Terminale maths complémentaires / Limites de fonctions — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Limites des fonctions de référence et opérations*

Ex. 1 ★☆☆ **Automatismes : les limites de référence**

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Quand $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$: la limite est 0^- (et pas 0^+ comme en $+\infty$).

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$: la puissance est paire, donc $x^2 > 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$: la puissance est impaire, donc le cube d'un négatif est négatif.

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, et même 0^+ car $e^x > 0$ pour tout x (et pas $-\infty$).

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Comme $e^x > 0$, c'est 0^+ : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$.

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right) = -2$.

(g) Non : $\sqrt{x}$ n'est définie que sur $[0;+\infty[$. On ne peut pas faire tendre x vers $-\infty$, et cette limite n'a pas de sens.

Ex. 2 ★☆☆ **Automatismes : compléter le tableau des opérations**

(a) Par somme : $4 + (-\infty) = -\infty$.

(b) Par somme : $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

(c) FI de la forme « $+\infty - \infty$ ». Les règles ne concluent pas : par exemple $(x+1) - x \to 1$ alors que $x^2 - x \to +\infty$.

(d) Par produit : un réel négatif fois $+\infty$ donne $-\infty$ (règle des signes).

(e) Par produit : $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.

(f) Par quotient : $\frac{-7}{-\infty} = 0$ (un réel divisé par l'infini).

(g) FI de la forme « $0 \times \infty$ ». Par exemple $\frac{1}{x} \times x \to 1$ alors que $\frac{1}{x} \times x^2 \to +\infty$.

Ex. 3 ★☆☆ **Limites en 0, à droite et à gauche**

(a) Quand $x > 0$, le dénominateur tend vers 0^+. Par quotient, $\frac{1}{0^+}$ donne $+\infty$.

(b) Quand $x < 0$, le dénominateur tend vers 0^-. Par quotient, $\frac{1}{0^-}$ donne $-\infty$.

(c) Quand $x < 0$, $x \to 0^-$. Le numérateur -5 est négatif : par quotient et règle des signes, $\frac{-5}{0^-}$ donne $+\infty$.

Ex. 3 (suite)

(d) Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc $x^2 \to 0^+$ des deux côtés. Par quotient, la limite vaut $+\infty$ à droite comme à gauche : $\lim\limits_{x\to0} \frac{4}{x^2} = +\infty$.

(e) Quand $x < 0$, $x^3 < 0$, donc $x^3 \to 0^-$. Par quotient, la limite vaut $-\infty$.

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $-\frac{1}{x} \to -\infty$. Par somme, la limite vaut $-\infty$.

(g) Non : la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche $-\infty$. Elles sont différentes, donc il n'y a pas de limite « en 0 ». La droite $x = 0$ est quand même asymptote verticale.

Ex. 4 ★★☆ **Vrai ou faux sur les opérations**

(a) Faux. La limite est juste : $\frac{1}{x} \to 0$, donc par somme la limite vaut 3. Mais pour $x < 0$, $\left(3 + \frac{1}{x}\right) - 3 = \frac{1}{x} < 0$: la courbe est en dessous de l'asymptote $y = 3$.

(b) Faux. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (et pas $-\infty$). Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - e^x) = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

(c) Faux. « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée, elle ne vaut pas 0. Ici $x^2 - x = x(x-1)$: $x \to +\infty$ et $x - 1 \to +\infty$, donc par produit la limite vaut $+\infty$.

(d) Faux. Par somme, $1 - x \to -\infty$ et $x^2 + 3 \to +\infty$. Par produit, $(-\infty) \times (+\infty)$ donne $-\infty$: il faut tenir compte du signe de chaque facteur.

(e) Vrai. $\sqrt{x} \to +\infty$ et $e^x \to +\infty$, donc par somme le dénominateur tend vers $+\infty$. Par quotient, $\frac{-6}{+\infty}$ donne 0.

Ex. 5 ★★☆ **La copie de Maël**

(a) Maël oublie que -3 est négatif. $e^x \to +\infty$, donc par produit $-3e^x \to -\infty$, puis par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - 3e^x) = -\infty$.

(b) Le résultat est juste mais la justification est fausse : $\frac{5}{x} \to 0$ en $-\infty$ (un réel divisé par l'infini). Par somme, $+\infty + 0 = +\infty$.

(c) $\sqrt{x}$ n'est définie que sur $[0;+\infty[$: la limite en $-\infty$ n'a pas de sens. En $+\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} + 1) = +\infty$.

Ex. 5 **(suite)**

(d) Faux : le cube d'un nombre négatif est négatif. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 7) = -\infty$.

Ex. 6 ★★☆ **Le coût moyen d'une fromagerie**

(a) $q \to +\infty$, donc par quotient $\frac{360}{q} \to 0$, et par somme $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q) = 9$. La droite $y = 9$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

(b) Ici $\ell = 9$. $C_M(q) - 9 = \frac{360}{q}$. Comme $q > 0$, ce quotient est strictement positif : la courbe est toujours au-dessus de la droite $y = 9$.

(c) Quand $q > 0$, $q \to 0^+$, donc par quotient $\frac{360}{q} \to +\infty$, et par somme $C_M(q) \to +\infty$. La droite $q = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale.

(d) Plus la production est grande, plus le coût moyen se rapproche de 9 €, sans jamais descendre en dessous. À l'inverse, une toute petite production fait exploser le coût moyen : les frais fixes de 360 € se répartissent sur très peu de kilos.

Ex. 7 ★★★ **Une courbe coincée entre deux asymptotes**

(a) Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais et f est définie sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$, $e^x \to 0$ (et non $-\infty$). Par somme, $e^x + 3 \to 3$ et $e^x + 1 \to 1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{1} = 3$. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

(b) En $+\infty$, $e^x \to +\infty$, donc par somme $e^x + 3 \to +\infty$ et $e^x + 1 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout réel x, on factorise par e^x en haut et en bas : $f(x) = \frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+3e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En $+\infty$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to 0$ (par quotient, $\frac{1}{+\infty} = 0$) et, par produit, $3e^{-x} \to 0$. Par somme, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La droite $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Attention : la limite vaut 1 parce qu'on l'a calculée, pas parce que « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ».

(c) Ici $\ell = 1$. $f(x) - 1 = \frac{e^x+3-(e^x+1)}{e^x+1} = \frac{2}{e^x+1}$. Le numérateur 2 est positif et le dénominateur est strictement positif, donc $f(x) - 1 > 0$ pour tout réel x. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la droite $y = 1$.

(d) Ici $\ell' = 3$. $f(x) - 3 = \frac{e^x+3-3(e^x+1)}{e^x+1} = \frac{-2e^x}{e^x+1}$. Comme $e^x > 0$, le numérateur $-2e^x$ est strictement négatif. Le dénominateur est strictement positif, donc $f(x) - 3 < 0$ pour tout réel x. $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de la droite $y = 3$.

Ex. 7 **(suite)**

(e) Oui, Inès a raison. D'après les deux questions précédentes, $f(x) > 1$ et $f(x) < 3$ pour tout réel x, donc $1 < f(x) < 3$. $\mathcal{C}_f$ est située entre les droites $y = 1$ et $y = 3$, sans jamais les toucher.

Ex. 8 ★★★ **Les truites du lac : deux modèles**

(a) En $+\infty$, $12t + 3 \to +\infty$ et $t + 1 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$, on factorise par le terme dominant t en haut et en bas : $P(t) = \frac{t\left(12+\frac{3}{t}\right)}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \frac{12+\frac{3}{t}}{1+\frac{1}{t}}$. Par quotient ($\frac{k}{\infty} = 0$), $\frac{3}{t} \to 0$ et $\frac{1}{t} \to 0$. Par somme, le numérateur tend vers 12 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 12$. À long terme, le modèle A prévoit que la population se stabilise autour de 12 centaines, soit 1 200 truites (asymptote horizontale $y = 12$).

(b) En $+\infty$, $e^{-t} = \frac{1}{e^t} \to 0$ par quotient, car $e^t \to +\infty$. Par produit par -7, $-7e^{-t} \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = 10$. À long terme, le modèle B prévoit que la population se stabilise autour de 10 centaines, soit 1 000 truites (asymptote horizontale $y = 10$).

(c) Ici $\ell = 12$. $P(t) - 12 = \frac{12t+3-12(t+1)}{t+1} = \frac{12t+3-12t-12}{t+1} = \frac{-9}{t+1}$. Pour $t \geqslant 0$, $t + 1 > 0$, donc $P(t) - 12 < 0$. Non : selon le modèle A, la population reste toujours sous les 1 200 truites. Elle s'en approche par en dessous, sans jamais les atteindre.

(d) 1 100 truites correspondent à 11 centaines. Avec la question précédente, $P(t) = 12 - \frac{9}{t+1}$. $P(t) > 11 \iff 1 > \frac{9}{t+1} \iff t + 1 > 9$ (car $t + 1 > 0$) $\iff t > 8$. On vérifie que $P(8) = \frac{99}{9} = 11$. Le lac compte strictement plus de 1 100 truites au bout de 8 ans, c'est-à-dire pour $t > 8$.

(e) Les limites calculées donnent $12 - 10 = 2$ centaines, soit 200 truites. Oui, Léna a raison : à long terme, le modèle A prévoit environ 1 200 truites et le modèle B environ 1 000, soit un écart de 200 truites.

2. *Lever une forme indéterminée : le terme dominant*

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : nommer puis lever la forme indéterminée**

(a) En $+\infty$, $-2x^4 \to -\infty$ et $6x^3 \to +\infty$: c'est une forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ». Pour $x \neq 0$, $-2x^4 + 6x^3 - x = x^4\left(-2 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers -2 et $x^4 \to +\infty$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

Ex. 9 **(suite)**

(b) En $-\infty$, $5x^3 \to -\infty$ et $9x^2 \to +\infty$: c'est une forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ». Pour $x \neq 0$, $5x^3 + 9x^2 - 4 = x^3\left(5 + \frac{9}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers 5 et $x^3 \to -\infty$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

(c) Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$, $\frac{6x^2-1}{3x^2+5x} = \frac{x^2\left(6-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x}\right)} = \frac{6-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}}$. Le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers 3. Par quotient, la limite vaut 2.

(d) Le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x < -2$, $\frac{x+4}{2x^2-3} = \frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{4}{x}}{2-\frac{3}{x^2}}$. Ici, $\frac{1}{x} \to 0$ et la fraction tend vers $\frac{1}{2}$. Par produit, la limite vaut 0 : le degré du haut est inférieur à celui du bas.

(e) Au numérateur, $3x^3 \to -\infty$ et $-x \to +\infty$: c'est une forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ». Les règles ne concluent donc pas pour le quotient. Pour $x \neq 0$, $\frac{3x^3-x}{x^2+1} = \frac{x^3\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x \times \frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$. La fraction tend vers 3 et $x \to -\infty$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

(f) En $+\infty$, $x \to +\infty$ et $-4\sqrt{x} \to -\infty$: c'est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$, $x - 4\sqrt{x} = x\left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\sqrt{x} \to +\infty$, on a $\frac{4}{\sqrt{x}} \to 0$ par quotient, donc la parenthèse tend vers 1 par somme. Comme $x \to +\infty$, la limite vaut $+\infty$ par produit.

Ex. 10 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux sur les formes indéterminées**

(a) Faux. Prends $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = x^2$. Les deux fonctions tendent vers $+\infty$, et on a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Mais $f(x) - g(x) = 3$ pour tout x, donc la limite vaut 3, pas 0.

(b) Faux. Prends $f(x) = 4x + 1$ et $g(x) = x - 2$, qui tendent vers $+\infty$. Pour $x > 2$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$. Par quotient, la limite vaut 4, pas 1.

(c) Vrai. On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$, $\frac{2x+5}{x^3+1} = \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x^2} \times \frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}$. Ici, $\frac{1}{x^2} \to 0$ et la fraction tend vers 2. Par produit, la limite vaut 0.

(d) Vrai. En $-\infty$, on a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $\frac{9x^2-2}{3x^2+4} = \frac{9-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{4}{x^2}}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{9}{3} = 3$. La droite $y = 3$ est donc asymptote horizontale en $-\infty$.

Ex. 10 **(suite)**

(e) Faux. En $-\infty$, $x^2 \to +\infty$. Comme $x^3 \to -\infty$, on a $-8x^3 \to +\infty$ par produit. Par somme, $x^2 - 8x^3 \to +\infty$: les règles concluent, donc ce n'est pas une forme indéterminée.

Ex. 11 ★★☆ **L'erreur de Malo en moins l'infini**

(a) Au numérateur, $2x^3 \to -\infty$ et $-x^2 \to -\infty$. Par somme, le numérateur tend vers $-\infty$. Au dénominateur, $4x^2 \to +\infty$ et $3x \to -\infty$: c'est la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $x \neq 0$, $4x^2 + 3x = x^2\left(4 + \frac{3}{x}\right)$, qui tend vers $+\infty$ par produit. Le quotient est donc du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » : c'est une forme indéterminée.

(b) En $-\infty$, x est négatif, mais $|x|$ devient très grand. Plus le degré est élevé, plus le terme est grand en valeur absolue. Les termes dominants sont donc ceux de plus haut degré : $2x^3$ en haut et $4x^2$ en bas, pas 5 et $3x$.

(c) Pour $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{3}{4}$, $f(x) = \frac{x^3\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(4+\frac{3}{x}\right)} = x \times \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{4+\frac{3}{x}}$. Par quotient, la fraction tend vers $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Comme $x \to -\infty$, on obtient par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(d) On garde la même écriture : la fraction tend vers $\frac{1}{2}$ et $x \to +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont infinies, donc $\mathcal{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale.

Ex. 12 ★★☆ **Une forme « 0/0 » en un réel**

(a) Quand $x \to 3$, le numérateur tend vers $9 - 15 + 6 = 0$ et le dénominateur vers $9 - 9 = 0$: c'est une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». La règle du terme dominant ne vaut qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$, jamais en un réel.

(b) $(x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$. De plus, $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$, on simplifie : $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Quand $x \to 3$, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 6. Par quotient, $\lim\limits_{x\to3} g(x) = \frac{1}{6}$. La limite est finie : la droite $x = 3$ n'est pas asymptote.

(c) On utilise $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$, dont le numérateur tend vers -5. On a $x + 3 > 0$ quand $x > -3$, donc le dénominateur tend vers 0^+. Par quotient, la limite par valeurs supérieures vaut $-\infty$. On a $x + 3 < 0$ quand $x < -3$, donc le dénominateur tend vers 0^-. Par quotient, la limite par valeurs inférieures vaut $+\infty$.

Ex. 12 **(suite)**

(d) En $\pm\infty$, on a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $x \neq -3$ et $x \neq 3$, $g(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}$. Par quotient, la limite vaut 1 en $+\infty$ comme en $-\infty$. Asymptotes de $\mathcal{C}_g$: la droite $y = 1$ (horizontale, en $\pm\infty$) et la droite $x = -3$ (verticale). Il n'y a pas d'asymptote en $x = 3$.

Ex. 13 ★★☆ **Un quotient d'exponentielles et son tableau**

(a) En $+\infty$, $e^x \to +\infty$, donc le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On écrit $h(x) = \frac{e^x\left(2+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2+3e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Par quotient, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to 0$. Le numérateur tend donc vers 2 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 2$.

(b) En $-\infty$, $e^x \to 0$. Par somme, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers -1 : il n'y a pas de forme indéterminée. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -3$.

(c) La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$.
Donc $e^x - 1 > 0$ quand $x > 0$, et $e^x - 1 < 0$ quand $x < 0$. En 0, le numérateur tend vers $2 + 3 = 5$. Par valeurs supérieures, le dénominateur tend vers 0^+ : par quotient, la limite vaut $+\infty$. Par valeurs inférieures, il tend vers 0^- : par quotient, la limite vaut $-\infty$.

(d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h(x)	$-3 \searrow$	$-\infty \,\|\!\|\, +\infty$	$\searrow 2$

Asymptotes de $\mathcal{C}_h$: la droite $y = -3$ (horizontale en $-\infty$), la droite $y = 2$ (horizontale en $+\infty$) et la droite $x = 0$
(verticale).

Ex. 14 ★★☆ **Les poissons du lac**

(a) $P(0) = \frac{20}{4} = 5$: au moment de la réintroduction, il y a 5 000 poissons dans le lac.

(b) En $+\infty$, $60t + 20 \to +\infty$ et $t + 4 \to +\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$, $P(t) = \frac{t\left(60+\frac{20}{t}\right)}{t\left(1+\frac{4}{t}\right)} = \frac{60+\frac{20}{t}}{1+\frac{4}{t}}$. Par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 60$. La droite $y = 60$ est asymptote horizontale : à long terme, la population se stabilise vers 60 000 poissons.

(c) $P(t) - 60 = \frac{60t+20-60(t+4)}{t+4} = \frac{-220}{t+4}$. Pour $t \geqslant 0$, $t + 4 > 0$, donc $P(t) - 60 < 0$. La courbe de P est toujours en dessous de son asymptote $y = 60$.

Ex. 14 **(suite)**

(d) Comme $t + 4 > 0$, $P(t) > 50$ équivaut à $60t + 20 > 50(t + 4)$, c'est-à-dire $10t > 180$, soit $t > 18$. La population dépasse 50 000 poissons au-delà de 18 ans (pour $t = 18$, elle vaut exactement 50 000).

(e) Non. D'après l'étude du signe de $P(t) - 60$, on a $P(t) < 60$ pour tout $t \geqslant 0$. La population reste donc toujours sous 60 000 poissons et ne dépassera jamais 100 000. Une quantité qui augmente ne tend pas forcément vers $+\infty$: ici, elle se rapproche de 60 000.

Ex. 15 ★★★ **Une famille de quotients : tout dépend des degrés**

(a) En $+\infty$, $4x^2 - 3 \to +\infty$ et $2x^2 + 1 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Elle ne vaut pas 1 : il faut transformer l'écriture. Pour $x \neq 0$, $f_0(x) = \frac{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{4-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}$. En $+\infty$, $\frac{3}{x^2} \to 0$ et $\frac{1}{x^2} \to 0$, donc par somme le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers 2. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 2$. La droite $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_0$ en $+\infty$, et Noé s'est trompé.

(b) On étudie le signe de $f_0(x) - 2 = \frac{4x^2-3-2(2x^2+1)}{2x^2+1} = \frac{-5}{2x^2+1}$. Le numérateur est négatif et le dénominateur strictement positif, donc $f_0(x) - 2 < 0$ pour tout réel x. La courbe $\mathcal{C}_0$ est toujours située strictement en dessous de son asymptote $y = 2$.

(c) Pour $x \neq 0$, $f_a(x) = \frac{x^3\left(a+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = x \times \frac{a+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}}$. En $\pm\infty$, le quotient tend vers $\frac{a}{2} \neq 0$ (par somme et par quotient). Par produit avec x : si $a > 0$, la limite vaut $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$; si $a < 0$, elle vaut $-\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$. Le degré du haut (3) est plus grand que celui du bas (2). Les limites sont infinies, donc $\mathcal{C}_a$ n'a pas d'asymptote horizontale quand $a \neq 0$.

(d) En $-\infty$, $4x^2 - 3 \to +\infty$ et $2x^4 + 1 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}{x^4\left(2+\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{x^2} \times \frac{4-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^4}}$. Le quotient tend vers $\frac{4}{2} = 2$ et $\frac{1}{x^2} \to 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ (le degré du haut est plus petit que celui du bas). L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote horizontale à la courbe de g en $-\infty$.

Ex. 16 ★★★ **Retrouver une fonction à partir de son tableau**

(a) D'après le tableau, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. En 3, f tend vers $-\infty$ quand x tend vers 3 par valeurs inférieures, et vers $+\infty$ par valeurs supérieures. Donc la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$, et la droite $x = 3$ est asymptote verticale.

(b) Si $a \neq 0$, on a en $+\infty$ la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$ et $x \neq -c$, $f(x) = \frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(1+\frac{c}{x}\right)} = \frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{c}{x}}$. Par somme et par quotient, cette expression tend vers a (même si $a = 0$). Comme la limite vaut 2, on a $a = 2$. Si $3 + c \neq 0$, alors par quotient $f(x)$ tendrait en 3 vers le réel $\frac{3a+b}{3+c}$. Or la limite en 3 est infinie, donc $3 + c = 0$, soit $c = -3$. Enfin, $f(0) = \frac{b}{-3} = -1$, donc $b = 3$. Conclusion : $f(x) = \frac{2x+3}{x-3}$.

(c) Quand x tend vers 3, $2x + 3 \to 9$ par somme. On a $x - 3 > 0$ quand $x > 3$: le dénominateur tend vers 0^+ et, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$. On a $x - 3 < 0$ quand $x < 3$: le dénominateur tend vers 0^- et, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$. On retrouve bien le tableau et l'asymptote verticale $x = 3$.

(d) On étudie le signe de $f(x) - 2 = \frac{2x+3-2(x-3)}{x-3} = \frac{9}{x-3}$. Comme $9 > 0$, cette différence a le signe de $x - 3$. Pour $x > 3$, $f(x) - 2 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = 2$. Pour $x < 3$, $f(x) - 2 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $y = 2$.

(e) On peut prendre $g(x) = 2 + e^{-x} = 2 + \frac{1}{e^x}$. En $+\infty$, $e^x \to +\infty$, donc $\frac{1}{e^x} \to 0$ par quotient, et $g(x) \to 2$ par somme : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$. En $-\infty$, $e^x \to 0$ avec $e^x > 0$, donc $\frac{1}{e^x} \to +\infty$ par quotient, et $g(x) \to +\infty$ par somme. La limite est infinie, donc il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

3. *Limite en l'infini et asymptote horizontale*

Ex. 17 ★☆☆ **Automatismes : limites en l'infini**

(a) En $+\infty$, $-2x^3 \to -\infty$ et $7x^2 \to +\infty$: c'est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $x \neq 0$, $-2x^3 + 7x^2 - 4 = x^3\left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers -2 et $x^3 \to +\infty$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

Ex. 17 (suite)

(b) En $-\infty$, $x^4 \to +\infty$ et $x^3 \to -\infty$, donc $-6x^3 \to +\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée. Par somme, la limite vaut $+\infty$.

(c) En $+\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x > 0$, $\frac{5x^2-3}{2x^2+x} = \frac{x^2\left(5-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{5-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$. Le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers 2. Par quotient, la limite vaut $\frac{5}{2}$.

(d) En $-\infty$, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $\frac{4x+1}{x^2+3} = \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4+\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$. Le numérateur tend vers 4 et, par produit, le dénominateur tend vers $-\infty$. Par quotient, la limite vaut 0.

(e) En $+\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$ et $-3x \to -\infty$: c'est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$, $\sqrt{x} - 3x = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)$, car $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, la parenthèse tend vers -3, et $x \to +\infty$. Par produit, la limite vaut $-\infty$.

(f) En $-\infty$, $x^3 \to -\infty$ et $x \to -\infty$, donc par somme $x^3 + x \to -\infty$. Par quotient, $\frac{8}{x^3+x} \to 0$. Par somme, la limite vaut 5.

Ex. 18 ★☆☆ **Automatismes : exponentielle, des deux côtés**

(a) En $-\infty$, $e^x \to 0$. Par produit puis par somme, $f(x) \to 4$: la droite $y = 4$ est asymptote horizontale en $-\infty$. En $+\infty$, $3e^x \to +\infty$. Par somme, $f(x) \to +\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

(b) En $+\infty$, $e^x \to +\infty$, donc par quotient $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to 0$. Par somme, $g(x) \to 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. En $-\infty$, $e^x \to 0^+$, donc $e^{-x} \to +\infty$ et $-5e^{-x} \to -\infty$. Par somme, $g(x) \to -\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

(c) En $+\infty$, $e^x \to +\infty$, donc par somme $2 + e^x \to +\infty$. Par quotient, $h(x) \to 0$: la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$. En $-\infty$, $e^x \to 0$, donc par somme $2 + e^x \to 2$. Par quotient, $h(x) \to 3$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $-\infty$. Les deux asymptotes sont différentes.

(d) En $+\infty$, $\frac{3}{x} \to 0$ et, par quotient, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to 0$. Par somme, $k(x) \to 0$: la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$. En $-\infty$, $\frac{3}{x} \to 0$ et $e^x \to 0^+$, donc par quotient $e^{-x} \to +\infty$. Par somme, $k(x) \to -\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Ex. 19 ★☆☆ **Lire les asymptotes dans un tableau**

(a) D'après le tableau, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$.

(b) Faux. Comme la limite de h en $+\infty$ vaut 3, c'est la droite horizontale d'équation $y = 3$ qui est asymptote en $+\infty$. La droite $x = 3$ est verticale.

(c) Non. En $-\infty$, la limite de h est infinie ($+\infty$). Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

(d) Sur $[-1;+\infty[$, h est strictement croissante, de -4 vers sa limite 3.
Donc $h(x) < 3$, c'est-à-dire $h(x) - 3 < 0$. La courbe $\mathcal{C}_h$ est en dessous de la droite $y = 3$.

Ex. 20 ★★☆ **Les deux erreurs d'Inès**

(a) « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée : on ne peut pas conclure directement, et la limite ne vaut pas forcément 1. Il faut d'abord factoriser par le terme dominant.

(b) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x^2\left(6-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{6-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x^2}}$. Par somme, le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers 4. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

(c) La même écriture convient en $-\infty$, car $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{3}{x^2} \to 0$. Par somme puis par quotient, la limite vaut aussi $\frac{3}{2}$. La droite d'équation $y = \frac{3}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(d) « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée, pas 0. Pour $x \neq 0$, $x^2 - 4x = x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et $x^2 \to +\infty$. Par produit, $g(x) \to +\infty$: la limite est infinie, donc il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Ex. 21 ★★☆ **Une courbe qui traverse son asymptote**

(a) $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc le dénominateur ne s'annule jamais : f est définie sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$, on a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

(b) Avec la même écriture, $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{1}{x^2} \to 0$ en $-\infty$. Par quotient, la limite vaut 2. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Ici $\ell = 2$. $f(x) - 2 = \frac{2x^2+x-2(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+x-2x^2-2}{x^2+1} = \frac{x-2}{x^2+1}$.

(d) Comme $x^2 + 1 > 0$, $f(x) - 2$ a le signe de $x - 2$. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $y = 2$. Si $x > 2$, $x - 2 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus. Si $x = 2$, la courbe et la droite se coupent.

Ex. 21 (suite)

(e) Faux. $f(2) = \frac{8+2}{4+1} = 2$: la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe son asymptote $y = 2$ au point $A(2;2)$.

Ex. 22 ★★☆ **Le coût moyen d'un tabouret**

(a) $a + \frac{b}{q+1} = \frac{a(q+1)+b}{q+1} = \frac{aq+a+b}{q+1}$. On veut obtenir $\frac{25q+130}{q+1}$: il faut $a = 25$ et $a + b = 130$, d'où $b = 105$. Ainsi $C_M(q) = 25 + \frac{105}{q+1}$.

(b) En $+\infty$, $q + 1 \to +\infty$, donc par quotient $\frac{105}{q+1} \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q) = 25$.

(c) La droite d'équation $y = 25$ est asymptote horizontale à la courbe de C_M en $+\infty$. Pour la menuiserie, plus elle fabrique de tabourets, plus le coût moyen d'un tabouret se rapproche de 25 €.

(d) $C_M(q) - 25 = \frac{105}{q+1}$. Or $q + 1 > 0$ car $q > 0$, donc $C_M(q) - 25 > 0$. La courbe est toujours au-dessus de son asymptote $y = 25$: le coût moyen reste supérieur à 25 € et ne descend jamais sous cette valeur.

(e) $C_M(q) < 26$ équivaut à $\frac{105}{q+1} < 1$, c'est-à-dire $q + 1 > 105$ (car $q + 1 > 0$), soit $q > 104$. Le coût moyen passe sous 26 € au-delà de 10 400 tabourets.

Ex. 23 ★★★ **Les poissons d'un étang près de Montluçon**

(a) $P(0) = \frac{9}{3} = 3$. Au départ, on introduit 3 000 poissons dans l'étang.

(b) En $+\infty$, $40t + 9 \to +\infty$ et $2t + 3 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$, on factorise par t en haut et en bas : $P(t) = \frac{t\left(40+\frac{9}{t}\right)}{t\left(2+\frac{3}{t}\right)} = \frac{40+\frac{9}{t}}{2+\frac{3}{t}}$. Comme $\frac{9}{t} \to 0$ et $\frac{3}{t} \to 0$, par somme le numérateur tend vers 40 et le dénominateur vers 2. Par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 20$. La droite d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_P$ en $+\infty$. À long terme, le nombre de poissons se rapproche de 20 000.

(c) $P(t) - 20 = \frac{40t+9-20(2t+3)}{2t+3} = \frac{40t+9-40t-60}{2t+3} = \frac{-51}{2t+3}$. Pour $t \geqslant 0$, $2t + 3 > 0$ et $-51 < 0$, donc $P(t) - 20 < 0$. La courbe $\mathcal{C}_P$ est strictement en dessous de la droite $y = 20$ sur $[0;+\infty[$.

(d) Non. D'après la question précédente, $P(t) < 20$ pour tout $t \geqslant 0$. Le nombre de poissons se rapproche de 20 000 sans jamais l'atteindre : une limite n'est pas forcément une valeur prise par la fonction.

(e) $P(t) > 19 \iff 20 - \frac{51}{2t+3} > 19 \iff \frac{51}{2t+3} < 1$. Comme $2t + 3 > 0$, cela équivaut à $51 < 2t + 3$, soit $t > 24$. Le nombre de poissons dépasse 19 000 au bout de 24 ans (on a exactement $P(24) = 19$).

Ex. 24 ★★★ **Retrouver une fonction grâce à ses asymptotes**

(a) Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais et f est définie sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$, $e^x \to 0$. Par produit et somme, $ae^x + b \to b$, et $e^x + 1 \to 1$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. L'asymptote en $-\infty$ a pour équation $y = -1$, donc $b = -1$.

(b) $f(0) = \frac{a+b}{1+1} = \frac{a-1}{2}$. Le point A est sur $\mathcal{C}_f$, donc $\frac{a-1}{2} = 2$, d'où $a = 5$. Ainsi $f(x) = \frac{5e^x-1}{e^x+1}$.

(c) En $+\infty$, $e^x \to +\infty$. Par produit et somme, $5e^x - 1 \to +\infty$ et $e^x + 1 \to +\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par e^x : $f(x) = \frac{e^x\left(5-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{5-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$. Par quotient, $\frac{1}{e^x} \to 0$. Par somme, le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. La droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$: les asymptotes sont différentes des deux côtés.

(d) $f(x) - 5 = \frac{5e^x-1-5e^x-5}{e^x+1} = \frac{-6}{e^x+1} < 0$ car $e^x + 1 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $y = 5$. $f(x) - (-1) = \frac{5e^x-1+e^x+1}{e^x+1} = \frac{6e^x}{e^x+1} > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = -1$. Ainsi $-1 < f(x) < 5$ pour tout réel x.

(e) Faux. En $-\infty$, $e^x \to 0$ donc, par produit et somme, $h(x) \to -1$: la droite $y = -1$ est bien asymptote horizontale en $-\infty$. En revanche, en $+\infty$, $5e^x \to +\infty$ donc, par somme, $h(x) \to +\infty$. Une limite infinie ne donne pas d'asymptote horizontale : il n'y en a pas en $+\infty$.

4. *Limite en un réel, asymptote verticale, position de la courbe*

Ex. 25 ★☆☆ **Automatismes : limites en une valeur interdite**

(a) Le numérateur vaut $3 > 0$. Si $x > 7$, $7 - x < 0$, donc $7 - x \to 0^-$. Par quotient, $\frac{3}{0^-}$ donne $-\infty$.

(b) $e^x \to 1$, donc le numérateur tend vers $3 > 0$. Si $x < 0$, le dénominateur tend vers 0^-. Par quotient, la limite est $-\infty$.

(c) Le numérateur tend vers $-6 < 0$. Si $x > -1$, $x + 1 > 0$, donc $x + 1 \to 0^+$. Par quotient, $\frac{-6}{0^+}$ donne $-\infty$.

(d) Le numérateur tend vers $-6 < 0$. Si $x < -1$, $x + 1 < 0$, donc $x + 1 \to 0^-$. Par quotient, $\frac{-6}{0^-}$ donne $+\infty$.

(e) Un carré est positif, donc $(x + 6)^2 \to 0^+$ des deux côtés de -6. Par quotient, $\frac{2}{0^+}$ donne $+\infty$ à droite comme à gauche : la limite en -6 est $+\infty$.

Ex. 25 (suite)

(f) $\sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geqslant 0$: on étudie seulement $x \to 0^+$. Le numérateur tend vers $0 - 2 = -2 < 0$ et le dénominateur $x \to 0^+$. Par quotient, $\frac{-2}{0^+}$ donne $-\infty$.

Ex. 26 ★★☆ **Automatismes : vrai ou faux en une valeur interdite**

(a) Faux. Si $x > 1$, $x - 1 \to 0^+$ et le quotient tend vers $+\infty$; si $x < 1$, $x - 1 \to 0^-$ et il tend vers $-\infty$. Les deux côtés diffèrent : pas de limite en 1.

(b) Vrai. $(x + 2)^2 \to 0^+$ des deux côtés de -2 (un carré est positif). Par quotient, $\frac{-3}{0^+}$ donne $-\infty$ à droite comme à gauche.

(c) Faux. Le numérateur tend vers $-9 < 0$ et $x \to 0^+$. Par quotient, $\frac{-9}{0^+}$ donne $-\infty$: le signe s'inverse.

(d) Faux. En -8, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq -8$, $\frac{(x-8)(x+8)}{x+8} = x - 8$, qui tend vers -16. La limite est finie, donc pas d'asymptote verticale.

(e) Faux. Une asymptote verticale a une équation de la forme $x = a$. Ici, si $x > -5$, $x + 5 \to 0^+$ et $\frac{2}{x+5} \to +\infty$: l'asymptote verticale est $x = -5$. La droite $y = -5$ est horizontale et n'est pas asymptote ($\frac{2}{x+5} \to 0$ en $\pm\infty$).

Ex. 27 ★★☆ **L'erreur de Léa**

(a) $x - 2 > 0$ quand $x > 2$ et $x - 2 < 0$ quand $x < 2$; $x - 2 = 0$ pour $x = 2$, valeur interdite.

(b) Le numérateur tend vers $2 - 6 = -4 < 0$. Si $x > 2$, $x - 2 \to 0^+$: par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$. Si $x < 2$, $x - 2 \to 0^-$: par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$.

(c) Première erreur : elle n'a pas étudié les deux côtés ; f n'a pas de limite en 2 ($-\infty$ à droite, $+\infty$ à gauche). Deuxième erreur : une asymptote verticale a une équation de la forme $x = a$. Conclusion : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Ex. 28 ★★☆ **Compléter un tableau de variations**

(a) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, on factorise par x : $g(x) = \frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x}}$. Comme $\frac{5}{x} \to 0$ et $\frac{4}{x} \to 0$, par quotient $g(x) \to 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Le numérateur tend vers $9 > 0$. Si $x > 4$, $x - 4 \to 0^+$: par quotient, la limite à droite est $+\infty$. Si $x < 4$, $x - 4 \to 0^-$: la limite à gauche est $-\infty$.

Ex. 28 **(suite)**

(c)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
g(x)	$1 \searrow$	$-\infty \,\|\!\|\, +\infty$	$\searrow 1$

(d) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$; la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale.

Ex. 29 ★★☆ **Le coût d'une dépollution**

(a) $C(80) = \frac{50\times 80}{100-80} = \frac{4000}{20} = 200$: il faut 200 milliers d'euros, soit 200 000 €.

(b) C est définie sur $[0\,;100[$: 100 est une borne de l'ensemble de définition et p ne peut s'en approcher que par valeurs inférieures
(on ne peut pas éliminer plus de 100 %).

(c) Le numérateur tend vers $5000 > 0$. Si $p < 100$, $100 - p > 0$, donc $100 - p \to 0^+$. Par quotient, $C(p) \to +\infty$.

(d) Plus on veut s'approcher d'une élimination totale, plus le coût devient grand : éliminer 100 % des rejets est impossible financièrement. La droite d'équation $p = 100$ est asymptote verticale à la courbe de C.

Ex. 30 ★★☆ **Choisir le bon paramètre**

(a) Forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \neq 0$, on factorise par x : $f(x) = \frac{4+\frac{c}{x}}{1+\frac{3}{x}}$. Comme $\frac{c}{x} \to 0$ et $\frac{3}{x} \to 0$, par quotient $f(x) \to 4$ en $\pm\infty$.

(b) Le numérateur $4x + 12$ tend vers 0 comme le dénominateur : forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq -3$, $f(x) = \frac{4(x+3)}{x+3} = 4$, donc $f(x) \to 4$. La limite est finie : la droite $x = -3$ n'est pas asymptote. Le choix $c = 12$ ne convient pas.

(c) Le numérateur tend vers $-12 + 14 = 2 > 0$. Si $x > -3$, $x + 3 \to 0^+$: par quotient, la limite est $+\infty$. Si $x < -3$, $x + 3 \to 0^-$: la limite est $-\infty$. La droite $x = -3$ est bien asymptote verticale.

(d) $f(x) - 4 = \frac{4x+14-4(x+3)}{x+3} = \frac{2}{x+3}$. Si $x > -3$, ce quotient est positif : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = 4$. Si $x < -3$, il est négatif : $\mathcal{C}_f$ est en dessous.

Ex. 31 ★★★ **Deux valeurs interdites**

(a) En $\pm\infty$, on a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par les termes dominants : pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x^2(2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = \frac{2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$. Le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1, donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex. 31 **(suite)**

(b) En 3, le numérateur tend vers $2 \times 9 - 15 - 3 = 0$ et le dénominateur vers $9 - 12 + 3 = 0$: c'est une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 3$, on simplifie par $x - 3$: $f(x) = \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x+1}{x-1}$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{7}{2}$, une limite finie. Il n'y a donc pas d'asymptote verticale en $x = 3$: Tom a tort.

(c) Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. En 1, le numérateur tend vers $3 > 0$. On a $x - 1 > 0$ quand $x > 1$ et $x - 1 < 0$ quand $x < 1$.
Donc $x - 1 \to 0^+$ à droite et 0^- à gauche. Par quotient (règle des signes) : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$.
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$: c'est la seule.

(d) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\,;3\}$: $f(x) - 2 = \frac{2x+1-2(x-1)}{x-1} = \frac{3}{x-1}$. Le numérateur 3 est positif, donc $f(x) - 2$ a le signe de $x - 1$. Sur $]-\infty\,;1[$, $f(x) - 2 < 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite $y = 2$. Sur $]1\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$, $f(x) - 2 > 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus.

Ex. 32 ★★★ **Un carré au dénominateur, une racine au dénominateur**

(a) En 3, le numérateur tend vers $1 - 6 = -5 < 0$. Un carré est positif, donc $(x-3)^2 > 0$ pour tout $x \neq 3$: $(x-3)^2 \to 0^+$ des deux côtés. Par quotient (règle des signes, numérateur négatif) : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} h(x) = -\infty$. Malo a tort : les deux limites valent $-\infty$. La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$.

(b) En $\pm\infty$, $h(x) = \frac{1-2x}{x^2-6x+9}$ est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par les termes dominants : pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{x(\frac{1}{x}-2)}{x^2(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})} = \frac{\frac{1}{x}-2}{x(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})}$. Le numérateur tend vers -2 et le dénominateur vers $+\infty$ (en $+\infty$) ou $-\infty$ (en $-\infty$). Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(c) On étudie le signe de $h(x) - 0 = \frac{1-2x}{(x-3)^2}$. Comme $(x-3)^2 > 0$, il a le signe de $1 - 2x$, qui est positif si $x < \frac{1}{2}$ et négatif si $x > \frac{1}{2}$. Sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de l'axe des abscisses. Sur $]\frac{1}{2}\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$, elle est en dessous. Comme $h(\frac{1}{2}) = 0$, elle coupe son asymptote au point de coordonnées $(\frac{1}{2}\,;0)$.

Ex. 32 **(suite)**

(d) $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geqslant 0$, et $x = 0$ est interdit : k n'est définie que pour $x > 0$, donc « $x \to 0^-$ » n'a pas de sens. En 0^+, le numérateur tend vers $-4 < 0$ et $\sqrt{x} \to 0^+$. Par quotient (règle des signes) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} k(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_k$.

(e) Pour $x > 0$, $\frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$, car $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$. En $+\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$ et, par quotient, $\frac{4}{\sqrt{x}} \to 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$. La limite est infinie : $\mathcal{C}_k$ n'a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

5. *Limites en situation : interpréter un comportement à long terme*

Ex. 33 ★☆☆ **Automatismes : limites de modèles en $+\infty$**

(a) $e^{-0,2t} \to 0$, donc $5e^{-0,2t} \to 0$ par produit. Par somme, la limite vaut 12.

(b) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $\frac{8t+3}{2t+5} = \frac{8+\frac{3}{t}}{2+\frac{5}{t}}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{8}{2} = 4$.

(c) $e^{-t} \to 0$, donc $1 + 4e^{-t} \to 1$ par produit puis par somme. Par quotient, la limite vaut 300.

(d) $t + 6 \to +\infty$, donc $\frac{45}{t+6} \to 0$ par quotient. Par somme, la limite vaut 20.

(e) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $\frac{6t^2+1}{3t^2+t} = \frac{6+\frac{1}{t^2}}{3+\frac{1}{t}}$. Par quotient, la limite vaut $\frac{6}{3} = 2$.

(f) $e^{-3t} \to 0$, donc $1 - e^{-3t} \to 1$ par somme. Par produit, la limite vaut 7.

(g) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $\frac{t+40}{t^2+2} = \frac{1}{t} \times \frac{1+\frac{40}{t}}{1+\frac{2}{t^2}}$. Le premier facteur tend vers 0 et le second vers 1. Par produit, la limite vaut 0.

Ex. 34 ★☆☆ **Automatismes : vrai ou faux en contexte**

(a) Faux. Comme $t \geqslant 0$, seule la limite en $+\infty$ a un sens. $e^{-0,4t} \to 0$, donc par produit puis par somme, $C(t) \to 2$: à long terme, la concentration se rapproche de 2 mg/L.

(b) Faux. $m(t) - 9 = -\frac{4}{t+2}$. Ce nombre est strictement négatif, car $t + 2 > 0$.
Donc $m(t) < 9$ pour tout t : la masse se rapproche de 9 g sans jamais l'atteindre.

Ex. 34 **(suite)**

(c) Vrai. On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $p(t) = \frac{5+\frac{1}{t}}{1+\frac{3}{t}}$, qui tend vers 5 par quotient. Or 5 milliers $= 5\,000$ abonnés.

(d) Faux. 80 °C est la température de départ : $T(0) = 80$. Comme $e^{-0,1t} \to 0$, par produit puis par somme, $T(t) \to 20$. Le café refroidit et sa température se rapproche de 20 °C, celle de la pièce.

(e) Faux. On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $q(t) = \frac{200}{t} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}$, qui tend vers $0 \times 1 = 0$ par produit. La quantité tend vers 0 mg.

Ex. 35 ★★☆ **Coût moyen dans un atelier de céramique**

(a) Pour $x > 0$: $C_M(x) = \frac{0,02x^2}{x} + \frac{8x}{x} + \frac{500}{x} = 0,02x + 8 + \frac{500}{x}$.

(b) $0,02x + 8 \to 8$. Le numérateur 500 est positif et $x \to 0^+$, donc $\frac{500}{x} \to +\infty$ par quotient. Par somme, $C_M(x) \to +\infty$. Avec très peu de bols, les 500 € de frais fixes pèsent sur chaque bol : le coût moyen devient énorme.

(c) $0,02x \to +\infty$ et $8 + \frac{500}{x} \to 8$. Par somme, $C_M(x) \to +\infty$. Lina a tort : le terme $\frac{500}{x}$ tend bien vers 0, mais le terme $0,02x$ fait grandir le coût moyen sans limite quand la production augmente.

Ex. 36 ★★☆ **Des chamois dans une réserve : conjecturer puis démontrer**

(a) Les valeurs se rapprochent de 900 quand t devient grand. On conjecture : $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 900$.

(b) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $N(t) = \frac{900+\frac{200}{t}}{1+\frac{4}{t}}$. Par quotient, $N(t) \to 900$. À long terme, l'effectif se stabilise autour de 900 chamois.

(c) Non. Le modèle ne concerne que $t \geqslant 0$. Sur cet intervalle, $t + 4 \geqslant 4 > 0$: il n'y a donc pas de valeur interdite. Seule la limite en $+\infty$ a un sens.

(d) $N(t) - 900 = \frac{900t+200-900(t+4)}{t+4} = \frac{-3400}{t+4}$. Comme $t + 4 > 0$, ce nombre est strictement négatif.
Donc $N(t) < 900$ pour tout $t \geqslant 0$: l'effectif se rapproche de 900 chamois sans jamais les atteindre.

Ex. 37 ★★☆ **Régler une vitesse limite**

(a) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t > 0$: $v(t) = \frac{a}{4+\frac{1}{t}}$. Par quotient, $v(t) \to \frac{a}{4}$.

(b) Il faut $\frac{a}{4} = 12$, donc $a = 48$. Avec ce choix, la vitesse de la bille se rapproche de 12 cm/s à long terme.

Ex. 37 **(suite)**

(c) $4t+1>0$, donc $\frac{48t}{4t+1}>11 \iff 48t>44t+11 \iff t>2{,}75$. La vitesse dépasse 11 cm/s après 2,75 secondes.

Ex. 38 ★★☆ **Chlore dans une piscine : comparer deux modèles**

(a) $C_A(0)=1{,}5+2\times 1=3{,}5$ et $C_B(0)=\frac{7}{2}=3{,}5$. Les deux modèles partent de 3,5 mg/L.

(b) $e^{-0{,}3t}\to 0$, donc $2e^{-0{,}3t}\to 0$ par produit. Par somme, $C_A(t)\to 1{,}5$. Selon Malik, la concentration se rapproche de 1,5 mg/L à long terme.

(c) On a une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $t>0$: $C_B(t)=\frac{4+\frac{7}{t}}{2+\frac{2}{t}}$. Par quotient, $C_B(t)\to 2$. Selon Inès, la concentration se rapproche de 2 mg/L à long terme.

(d) Modèle A : la limite 1,5 est inférieure à 1,8, donc $C_A(t)$ finit par passer sous 1,8 mg/L. Modèle B : $C_B(t)-2=\frac{4t+7-2(2t+2)}{2t+2}=\frac{3}{2t+2}$. Ce nombre est strictement positif, donc $C_B(t)>2>1{,}8$ pour tout t. Seul le modèle de Malik prévoit une concentration sous 1,8 mg/L.

Ex. 39 ★★★ **Un yaourt au réfrigérateur : quelle température à long terme ?**

(a) $T(0)=\frac{4\times 0+90}{0+3}=\frac{90}{3}=30$. Quand Yanis le met au réfrigérateur, le yaourt est à 30 °C.

(b) En $+\infty$, $4t+90\to+\infty$ et $t+3\to+\infty$: c'est la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par le terme dominant : pour $t>0$, $T(t)=\frac{t(4+\frac{90}{t})}{t(1+\frac{3}{t})}=\frac{4+\frac{90}{t}}{1+\frac{3}{t}}$. Comme $\frac{90}{t}\to 0$ et $\frac{3}{t}\to 0$, par somme le numérateur tend vers 4 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=4$. La droite $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$: à long terme, la température du yaourt se rapproche de 4 °C.

(c) $T(t)-4=\frac{4t+90-4(t+3)}{t+3}=\frac{78}{t+3}$. Pour $t\geqslant 0$, on a $t+3>0$ et $78>0$, donc $T(t)-4>0$: la courbe de T est toujours au-dessus de son asymptote $y=4$.

(d) Non. D'après la question précédente, $T(t)-4=\frac{78}{t+3}>0$ pour tout $t\geqslant 0$, donc $T(t)>4$: la température s'approche de 4 °C sans jamais l'atteindre. Une limite n'est pas une valeur atteinte.

(e) $T(t)\leqslant 5 \iff T(t)-4\leqslant 1 \iff \frac{78}{t+3}\leqslant 1 \iff 78\leqslant t+3$ (on peut multiplier par $t+3>0$) $\iff t\geqslant 75$. Le yaourt se déguste à partir de 75 minutes.

Ex. 40 ★★★ **Dépolluer les rejets d'une usine**

(a) $C(0)=\frac{0}{100}=0$ et $C(80)=\frac{50\times 80}{100-80}=\frac{4000}{20}=200$. Éliminer 80 % du polluant coûte 200 milliers d'euros, soit 200 000 €.

(b) Pour $p<100$, on a $100-p>0$: quand p tend vers 100 par valeurs inférieures, $100-p\to 0^+$. Le numérateur tend vers $50\times 100=5000$, un réel non nul et positif. Par quotient (« réel positif sur 0^+ »), $\lim\limits_{\substack{p\to 100\\ p<100}} C(p)=+\infty$. La droite d'équation $p=100$ est asymptote verticale à la courbe de C. En contexte : plus on veut s'approcher d'une dépollution totale, plus le coût devient grand, sans limite. Éliminer 100 % du polluant est impossible à coût fini.

(c) Non. C n'est définie que pour $0\leqslant p<100$: un pourcentage éliminé ne dépasse pas 100. Les valeurs $p>100$ et la limite en $+\infty$ n'ont pas de sens ici. Seule la limite en 100 par valeurs inférieures compte.

(d) $-50+\frac{5000}{100-p}=\frac{-50(100-p)+5000}{100-p}=\frac{-5000+50p+5000}{100-p}=\frac{50p}{100-p}=C(p)$. Quand p augmente sur $[0;100[$, $100-p$ diminue en restant strictement positif, donc $\frac{5000}{100-p}$ augmente : C est croissante sur $[0;100[$.

p	0	
C(p)	0 ↗	$+\infty$ ‖

(e) $C(p)\leqslant 450 \iff 50p\leqslant 450(100-p)$ (on multiplie par $100-p>0$) $\iff 50p\leqslant 45000-450p \iff 500p\leqslant 45000 \iff p\leqslant 90$. Avec 450 milliers d'euros, l'usine peut éliminer au maximum 90 % du polluant.