(b) Tom affirme : « 1 et 3 sont des valeurs interdites, donc $\mathcal{C}_f$ a deux asymptotes verticales. » En étudiant la limite de f en 3, dis s'il a raison. Justifie.

(c) Calcule la limite de f en 1 à droite et à gauche. Conclus graphiquement.

(d) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.

Ex. 32 ★★★ **Un carré au dénominateur, une racine au dénominateur** — On considère $h(x) = \frac{1-2x}{(x-3)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $k(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$, de courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$.

(a) Calcule la limite de h en 3 à droite et à gauche. Malo pense qu'elles sont de signes contraires, comme pour $\frac{1}{x-3}$. A-t-il raison ? Justifie.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. Interprète graphiquement.

(c) Étudie la position de $\mathcal{C}_h$ par rapport à son asymptote horizontale. Coupe-t-elle cette asymptote ? Justifie.

(d) Pourquoi n'étudie-t-on la limite de k en 0 qu'à droite ? Calcule-la et conclus graphiquement.

(e) Montre que $k(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$, puis calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$. $\mathcal{C}_k$ a-t-elle une asymptote horizontale ? Justifie.

5. *Limites en situation : interpréter un comportement à long terme*

À retenir : En contexte ($t \geqslant 0$), seule la limite en $+\infty$ a un sens. Elle décrit le long terme : conclus avec l'unité. Si $k > 0$, $e^{-kt} \to 0$, donc $a + b\,e^{-kt} \to a$ (ex. : $4 + 3e^{-0{,}5t} \to 4$). Une limite n'est pas toujours atteinte : étudie le signe de $f(t) - \ell$.

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : limites de modèles en $+\infty$** — Chaque fonction est définie pour $t \geqslant 0$. Calcule sa limite quand t tend vers $+\infty$ en nommant la règle utilisée.

(a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(12 - 5e^{-0{,}2t}\right)$

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{8t+3}{2t+5}$

(c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{300}{1+4e^{-t}}$

(d) $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(20 + \dfrac{45}{t+6}\right)$

(e) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{6t^2+1}{3t^2+t}$

(f) $\lim\limits_{t\to+\infty} 7\left(1 - e^{-3t}\right)$

(g) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t+40}{t^2+2}$

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux en contexte** — Chaque modèle est défini pour $t \geqslant 0$. Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifie.

(a) $C(t) = 2 + 7e^{-0{,}4t}$ (en mg/L, t en heures). « Pour décrire le long terme, il faut aussi calculer la limite en $-\infty$. »

(b) $m(t) = 9 - \frac{4}{t+2}$ (en grammes). « La masse tend vers 9 g, donc elle finit par valoir exactement 9 g. »

(c) $p(t) = \frac{5t+1}{t+3}$ (en milliers d'abonnés). « Le nombre d'abonnés se stabilise autour de 5 000. »

Ex. 34 (suite)

(d) $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ (température d'un café en °C, t en minutes). « À long terme, le café tend vers 80 °C. »

(e) $q(t) = \frac{200t}{t^2+1}$ (en mg). « La quantité tend vers 200 mg. »

Ex. 35 ★★☆ **Coût moyen dans un atelier de céramique** — Un atelier de Limoges fabrique x bols par mois ($x > 0$). Le coût total, en euros, est $C(x) = 0{,}02x^2 + 8x + 500$. Le coût moyen d'un bol est $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

(a) Écris $C_M(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x}$, avec a, b et c réels.

(b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} C_M(x)$, puis interprète ce résultat pour l'atelier.

(c) Lina affirme : « Plus l'atelier produit de bols, plus le coût moyen se rapproche de 8 €. » Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} C_M(x)$. Lina a-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 36 ★★☆ **Des chamois dans une réserve : conjecturer puis démontrer** — Dans une réserve des Pyrénées, le nombre de chamois au bout de t années ($t \geqslant 0$) est modélisé par $N(t) = \frac{900t+200}{t+4}$. Voici quelques valeurs arrondies :

t	N(t)
0	50
10	657,1
50	837,0
100	867,3
1000	896,6
10000	899,7

(a) À l'aide du tableau, conjecture la limite de $N(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

(b) Démontre cette conjecture, puis interprète-la avec l'unité.

(c) N n'est pas définie en -4. Faut-il étudier la limite de N en -4 ? Justifie.

(d) On note ℓ la limite trouvée. Calcule $N(t) - \ell$. L'effectif atteindra-t-il un jour ℓ chamois ? Justifie.

Ex. 37 ★★☆ **Régler une vitesse limite** — Une bille tombe dans un tube d'huile. Sa vitesse, en cm/s, au bout de t secondes ($t \geqslant 0$), est $v(t) = \frac{at}{4t+1}$. Ici a est un réel strictement positif, qui dépend de la bille.

(a) Exprime $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ en fonction de a.

(b) Détermine a pour que la vitesse limite de la bille soit de 12 cm/s.

(c) Avec cette valeur de a, détermine à partir de quel instant la vitesse dépasse 11 cm/s.

Ex. 38 ★★☆ **Chlore dans une piscine : comparer deux modèles** — Après un traitement, la concentration en chlore d'une piscine d'Annecy, en mg/L, au bout de t heures ($t \geqslant 0$), est modélisée de deux façons. Malik propose $C_A(t) = 1{,}5 + 2e^{-0{,}3t}$. Inès propose $C_B(t) = \frac{4t+7}{2t+2}$.

(a) Vérifie que les deux modèles donnent la même concentration au départ.

(b) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} C_A(t)$, puis interprète ce résultat.

(c) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} C_B(t)$, puis interprète ce résultat.

(d) Le gérant craint que la concentration descende un jour sous 1,8 mg/L. Que prévoit chaque modèle ? Justifie.

Ex. 39 ★★★ **Un yaourt au réfrigérateur : quelle température à long terme ?** — À Rennes, un yaourt sort de la yaourtière et Yanis le met aussitôt au réfrigérateur. Sa température, en °C, au bout de t minutes ($t \geqslant 0$), est modélisée par $T(t) = \frac{4t+90}{t+3}$.

(a) Calcule $T(0)$ et donne sa signification dans le contexte.

(b) Nomme la forme indéterminée obtenue en $+\infty$, lève-la, puis calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$. Conclus par une phrase en contexte.

(c) On note ℓ cette limite. Écris $T(t) - \ell$ sous la forme d'une seule fraction. Déduis-en la position de la courbe de T par rapport à son asymptote horizontale.

(d) Yanis affirme : « Au bout d'un certain temps, mon yaourt sera exactement à cette température limite. » A-t-il raison ? Justifie.

(e) Le yaourt se déguste quand sa température est inférieure ou égale à 5 °C. À partir de combien de minutes est-ce le cas ?

Ex. 40 ★★★ **Dépolluer les rejets d'une usine** — Une usine de Dunkerque veut éliminer un polluant de ses rejets. Le coût, en milliers d'euros, pour éliminer p % du polluant est modélisé par $C(p) = \frac{50p}{100-p}$, pour $0 \leqslant p < 100$.

(a) Calcule $C(0)$ et $C(80)$, puis interprète $C(80)$ dans le contexte.

(b) Étudie le signe de $100 - p$ sur $[0 ; 100[$, puis calcule $\lim\limits_{\substack{p \to 100 \\ p<100}} C(p)$. Interprète graphiquement, puis en contexte.

(c) Zoé veut aussi calculer la limite de C en $+\infty$ et quand p tend vers 100 par valeurs supérieures. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Vérifie que $C(p) = -50 + \frac{5000}{100-p}$. Déduis-en le sens de variation de C, puis dresse son tableau de variations avec la limite.

(e) Le budget de l'usine est de 450 milliers d'euros. Quel pourcentage maximal du polluant peut-elle éliminer ?