49 exercices en 7 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Intégrale d'une fonction positive : aire sous la courbe

À retenir : Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe, en u.a. ; une figure connue suffit : $\displaystyle\int_0^2 5\,\mathrm{d}x = 10$. On a 1 u.a. = produit des deux unités. Si $f \leqslant 0$, l'intégrale est négative : ce n'est plus l'aire.

Ex. 1 ★☆☆ **Des figures connues, sans primitive** — Chaque fonction est positive sur l'intervalle d'intégration. Reconnais la figure (rectangle, triangle, trapèze, demi-disque) et calcule l'intégrale avec une formule d'aire, sans primitive.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{4} 3\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^3 4x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_2^2 (x^3+5)\,\mathrm{d}x$

Ex. 2 ★☆☆ **Des u.a. aux cm²** — Dans chaque cas, la fonction est positive sur l'intervalle. Calcule l'intégrale en u.a. avec une primitive, puis convertis l'aire en cm² avec les unités du repère données.

(a) $\displaystyle\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x$, avec des unités de 1,5 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, avec des unités de 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, avec des unités de 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

(d) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, avec des unités de 0,5 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

Ex. 3 ★★☆ **Intégrale ou aire ? Vrai ou faux** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par un calcul ou un argument.

(a) Léna affirme : « $\displaystyle\int_0^2 (x^2-4x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., du domaine compris entre la courbe de $x \mapsto x^2-4x$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=2$. »

(b) Dans un repère d'unités 2 cm sur chaque axe, un domaine de 3 u.a. a une aire de 6 cm².

(c) Si f est continue sur $[1\,;3]$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 5$, alors l'aire sous sa courbe entre $x=1$ et $x=3$ vaut au plus 10 u.a.

Ex. 3 (suite)

(d) Mathis écrit : $\displaystyle\int_0^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2+x$. Corrige si besoin.

Ex. 4 ★★☆ **Encadrer une aire avec des rectangles** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = \frac{6}{x+1}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On note A l'aire, en u.a., du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

x	0	0{,}5	1	1{,}5	2
$f(x)$	6	4	3	2{,}4	2

(a) Justifie que f est positive et décroissante sur $[0\,;2]$.

(b) On partage $[0\,;2]$ en 4 intervalles de largeur 0,5. Calcule la somme s des aires des rectangles de hauteur f au bord droit de chaque intervalle. Explique pourquoi $s \leqslant A$.

(c) Calcule de même la somme S avec les valeurs au bord gauche. Déduis-en un encadrement de A.

(d) Calcule la valeur exacte de A avec une primitive, puis un arrondi à 0,01. Vérifie l'encadrement.

Ex. 5 ★★★ **Le logo de Maëlys** — Maëlys trace un logo dans un repère d'unités 2 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée. Le logo est le domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-3$ et $x=5$. On a $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ sur $[-3\,;0]$, $f(x)=3$ sur $[0\,;2]$ et $f(x) = 3 - \frac{(x-2)^2}{3}$ sur $[2\,;5]$.

(a) Justifie que f est positive sur $[-3\,;5]$.

(b) Montre que, pour $x \in [-3\,;0]$, le point $(x\,;f(x))$ est sur le cercle de centre O et de rayon 3. Déduis-en $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ sans primitive.

(c) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) Donne l'aire du logo en u.a., en valeur exacte.

(e) Hugo multiplie cette aire par $2 + 1{,}5 = 3{,}5$ pour l'avoir en cm². Corrige son erreur et donne l'aire en cm², exacte puis arrondie à 0,01.

Ex. 6 ★★★ **Intégrale et aire d'un trinôme** — Soit f la fonction définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On admet que $f(x) = 3(x-1)(x-3)$.

(a) Étudie le signe de $f(x)$ sur $[0\,;4]$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et interprète ce nombre comme une aire.

Ex. 6 **(suite)**

(c) Noah affirme : « L'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 3$ vaut $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. » A-t-il raison ? Justifie et donne cette aire.

(d) Vrai ou faux : « Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $a = b$. » Justifie.

(e) Calcule l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 4$. Compare-la à $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 7 ★★★ **Aire sous la courbe d'une fonction exponentielle** — Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. On note A l'aire, en u.a., du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$. Valeurs arrondies à 0,01 :

x	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	1	0,91	0,74	0,56	0,41

(a) Montre que f est positive et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Avec le tableau et des rectangles de largeur 0,5, encadre A par une somme par défaut et une somme par excès.

(c) Vérifie que $F(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f. Déduis-en A, exacte puis arrondie à 0,001, et contrôle ton encadrement.

(d) Pour $x \geqslant 0$, on pose $G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Donne $G(0)$, justifie que G est croissante, puis exprime $G(x)$.

(e) Sacha affirme : « Pour x assez grand, l'aire sous $\mathcal{C}_f$ entre 0 et x dépasse 2 u.a. » Vrai ou faux ? Justifie.

2. *Calculer une intégrale avec une primitive*

À retenir : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$: vérifie F en la dérivant, puis écris $F(a)$ entre parenthèses : $\Big[x^3\Big]_{-1}^{2} = 8 - (-1) = 9$. Une intégrale peut être négative, et $\int_b^a = -\int_a^b$.

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : polynômes et fonctions usuelles** — Calcule chaque intégrale et donne sa valeur exacte.

(a) $\int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-2}^{0} (4x^3 + 1)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,\mathrm{d}x$

Ex. 8 **(suite)**

(e) $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_3^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes : formes composées** — Repère la forme ($u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'u^n$), puis calcule la valeur exacte de chaque intégrale.

(a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^3 \dfrac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^1 x^2\,(x^3+1)^2\,\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Ex. 10 ★★☆ **Les deux erreurs de Lucas** — Lucas a écrit : $I = \int_{-1}^{2}(3x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x = \Big[x^3 - 2x^2\Big]_{-1}^{2} = 8 - 8 - (-1)^3 - 2\times(-1)^2 = -1$, puis $J = \int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^{3x}\Big]_0^1 = \mathrm{e}^3 - 1$.

(a) Vérifie, en dérivant, que $x \mapsto x^3 - 2x^2$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2 - 4x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Repère l'erreur de Lucas dans le calcul de I, puis calcule la valeur exacte de I.

(c) Dérive $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$. Lucas a-t-il raison d'utiliser cette fonction comme primitive pour calculer J ? Justifie.

(d) Calcule la valeur exacte de J, puis donne son arrondi à 0,01.

Ex. 11 ★★☆ **Une fonction définie par une intégrale** — Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.

(a) Donne $F(1)$ et $F'(x)$ pour $x > 0$. Déduis-en le sens de variation de F sur $]0\,;+\infty[$.

(b) On pose $G(x) = x\ln x - x$. Calcule $G'(x)$, puis déduis-en une expression de $F(x)$ sans intégrale.

(c) Calcule $F(\mathrm{e})$ et $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ en valeur exacte, puis donne l'arrondi de $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ à 0,001.

(d) Maëlle affirme : « $\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t = F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, donc cette intégrale est positive. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 12 ★★★ **Une primitive proposée, deux intégrales et une aire** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ et la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal.

(a) Démontre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Calcule la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis donne son arrondi à 0,01 près.

Ex. 12 (suite)

(c) Étudie le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. Déduis-en, sans calcul, le signe de $J = \int_{-2}^{-1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) Calcule la valeur exacte de J et vérifie ton résultat de la question précédente. Déduis-en $\int_{-1/2}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) Unités : 1 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée. Calcule l'aire, en cm² et arrondie à 0,01 près, du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -\frac{1}{2}$.

Ex. 13 ★★★ **Chercher une borne** — On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $h(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$. Pour tout réel $a > 0$, on pose $I(a) = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$ et $K(a) = \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Repère la forme de g, donne une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (contrôle-la en dérivant), puis exprime $I(a)$ en fonction de a.

(b) Détermine la valeur exacte du réel $a > 0$ tel que $I(a) = \ln 10$.

(c) Écris h sous la forme $\frac{1}{2}u'u^{-2}$, déduis-en une primitive de h, puis exprime $K(a)$ en fonction de a. Calcule $K(1)$.

(d) Démontre que, pour tout réel $a > 0$, $0 < K(a) < \frac{1}{2}$.

(e) Vrai ou faux : « pour tout réel $a > 0$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\,I(a)$ ». Justifie.

Ex. 14 ★★★ **Sinus et cosinus au cube** — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \times \cos^2 x$.

(a) Repère la forme de f et donne une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Contrôle-la en dérivant.

(b) Calcule la valeur exacte de $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Vérifie que $\sin^3 x = \sin x - \sin x \times \cos^2 x$ pour tout réel x, puis déduis-en la valeur exacte de $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

(d) Calcule $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) Théo en conclut que f est nulle sur $[0\,;2\pi]$. A-t-il raison ? Justifie, puis explique le résultat à l'aide de $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. *Linéarité, Chasles, positivité et inégalités*

À retenir : Linéarité : $\int(f+g) = \int f + \int g$, mais $\int fg \neq \int f \times \int g$. Chasles : je coupe là où $|x-2|$ change d'expression. Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$; bornes inversées : le sens change.

Ex. 15 ★☆☆ **Linéarité et Chasles avec des intégrales données** — f et g sont continues sur $[-1\,;5]$, avec $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ et $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$. Calcule, ou explique pourquoi c'est impossible.

(a) $\int_1^3 \big(2f(x) - 3g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (d) $\int_1^3 \big(f(x) - x\big)\,\mathrm{d}x$

(e) $\int_3^5 \big(3f(x) - 1\big)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int_1^3 f(x) \times g(x)\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex. 16 ★☆☆ **Découper avec Chasles : valeurs absolues et morceaux** — Calcule chaque intégrale en la découpant avec la relation de Chasles.

(a) $\int_0^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^2 |2x-1|\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^4 \big(x + |x-2|\big)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, où $f(x) = x^2$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$.

(e) $\int_0^2 |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}|\,\mathrm{d}x$
(valeur exacte, puis arrondie au millième)

Ex. 17 ★★☆ **Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer** — On pose $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne connaît aucune primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) Montre que pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

(b) Déduis-en un encadrement de I. Donne les bornes exactes, puis arrondies au centième.

(c) Tom en conclut que $1 - \mathrm{e}^{-1} \leqslant \int_1^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$. Corrige son erreur.

(d) On admet que $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{1+x}$ sur $[0\,;1]$. Ana en déduit que $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x}$ sur $[0\,;1]$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 18 ★★☆ **Quand seule la somme se calcule** — On pose $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. On rappelle que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

(a) Sans faire de calcul, justifie que $I \geqslant 0$.

(b) Calcule $I + J$.

(c) Calcule $I - J$.

(d) Déduis-en I et J, puis la valeur moyenne de $x \mapsto \cos^2 x$ sur $[0\,;\pi]$.

Ex. 18 **(suite)**

(e) Calcule $\int_0^{\pi} \left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{d}x$. Vrai ou faux : $\cos x + \frac{1}{2} \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$? Justifie.

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur les propriétés de l'intégrale** — Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie par une démonstration ou par un contre-exemple calculé.

(a) « Pour toutes fonctions f et g continues sur $[0\,;1]$, $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. »

(b) « $\int_{-2}^{3} x^3\,\mathrm{d}x = 0$, car la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire. »

(c) « Comme 5 n'est pas compris entre 1 et 3, on ne peut pas écrire $\int_1^3 f = \int_1^5 f + \int_5^3 f$ pour f continue sur $\mathbb{R}$. »

(d) « Sans aucun calcul de primitive, on peut affirmer que $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)\mathrm{d}x \geqslant 0$. »

(e) « Si f et g sont continues sur $[0\,;2]$ et $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$, alors $f \leqslant g$ sur $[0\,;2]$. »

Ex. 20 ★★★ **Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence** — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherche pas à calculer I_0.

(a) Calcule I_1 en reconnaissant une forme $\frac{u'}{u}$.

(b) Montre que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. Déduis-en la valeur exacte de I_3.

(c) Montre que la suite (I_n) est décroissante.

(d) À l'aide des deux questions précédentes, montre que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.

(e) Déduis-en la limite de (I_n), puis celle de $(n\,I_n)$.

Ex. 21 ★★★ **Une fonction définie par morceaux : intégrale, aire et erreurs** — On définit f sur $[0\,;4]$ par $f(x) = x^2$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = \frac{3-x}{2}$ si $1 < x \leqslant 4$. La fonction f est continue sur $[0\,;4]$. Le repère est orthogonal : une unité vaut 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.

(a) Calcule $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant la relation de Chasles.

(b) Léa dit : « $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. » Corrige-la, puis calcule cette aire.

(c) Convertis l'aire de la question précédente en cm².

(d) Malik écrit : « Sur $[2\,;3]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant \int_3^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{2}$. » Corrige son encadrement, puis vérifie-le par le calcul.

4. *Valeur moyenne et aire entre deux courbes*

À retenir : Aire entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$: signe de $f - g$ d'abord, puis $\int$(haut − bas), en découpant aux croisements. $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, ni $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ni $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Ex. : x^2 sur $[0\,;3]$ donne $\mu = 3$.

Ex. 22 ★☆☆ **Valeurs moyennes en ligne** — Calcule la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle donné. Donne la valeur exacte, puis un arrondi à 0,01 si besoin.

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x$ sur $[1\,;3]$.

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ sur $[0\,;\ln 3]$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $[0\,;3]$.

(d) $f(x) = \cos x$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(e) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ sur $[1\,;4]$.

(f) $f(x) = x^3$ sur $[0\,;2]$. Calcule ensuite $\frac{f(0)+f(2)}{2}$ et $f(1)$, puis compare-les à μ.

Ex. 23 ★☆☆ **Aires entre deux courbes en ligne** — Dans chaque cas, étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ donné. Calcule ensuite, en u.a., l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

(a) $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x$ sur $[0\,;3]$.

(b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = -x$ sur $[0\,;2]$.

(c) $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;3]$.

(d) $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$ sur $[-2\,;1]$.

(e) $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$ sur $[0\,;1]$.

Ex. 24 ★★☆ **Température moyenne d'une journée** — Au sommet d'une colline, la température (en °C) à l'instant t (en heures, $t \in [0\,;24]$) est donnée par $T(t) = 6 + 1{,}5t - \frac{t^2}{16}$.

(a) Calcule $T(0)$, $T(12)$ et $T(24)$.

(b) Étudie les variations de T sur $[0\,;24]$. Donne ensuite son minimum et son maximum.

(c) Léa affirme : « La température moyenne de la journée vaut $\frac{T(0)+T(24)}{2}$. » Pour Ilyes, c'est $T(12)$. Calcule cette température moyenne, puis dis qui a raison. Justifie.

(d) Calcule la température moyenne entre 8 h et 16 h. Arrondis à 0,01 °C.

Ex. 25 ★★☆ **Une courbe et sa tangente qui se croisent** — Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal. Unités : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée. On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(a) Détermine une équation de T.

Ex. 25 (suite)

(b) Développe $(x-1)^3$. Déduis-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T sur $[0\,;2]$.

(c) Sami intègre « f moins la tangente » sur $[0\,;2]$. Il trouve 0 et en conclut que l'aire entre $\mathcal{C}_f$ et T est nulle. Vérifie son calcul, puis explique son erreur.

(d) Calcule l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, T et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$, en u.a. puis en cm².

Ex. 26 ★★★ **Logarithme et son carré** — Soit $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère orthogonal. Unités : 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.

(a) Résous l'équation $f(x)=g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, puis étudie le signe de $f(x)-g(x)$. Donne la position relative des deux courbes.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

(c) Vérifie que $G(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$, puis calcule $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

(d) Déduis-en l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$, en u.a. puis en cm².

(e) Lina affirme : « L'aire entre les deux courbes sur $[1\,;\mathrm{e}^2]$ vaut $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$. » Calcule cette intégrale, explique son erreur et donne l'aire correcte.

Ex. 27 ★★★ **Concentration moyenne d'un médicament** — On injecte un médicament à un patient. La concentration dans le sang (en mg/L), t heures après l'injection, est donnée par $C(t)=10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ pour $t\in[0\,;6]$.

(a) Étudie les variations de C sur $[0\,;6]$. Donne la concentration maximale et l'instant où elle est atteinte.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\displaystyle\int_0^6 t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}t$.

(c) Déduis-en la concentration moyenne μ pendant les six premières heures : valeur exacte, arrondi à 0,01 et unité. Contrôle ton résultat avec la question 1.

(d) Calcule les concentrations moyennes μ_1 sur $[0\,;2]$ et μ_2 sur $[2\,;6]$ (arrondis à 0,001). Inès affirme que $\mu=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Deux exponentielles qui se croisent** — Soit $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $g(x)=3\mathrm{e}^x-2$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes dans un repère.

(a) Vérifie que $f(x)-g(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2)$. Déduis-en le signe de $f-g$ sur $\mathbb{R}$ et les coordonnées des points d'intersection des courbes.

(b) Calcule l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine fermé délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, en u.a.
(valeur exacte, puis arrondi à 0,01).

Ex. 28 (suite)

(c) Calcule l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

(d) On pose $d(x)=g(x)-f(x)$ sur $[0\,;\ln 2]$. Étudie les variations de d et donne l'écart vertical maximal entre les deux courbes.

(e) Calcule l'écart moyen μ, valeur moyenne de d sur $[0\,;\ln 2]$. Vérifie que ce résultat est cohérent avec la question précédente.

5. *Intégration par parties*

À retenir : $\displaystyle\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v$: u se simplifie en dérivant (polynôme, $\ln x$), v' se primitive. Garde le « − » et évalue le crochet aux deux bornes : $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$.

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : intégrer par parties** — Calcule chaque intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Écris d'abord u, u', v' et v.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac12} x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : une primitive de ln** — Pour tout $x>0$, on pose $G(x)=x\ln x-x$.

(a) Calcule $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ par parties, en posant $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$.

(b) Vérifie en dérivant que G est une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Calcule $\displaystyle\int_1^3 \ln x\,\mathrm{d}x$ à l'aide de G.

(d) Calcule $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln x\,\mathrm{d}x$.

(e) Calcule $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}^2}}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et explique le signe du résultat.

Ex. 31 ★★☆ **Le bon choix et le bon signe** — On veut calculer $J=\displaystyle\int_0^1 (x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Inès pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=x+3$. Hugo pose $u(x)=x+3$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$, puis écrit : « $J=\Big[(x+3)\mathrm{e}^x\Big]_0^1+\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1$ ».

(a) Écris l'égalité obtenue avec le choix d'Inès. Explique pourquoi ce choix complique le calcul.

(b) Repère les deux erreurs de Hugo.

(c) Calcule J correctement, puis donne une valeur arrondie au millième.

Ex. 32 ★★☆ **Une suite d'intégrales avec ln** — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$, avec $(\ln x)^0 = 1$.

(a) Calcule I_0.

(b) À l'aide d'une intégration par parties avec $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = 1$, montre que $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

(c) Déduis-en les valeurs exactes de I_1, I_2 et I_3.

(d) Montre que la suite (I_n) est décroissante.

Ex. 33 ★★★ **Une aire avec deux intégrations par parties** — Soit f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Dans le repère, 1 unité vaut 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

(a) Justifie que l'aire de $\mathcal{D}$, en u.a., est égale à $A = \int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Calcule $J = \int_0^2 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ par parties. Écris u, u', v' et v, et fais attention à la primitive de e^{-x}.

(c) Fais une intégration par parties avec $u(x) = x^2$ pour exprimer A en fonction de J. Donne ensuite la valeur exacte de A et son arrondi au millième.

(d) Donne l'aire de $\mathcal{D}$ en cm², arrondie au centième.

Ex. 34 ★★★ **Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence** — Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, avec $x^0 = 1$.

(a) Calcule I_0.

(b) Fais une intégration par parties avec $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Montre que pour tout $n \geqslant 0$, on a $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(c) Déduis-en les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

(d) Montre que pour tout $n \geqslant 0$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Déduis-en la limite de (I_n).

(e) À l'aide de la relation de la question 2, détermine la limite de $(n+1)\,I_n$.

Ex. 35 ★★★ **Entre deux courbes : l'erreur de Malik** — Soient f et g définies sur $[1\,;\mathrm{e}]$ par $f(x) = x\ln x$ et $g(x) = x$. Pour calculer $K = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$, Malik pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$. Il écrit : $K = \frac{\mathrm{e}^2}{2}\ln \mathrm{e} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

(a) Repère l'erreur de Malik, puis calcule la valeur exacte de K.

(b) Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

(c) Calcule l'aire A du domaine compris entre les deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. Convertis-la en cm² si 1 unité vaut 2 cm sur chaque axe.

Ex. 35 (suite)

(d) Pour $t \geqslant 1$, calcule $H(t) = \int_1^t x\ln x\,\mathrm{d}x$ par parties. Vérifie ton résultat en dérivant l'expression obtenue.

6. *Méthode des rectangles et algorithme*

À retenir : $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$. À gauche : k de 0 à $n-1$ (pas de $f(b)$). À droite : k de 1 à n (pas de $f(a)$). Si f croît, la gauche est par défaut et la droite par excès. Écart : $h\,|f(b) - f(a)|$, ex. $0{,}5 \times |f(2) - f(0)|$.

Ex. 36 ★☆☆ **Découper l'intervalle, sommer les rectangles** — On partage l'intervalle en n intervalles de même largeur h, de bornes $x_k = a + kh$. On note s_n la somme à gauche et S_n la somme à droite.

(a) Sur $[2\,;5]$ avec $n = 6$, calcule h.

(b) Sur $[0\,;1]$ avec $n = 5$, donne la liste de tous les x_k.

(c) Sur $[-1\,;3]$ avec $n = 8$, calcule x_5.

(d) Sur $[1\,;4]$ avec $n = 3$ et $f(x) = x^2$, calcule s_3.

(e) Sur $[1\,;4]$ avec $n = 3$ et $f(x) = x^2$, calcule S_3.

(f) Sur $[0\,;2]$ avec $n = 4$, Zoé écrit $S_4 = 0{,}5 \times \big(f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)\big)$. A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 37 ★☆☆ **Défaut, excès et précision** — Dans chaque cas, s_n est la somme à gauche et S_n la somme à droite de f sur l'intervalle donné, avec n rectangles.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;2]$: s_n est-elle une valeur par défaut ou par excès de l'intégrale ? Justifie.

(b) $f(x) = x^3 + x$ sur $[0\,;2]$: s_n est-elle une valeur par défaut ou par excès de l'intégrale ? Justifie.

(c) $f(x) = \frac{4}{x+1}$ sur $[0\,;3]$ avec $n = 6$: calcule l'écart entre s_6 et S_6.

(d) $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0\,;3]$ avec $n = 10$: calcule l'écart entre s_{10} et S_{10}.

(e) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;9]$: combien de rectangles faut-il au minimum pour un écart inférieur ou égal à 0,01 ?

(f) $f(x) = \ln(x)$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$: combien de rectangles faut-il au minimum pour un écart inférieur ou égal à 0,001 ?

Ex. 38 ★★☆ **La distance parcourue par Léna** — Léna démarre à vélo. Sa vitesse $v(t)$, en m.s^{-1}, est croissante sur $[0\,;8]$, avec t en secondes. La distance parcourue, en mètres, est $d = \int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t$.

t (s)	0	2	4	6	8
v(t)	0	3,2	5,6	7,2	8

(a) Avec quatre rectangles, donne le pas h. Laquelle des sommes s_4 (à gauche) ou S_4 (à droite) est par défaut ? Justifie.

Ex. 38 **(suite)**

(b) Tom écrit $s_4 = 2 \times (0 + 3{,}2 + 5{,}6 + 7{,}2 + 8)$. A-t-il raison ? Justifie, puis calcule s_4 et S_4.

(c) Encadre d et donne l'amplitude de cet encadrement. Retrouve-la avec $h\,|v(8) - v(0)|$.

(d) Déduis-en un encadrement de la vitesse moyenne de Léna sur $[0\,;8]$.

Ex. 39 ★★☆ **Le programme d'Inès** — Inès veut calculer la somme à droite S_n de $f(x) = 1 + x^3$ sur $[0\,;2]$. Elle écrit ce programme :

```
def droite(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(x)
    return s

f = lambda x: 1 + x**3
print(droite(f, 0, 2, 4))
```

(a) Qu'affiche ce programme ? Explique pourquoi.

(b) Repère les deux erreurs, puis réécris la boucle pour qu'elle calcule S_n.

(c) Calcule S_4 à la main. Avec la boucle corrigée, qu'affiche `print(round(droite(f, 0, 2, 3), 2))` ?

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^2 (1 + x^3)\,\mathrm{d}x$. S_4 est-elle une valeur par défaut ou par excès ? Justifie.

Ex. 40 ★★★ **Plus précis avec les milieux** — On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $I = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. On partage $[1\,;4]$ en $n = 3$ intervalles de largeur h. On note s_3 et S_3 les sommes à gauche et à droite. Méthode des milieux : chaque rectangle a pour hauteur l'image du milieu de son intervalle. On note M_3 la somme obtenue.

(a) Calcule h et donne les bornes x_k. Justifie le sens de variation de f sur $[1\,;4]$.

(b) Calcule s_3 et S_3, arrondies à 10^{-3}. Laquelle est une valeur par défaut de I ? Justifie.

(c) Calcule la valeur exacte de I à l'aide d'une primitive.

(d) Donne les milieux des trois intervalles, puis calcule M_3 arrondie à 10^{-3}. Compare les écarts $|s_3 - I|$, $|S_3 - I|$ et $|M_3 - I|$.

(e) Complète la ligne 6 pour que le programme affiche M_3 arrondie à 10^{-3}.

```
from math import sqrt
def milieux(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + .........
    return s
print(round(milieux(sqrt, 1, 4, 3), 3))
```

Ex. 41 ★★★ **Les deux erreurs de Yanis** — Yanis veut calculer la somme à droite S_n de $f(x) = \frac{6}{x+2}$ sur $[0\,;4]$. On note s_n la somme à gauche et $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{6}{x+2}\,\mathrm{d}x$. Son programme affiche `7.7` :

```
def f(x):
    return 6 / (x + 2)
def droite(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h)
    return s
print(round(droite(0, 4, 4), 4))
```

(a) Avec $n = 4$, calcule h, les x_k et leurs images, puis S_4. Explique d'où vient le `7.7` affiché.

(b) Le programme contient deux erreurs, dont une ne se voit pas avec ces valeurs. Identifie-les et réécris les lignes fausses.

(c) Étudie le sens de variation de f sur $[0\,;4]$. Déduis-en un encadrement de I par s_4 et S_4.

(d) Calcule la valeur exacte de I, puis son arrondi à 10^{-3}. Vérifie l'encadrement obtenu.

(e) Yanis affirme : « Si je double n, l'écart $s_n - S_n$ est divisé par deux. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 42 ★★★ **Le panneau solaire de Nora** — Entre 8 h et 12 h, la puissance du panneau solaire de Nora vaut $P(t) = 5 - 0{,}25(12 - t)^2$, en kW, avec t en heures. L'énergie produite, en kWh, est $E = \displaystyle\int_8^{12} P(t)\,\mathrm{d}t$. On note s_n et S_n les sommes à gauche et à droite de P sur $[8\,;12]$.

t	8	9	10	11	12
P(t)	1	2,75	4	4,75	5

(a) Étudie le sens de variation de P sur $[8\,;12]$. Laquelle des sommes s_n ou S_n est une valeur par défaut de E ?

(b) Avec le tableau ($n = 4$), calcule s_4 et S_4. Déduis-en un encadrement de E.

(c) Pour calculer s_n, Nora écrit ce programme, qui affiche `-91.5`. Pourquoi ce résultat est-il absurde ? Trouve l'erreur et corrige-la.

```
def P(t):
    return 5 - 0.25*(12 - t)**2
def gauche(n):
    h = 4 / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + h * P(k*h)
    return s
print(gauche(4))
```

(d) Calcule la valeur exacte de E. Est-ce cohérent avec l'encadrement obtenu plus haut ?

(e) Exprime $S_n - s_n$ en fonction de n. Combien faut-il de rectangles, au minimum, pour que cet écart soit inférieur ou égal à 0,1 ?

7. Suites d'intégrales et problèmes type bac

À retenir : Sens de variation de (I_n) : signe de $I_{n+1} - I_n$. Limite : encadre la fonction, vérifie $a \leqslant b$, intègre, puis gendarmes. Ex. : sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$ donne $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : calculer un premier terme** — Calcule chaque intégrale. Donne la valeur exacte, puis un arrondi au millième si besoin. Ce sont des calculs typiques de I_0 ou de I_1 dans un sujet de bac.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^3\,\mathrm{d}x$

Ex. 44 ★☆☆ **Automatismes : encadrer ou donner un signe sans calculer** — Ne calcule pas l'intégrale. Encadre d'abord la fonction. Vérifie ensuite l'ordre des bornes, puis intègre l'encadrement.

(a) Sachant que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ sur $[0\,;1]$, encadre $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Encadre $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[1\,;3]$, puis déduis-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(c) Sachant que $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$ sur $[0\,;2]$, encadre $\displaystyle\int_2^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(d) Donne le signe de $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(e) Encadre $\ln x$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$, puis déduis-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ex. 45 ★★☆ **Extrait de bac : la suite des intégrales de $x^n e^x$** — Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

(a) Calcule I_0. Calcule ensuite I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

(b) Justifie que $I_n \geqslant 0$. Étudie ensuite le signe de $I_{n+1} - I_n$ et conclus sur le sens de variation de (I_n).

(c) Encadre e^x sur $[0\,;1]$ et déduis-en un encadrement de I_n. Détermine ensuite la limite de (I_n).

(d) À l'aide d'une intégration par parties, exprime I_{n+1} en fonction de I_n. Calcule ensuite I_2.

Ex. 46 ★★☆ **Problème type bac : le pendentif de Ben** — Ben dessine un pendentif. Dans un repère d'unité 3 cm, il a la forme du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe de $f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Pour $x \in [0\,;2]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

```
from math import exp

def f(x):
    return (1 - x) * exp(x)

n = 4
s = 0
for k in range(n):
    s = s + f(k / n) / n
print(round(s, 4))
```

(a) Calcule $F'(x)$, puis donne le sens de variation de F sur $[0\,;2]$.

(b) Vérifie que $G(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de f. Exprime ensuite $F(x)$ en fonction de x.

(c) Calcule l'aire de $\mathcal{D}$ en u.a., puis en cm². Donne la valeur exacte et un arrondi au centième.

(d) Calcule la valeur moyenne de f sur $[0\,;1]$. Déduis-en la hauteur moyenne du pendentif, en cm.

(e) Qu'affiche le programme ci-dessus ? Est-ce une valeur approchée de $F(1)$ par défaut ou par excès ? Justifie.

Ex. 47 ★★★ **Problème type bac : une suite d'intégrales sans primitive** — Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Pour $n \geqslant 2$, on ne cherche pas de primitive de $\frac{x^n}{1+x}$.

(a) Calcule I_0. Montre que pour tout n, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, puis déduis-en I_1 et I_2 (valeurs exactes).

(b) Justifie que $I_n \geqslant 0$. Écris $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale, puis donne le sens de variation de (I_n).

(c) Encadre $\frac{1}{1+x}$ sur $[0\,;1]$. Déduis-en un encadrement de I_n, puis la limite de la suite (I_n).

(d) Lina affirme : « $n\,I_n$ tend vers 1 ». Pour $n \geqslant 1$, encadre $2I_n$ à l'aide de la question 1 et de la décroissance de (I_n). A-t-elle raison ? Justifie.

Ex. 48 ★★★ **Problème type bac : les puissances du logarithme** — Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$, avec $(\ln x)^0 = 1$.

(a) Calcule J_0. Avec une intégration par parties ($u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x$), montre que $J_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2} J_n$.

(b) Déduis-en les valeurs exactes de J_1 et de J_2.

(c) Montre que $0 \leqslant x(\ln x)^{n+1} \leqslant x(\ln x)^n$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$. Déduis-en que (J_n) est positive, décroissante et convergente.

(d) À l'aide de la relation de la question 1, montre que $J_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+1}$. Déduis-en la limite de (J_n).

Ex. 48 **(suite)**

(e) Complète la ligne 5 pour que `J(n)` renvoie J_n. Donne la valeur exacte de J_3, puis l'arrondi affiché par `round(J(3), 4)`.

```
from math import exp
def J(n):
    j = (exp(2) - 1) / 2
    for k in range(n):
        j = ..........
    return j
```

Ex. 49 ★★★ **Problème type bac : le badge d'Inès** — Inès dessine un badge. On pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. Le badge est le domaine compris entre les deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le repère a pour unité 4 cm.

(a) Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;1]$. Déduis-en la position relative des deux courbes.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $A = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(c) Par parties, avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, exprime $B = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de A, puis calcule B.

(d) Déduis-en l'aire du badge en u.a. (valeur exacte), puis en cm² (arrondi au centième).

(e) On note $h = f - g$. Zoé lance ce programme, qui affiche `0.0966`. Elle dit : « c'est forcément une valeur par défaut de l'aire, car ce sont des rectangles à gauche ». A-t-elle raison ? Justifie.

```
from math import exp
def h(x):
    return (x - x**2) * exp(-x)
n = 4
s = 0
for k in range(n):
    s = s + h(k / n) / n
print(round(s, 4))
```