1. Intégrale d'une fonction positive : aire sous la courbe

Ex. 1 ★☆☆ **Des figures connues, sans primitive**

(a) Le domaine est un rectangle de largeur $4-(-1)=5$ et de hauteur 3 : $\displaystyle\int_{-1}^{4} 3\,\mathrm{d}x = 5\times 3 = 15$ u.a.

(b) Le domaine est un triangle de base 3 et de hauteur $4\times 3 = 12$: $\displaystyle\int_0^3 4x\,\mathrm{d}x = \frac{3\times 12}{2} = 18$ u.a.

(c) Le domaine est un trapèze de bases $1+2=3$ et $4+2=6$, de hauteur $4-1=3$: $\displaystyle\int_1^4 (x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{(3+6)\times 3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$ u.a.

(d) Le domaine est un triangle de base 4 et de hauteur $4-0=4$: $\displaystyle\int_0^4 (4-x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\times 4}{2} = 8$ u.a.

(e) Le point $(x\,;\sqrt{25-x^2})$ est sur le cercle de centre O et de rayon 5 : le domaine est un demi-disque de rayon 5, donc $\displaystyle\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2} \approx 39{,}27$ u.a.

(f) Les bornes sont égales : le domaine est réduit à un segment, d'aire nulle.
Donc $\displaystyle\int_2^2 (x^3+5)\,\mathrm{d}x = 0$.

Ex. 2 ★☆☆ **Des u.a. aux cm²**

(a) $\displaystyle\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x = \Big[x^3\Big]_0^2 = (8)-(0) = 8$ u.a. Ici 1 u.a. $= 1{,}5\times 3 = 4{,}5$ cm², donc l'aire vaut $8\times 4{,}5 = 36$ cm².

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = (1)-(0) = 1$ u.a. Ici 1 u.a. $= 4\times 2 = 8$ cm², donc l'aire vaut 8 cm².

(c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = (\mathrm{e})-(1) = \mathrm{e}-1$ u.a. Ici 1 u.a. $= 1\times 5 = 5$ cm², donc l'aire vaut $5(\mathrm{e}-1) \approx 8{,}59$ cm².

(d) Une primitive de $\sqrt{x} = x^{\frac12}$ est $\frac23 x\sqrt{x}$: $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac23 x\sqrt{x}\Big]_0^4 = \left(\frac{16}{3}\right)-(0) = \frac{16}{3}$ u.a. Ici 1 u.a. $= 0{,}5\times 4 = 2$ cm², donc l'aire vaut $\frac{16}{3}\times 2 = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ cm².

Ex. 3 ★★☆ **Intégrale ou aire ? Vrai ou faux**

(a) Faux. $x^2-4x = x(x-4) \leqslant 0$ sur $[0\,;2]$: la fonction n'est pas positive. $\displaystyle\int_0^2 (x^2-4x)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}-2x^2\Big]_0^2 = \left(\frac{8}{3}-8\right)-(0) = -\frac{16}{3}$, un nombre négatif. Ce n'est donc pas une aire : l'aire du domaine vaut $\frac{16}{3}$ u.a.

Ex. 3 (suite)

(b) Faux. 1 u.a. $= 2\times 2 = 4$ cm² (produit des deux unités), donc 3 u.a. $= 3\times 4 = 12$ cm².

(c) Vrai. Le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=3$ est contenu dans le rectangle de largeur $3-1=2$ et de hauteur 5. Son aire est donc au plus $2\times 5 = 10$ u.a.

(d) Faux. Une intégrale est un nombre, elle ne dépend pas de x. Correction : $\displaystyle\int_0^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2+x\Big]_0^4 = (16+4)-(0) = 20$.

Ex. 4 ★★☆ **Encadrer une aire avec des rectangles**

(a) Sur $[0\,;2]$, $x+1>0$, donc $f(x)>0$. De plus $f'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2} < 0$, donc f est décroissante sur $[0\,;2]$.

(b) $s = 0{,}5\times(4+3+2{,}4+2) = 0{,}5\times 11{,}4 = 5{,}7$. Comme f est décroissante, sur chaque intervalle la courbe est au-dessus de sa valeur au bord droit : chaque rectangle est sous la courbe, donc $s \leqslant A$.

(c) $S = 0{,}5\times(6+4+3+2{,}4) = 0{,}5\times 15{,}4 = 7{,}7$. Ces rectangles contiennent le domaine, donc $A \leqslant S$.
Conclusion : $5{,}7 \leqslant A \leqslant 7{,}7$.

(d) f est positive, donc $A = \displaystyle\int_0^2 \frac{6}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[6\ln(x+1)\Big]_0^2 = (6\ln 3)-(6\ln 1) = 6\ln 3 \approx 6{,}59$ u.a. On a bien $5{,}7 \leqslant 6{,}59 \leqslant 7{,}7$: l'encadrement est vérifié.

Ex. 5 ★★★ **Le logo de Maëlys**

(a) Sur $[-3\,;0]$, une racine carrée est positive. Sur $[0\,;2]$, $f(x) = 3 > 0$. Sur $[2\,;5]$, $0 \leqslant x-2 \leqslant 3$, donc $(x-2)^2 \leqslant 9$ et $\frac{(x-2)^2}{3} \leqslant 3$, d'où $f(x) \geqslant 0$.
Donc f est positive sur $[-3\,;5]$: chaque intégrale de f est une aire.

(b) Si $y = \sqrt{9-x^2}$, alors $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2 = 9$: le point est sur le cercle de centre O et de rayon 3, du côté $y \geqslant 0$.
Pour $x \in [-3\,;0]$, le domaine est un quart de disque de rayon 3 : $\displaystyle\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\times 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$ u.a.

(c) Sur $[0\,;2]$, le domaine est un rectangle de largeur 2 et de hauteur 3 : $\displaystyle\int_0^2 3\,\mathrm{d}x = 2\times 3 = 6$ u.a. Sur $[2\,;5]$: $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[3x-\frac{(x-2)^3}{9}\Big]_2^5 = \left(15-\frac{27}{9}\right)-(6-0) = 12-6 = 6$ u.a.

Ex. 5 (suite)

(d) Les trois domaines sont accolés, on additionne leurs aires : $\frac{9\pi}{4} + 6 + 6 = 12 + \frac{9\pi}{4}$ u.a. Conclusion : le logo mesure $12 + \frac{9\pi}{4}$ u.a.

(e) Une unité d'aire est un rectangle de 2 cm sur 1,5 cm : 1 u.a. $= 2 \times 1{,}5 = 3$ cm². On multiplie les deux unités, on ne les additionne pas. Aire $= 3 \times \left(12 + \frac{9\pi}{4}\right) = 36 + \frac{27\pi}{4} \approx 57{,}21$ cm². Conclusion : le logo mesure environ 57,21 cm².

Ex. 6 ★★★ Intégrale et aire d'un trinôme

(a) $f(x) = 3(x-1)(x-3)$ est un trinôme de coefficient $3 > 0$ et de racines 1 et 3.
Donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$ et sur $[3\,;4]$, et $f(x) \leqslant 0$ sur $[1\,;3]$.

(b) Une primitive de f est $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x^3 - 6x^2 + 9x\Big]_0^1 = (1 - 6 + 9) - (0) = 4$. Comme f est positive sur $[0\,;1]$, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$ vaut 4 u.a.

(c) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = (27 - 54 + 27) - (4) = -4$. Une aire ne peut pas être négative : f est négative sur $[1\,;3]$. Le domaine est symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, de celui sous la courbe de $-f$, qui est positive. L'aire vaut donc $\int_1^3 (-f(x))\,\mathrm{d}x = 4$ u.a. Noah a tort : l'aire vaut 4 u.a., et non -4.

(d) Faux. On a bien $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout a, mais la réciproque est fausse. Contre-exemple : $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 0 - 0 = 0$ alors que $0 \neq 3$. L'aire positive sur $[0\,;1]$ compense exactement la partie négative sur $[1\,;3]$.

(e) $\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(3) = (64 - 96 + 36) - 0 = 4$ u.a., car $f \geqslant 0$ sur $[3\,;4]$. L'aire totale vaut $4 + 4 + 4 = 12$ u.a. Mais $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(0) = 4 - 0 = 4$. Conclusion : $12 \neq 4$, car f change de signe. L'intégrale n'est égale à l'aire que si f est positive.

Ex. 7 ★★★ Aire sous la courbe d'une fonction exponentielle

(a) Pour $x \geqslant 0$, $x + 1 > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x) > 0$. On a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$.
Donc f est positive et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Ex. 7 (suite)

(b) f est décroissante, donc sur chaque intervalle la hauteur minimale est à droite et la hauteur maximale à gauche. Somme par défaut : $0{,}5 \times (0{,}91 + 0{,}74 + 0{,}56 + 0{,}41) = 1{,}31$. Somme par excès : $0{,}5 \times (1 + 0{,}91 + 0{,}74 + 0{,}56) = 1{,}605$. Conclusion : $1{,}31 \leqslant A \leqslant 1{,}605$, aux arrondis du tableau près.

(c) $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+2)\mathrm{e}^{-x} = (x+1)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Comme f est positive, $A = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^2 = (-4\mathrm{e}^{-2}) - (-2) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2} \approx 1{,}459$ u.a. Ce résultat est bien compris entre 1,31 et 1,605.

(d) $G(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. f est continue, donc G est la primitive de f qui s'annule en 0 : $G' = f > 0$, et G est croissante. Alors $G(x) = F(x) - F(0) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x} + 2$, soit $G(x) = 2 - (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

(e) Faux. Pour $x \geqslant 0$, $(x+2)\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $G(x) < 2$. L'aire entre 0 et x reste toujours strictement inférieure à 2 u.a. Par croissances comparées, $(x+2)\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $G(x) \to 2$ quand $x \to +\infty$. L'aire s'approche de 2 u.a. sans jamais l'atteindre.

2. *Calculer une intégrale avec une primitive*

Ex. 8 ★★★ Automatismes : polynômes et fonctions usuelles

(a) Une primitive est $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x$. On a donc $\Big[F(x)\Big]_{-2}^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 - 6\right) = \frac{7}{3} - \left(-\frac{38}{3}\right) = \frac{45}{3} = 15$.

(b) Une primitive est $F(x) = x^4 + x$. On a donc $\Big[x^4 + x\Big]_{-2}^0 = 0 - (16 - 2) = -14$. Une intégrale peut être négative.

(c) Une primitive est $2\sqrt{x}$. On a donc $\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 4 - 2 = 2$.

(d) Une primitive est $-\cos x$. On a donc $\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/3} = \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{2}$.

(e) Une primitive est $3\ln x$. On a donc $\Big[3\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = 3 \times 1 - 3 \times 0 = 3$, car $\ln 1 = 0$.

(f) Une primitive est e^x. On a donc $\Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^2 - 1$, car $\mathrm{e}^0 = 1$.

(g) Une primitive est $x^2 + x$. On a donc $\Big[x^2 + x\Big]_3^1 = (1 + 1) - (9 + 3) = -10$. Les bornes sont inversées : on trouve l'opposé de $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = 10$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : formes composées**

(a) Une primitive est $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ (en dérivant, on retrouve bien e^{2x}). On a donc $\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$, et non $\mathrm{e}^2 - 1$.

(b) C'est la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^2$, donc une primitive est e^{x^2}. On a donc $\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

(c) C'est la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + x$, et $u(x) > 0$ sur $[1\,;3]$. Une primitive est donc $\ln(x^2+x)$. On a donc $\Big[\ln(x^2+x)\Big]_1^3 = \ln 12 - \ln 2 = \ln 6$.

(d) Sur $[1\,;2]$, $2x - 1 > 0$. On a $\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1}$, donc une primitive est $\frac{1}{2}\ln(2x-1)$. On a donc $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\ln 3}{2}$.

(e) On a $x^2(x^3+1)^2 = \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3+1)^2$: c'est la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^3 + 1$ et $n = 2$. Une primitive est donc $\frac{(x^3+1)^3}{9}$. On a donc $\left[\frac{(x^3+1)^3}{9}\right]_0^1 = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

(f) Une primitive est $-\mathrm{e}^{-x}$. On a donc $\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\ln 2} = \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{2}$.

Ex. 10 ★★☆ **Les deux erreurs de Lucas**

(a) La dérivée de $x^3 - 2x^2$ est $3x^2 - 4x$. C'est donc bien une primitive de $x \mapsto 3x^2 - 4x$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Lucas n'a pas mis $F(-1)$ entre parenthèses, si bien que le signe « $-$ » ne s'applique qu'au premier terme. Or $F(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -1 - 2 = -3$. On a donc $I = F(2) - F(-1) = (8-8) - (-3) = 3$.

(c) La dérivée de e^{3x} est $3\mathrm{e}^{3x}$, et non e^{3x}. Lucas a donc tort : une bonne primitive de e^{3x} est $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

(d) $J = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^0 = \frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$. On donne d'abord la valeur exacte, puis l'arrondi : $J \approx 6{,}36$.

Ex. 11 ★★☆ **Une fonction définie par une intégrale**

(a) $F(1) = \int_1^1 \ln t\,\mathrm{d}t = 0$. Comme ln est continue sur $]0\,;+\infty[$, F est la primitive de ln qui s'annule en 1, donc $F'(x) = \ln x$. Or $\ln x < 0$ sur $]0\,;1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. F est donc décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

(b) $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$, donc G est une primitive de ln. On en déduit $F(x) = G(x) - G(1) = x\ln x - x - (0-1) = x\ln x - x + 1$.

(c) $F(\mathrm{e}) = \mathrm{e} \times 1 - \mathrm{e} + 1 = 1$. $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \times (-1) - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$.

Ex. 11 (suite)

(d) C'est faux. En inversant les bornes, $\int_{1/\mathrm{e}}^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t = -F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1 \approx -0{,}264$. Cette intégrale est donc négative, ce qui est cohérent avec $\ln t \leqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right]$, où les bornes sont dans l'ordre croissant.

Ex. 12 ★★★ **Une primitive proposée, deux intégrales et une aire**

(a) F est de la forme uv avec $u(x) = -2x - 3$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. $F'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} + (-2x-3) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-2 + 2x + 3)\,\mathrm{e}^{-x} = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) $I = \Big[(-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = \left(-5\,\mathrm{e}^{-1}\right) - \left(-3\,\mathrm{e}^0\right) = 3 - \frac{5}{\mathrm{e}}$, car $\mathrm{e}^0 = 1$.
Donc $I = 3 - \frac{5}{\mathrm{e}} \approx 1{,}16$.

(c) Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f(x)$ a le signe de $2x + 1$: $f(x) < 0$ pour $x < -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, et $f(x) > 0$ pour $x > -\frac{1}{2}$. Sur $\left[-2\,;-\frac{1}{2}\right]$, $f \leqslant 0$ (et elle n'est pas nulle partout), et $-2 < -\frac{1}{2}$: par positivité, $J < 0$.

(d) $J = F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(-2) = \left(-2\,\mathrm{e}^{1/2}\right) - \left(1 \times \mathrm{e}^2\right) = -2\sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^2 \approx -10{,}69$. On retrouve bien $J < 0$. En inversant les bornes : $\displaystyle\int_{-1/2}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = -J = 2\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^2 \approx 10{,}69$.

(e) Comme $f \leqslant 0$ sur $\left[-2\,;-\frac{1}{2}\right]$, l'aire du domaine vaut $-J = 2\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^2$ u.a. Une u.a. vaut $1 \times 2 = 2$ cm², donc l'aire est $2\left(2\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^2\right) = 4\sqrt{\mathrm{e}} + 2\,\mathrm{e}^2 \approx 21{,}37$ cm².

Ex. 13 ★★★ **Chercher une borne**

(a) $g = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$: une primitive est $G(x) = \ln(x^2+1)$. Contrôle : $G'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = g(x)$.
Donc $I(a) = \Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^a = \big(\ln(a^2+1)\big) - (\ln 1) = \ln(a^2+1)$, car $\ln 1 = 0$.

(b) $I(a) = \ln 10 \iff \ln(a^2+1) = \ln 10 \iff a^2 + 1 = 10 \iff a^2 = 9$. Comme $a > 0$, on obtient $a = 3$.

(c) Avec $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et $h = \frac{1}{2}u'u^{-2}$. Une primitive de $u'u^{-2}$ est $-u^{-1}$, donc $H(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$. Contrôle : $H'(x) = \frac{2x}{2(x^2+1)^2} = h(x)$.
$K(a) = \left(-\frac{1}{2(a^2+1)}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(a^2+1)} = \frac{a^2}{2(a^2+1)}$.
Donc $K(1) = \frac{1}{4}$.

(d) Pour $a > 0$: $a^2 > 0$ et $a^2 + 1 > 0$, donc $K(a) = \frac{a^2}{2(a^2+1)} > 0$. De plus, $K(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(a^2+1)}$ avec $\frac{1}{2(a^2+1)} > 0$, donc $K(a) < \frac{1}{2}$. Conclusion : $0 < K(a) < \frac{1}{2}$.

Ex. 13 (suite)

(e) Faux. $\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x^2+1)\Big]_{-a}^{a} = \big(\ln(a^2+1)\big) - \big(\ln((-a)^2+1)\big) = 0$. Or $a > 0$ donne $a^2+1 > 1$, donc $2\,I(a) = 2\ln(a^2+1) > 0$. Les deux nombres sont différents.
(g est négative sur $[-a\,;0]$: les aires se compensent.)

Ex. 14 ★★★ Sinus et cosinus au cube

(a) Avec $u(x) = \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$, on a $f = -u'u^2$. Une primitive de $u'u^2$ est $\frac{u^3}{3}$, donc $F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$. Contrôle : $F'(x) = -\frac{3\cos^2 x \times (-\sin x)}{3} = \sin x \times \cos^2 x = f(x)$.

(b) $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\cos^3 x}{3}\Big]_0^{\pi} = \Big(-\frac{(-1)^3}{3}\Big) - \Big(-\frac{1^3}{3}\Big) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, car $(-1)^3 = -1$.

(c) $\sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin x\,(1-\cos^2 x) = \sin x \times \sin^2 x = \sin^3 x$. Par linéarité : $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{3} = (-(-1)) - (-1) - \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(d) $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2\pi) - F(0) = \Big(-\frac{1}{3}\Big) - \Big(-\frac{1}{3}\Big) = 0$.

(e) Non. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \neq 0$. Par Chasles, $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$: $f \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $f \leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$. Les deux aires valent $\frac{2}{3}$ u.a. et se compensent. Une intégrale nulle ne veut pas dire que la fonction est nulle.

3. *Linéarité, Chasles, positivité et inégalités*

Ex. 15 ★☆☆ Linéarité et Chasles avec des intégrales données

(a) Par linéarité : $2 \times 4 - 3 \times (-2) = 8 + 6 = 14$.

(b) Par la relation de Chasles : $\int_1^5 f = \int_1^3 f + \int_3^5 f = 4 + 7 = 11$.

(c) Les bornes sont inversées : $\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$.

(d) Par linéarité : $4 - \int_1^3 x\,\mathrm{d}x = 4 - \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = 4 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4 - 4 = 0$.

(e) Par linéarité : $3 \times 7 - \int_3^5 1\,\mathrm{d}x = 21 - (5-3) = 19$.

(f) Impossible : l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales. Par exemple, $\int_0^1 x \times x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ alors que $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$. Les données ne suffisent donc pas.

Ex. 15 (suite)

(g) Impossible : par la relation de Chasles, $\int_{-1}^3 f = \int_{-1}^1 f + \int_1^3 f$, mais $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas donnée. Les données ne suffisent donc pas.

Ex. 16 ★★☆ Découper avec Chasles : valeurs absolues et morceaux

(a) $|x-2| = 2-x$ sur $[0\,;2]$ et $|x-2| = x-2$ sur $[2\,;5]$. $\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 2$ et $\int_2^5 (x-2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - 2x\Big]_2^5 = \left(\frac{25}{2} - 10\right) - (2-4) = \frac{9}{2}$. Total : $2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$.

(b) $2x - 1 \leqslant 0$ pour $x \leqslant \frac{1}{2}$: $|2x-1| = 1-2x$ sur $[-1\,;\frac{1}{2}]$ et $|2x-1| = 2x-1$ sur $[\frac{1}{2}\,;2]$. $\int_{-1}^{1/2} (1-2x)\,\mathrm{d}x = \Big[x - x^2\Big]_{-1}^{1/2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1-1) = \frac{9}{4}$ et $\int_{1/2}^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 = 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Total : $\frac{9}{2}$.

(c) Par linéarité : $\int_0^4 x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 |x-2|\,\mathrm{d}x$. D'une part $\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = 8$. D'autre part $\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = 2 + 2 = 4$. Total : 12.

(d) $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - x\Big]_1^3 = (9-3) - (1-1) = 6$. Total : $\frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}$.

(e) $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ sur $[0\,;1]$ et $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}$ sur $[1\,;2]$. $\int_0^1 (\mathrm{e} - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}x - \mathrm{e}^x\Big]_0^1 = 0 - (-1) = 1$ et $\int_1^2 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e})\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x\Big]_1^2 = (\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}) - 0 = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$. Total : $\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1 = (\mathrm{e}-1)^2 \approx 2{,}952$.

Ex. 17 ★★☆ Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

(a) Pour $x \in [0\,;1]$, $x^2 - x = x(x-1) \leqslant 0$, donc $x^2 \leqslant x$, puis $-x \leqslant -x^2$. La fonction exponentielle est croissante, donc $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$. De plus, $-x^2 \leqslant 0$, donc $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$.

(b) Comme $0 \leqslant 1$, on intègre l'encadrement (intégration des inégalités) : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant I \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$. Or $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = (-\mathrm{e}^{-1}) - (-1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. Conclusion : $1 - \mathrm{e}^{-1} \leqslant I \leqslant 1$, soit $0{,}63 \leqslant I \leqslant 1$.

(c) Les bornes sont dans l'ordre décroissant : $\int_1^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -I$. En multipliant l'encadrement de I par -1, le sens change. Conclusion : $-1 \leqslant \int_1^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{-1} - 1$.

(d) Non. Deux fonctions plus grandes que e^{-x} ne sont pas forcément comparables entre elles. Pour $x = \frac{1}{2}$: $\mathrm{e}^{-1/4} \approx 0{,}779$, alors que $\frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. L'inégalité d'Ana est donc fausse.

Ex. 18 ★★☆ **Quand seule la somme se calcule**

(a) Pour tout réel x, $\cos^2 x \geqslant 0$, et $0 \leqslant \pi$. Par positivité de l'intégrale, $I \geqslant 0$.

(b) Par linéarité : $I + J = \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi$.

(c) Par linéarité : $I - J = \int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0$.

(d) On a $I + J = \pi$ et $I = J$, donc $I = J = \frac{\pi}{2}$. La valeur moyenne vaut $\frac{1}{\pi - 0} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

(e) $\int_0^\pi \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\sin x + \frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} > 0$. Pourtant, c'est faux : en $x = \pi$, $\cos \pi + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$. Une intégrale positive ne prouve pas que la fonction est positive (la réciproque de la positivité est fausse).

Ex. 19 ★★★ **Vrai ou faux sur les propriétés de l'intégrale**

(a) Faux. Prends $f = g$ avec $f(x) = x + 1$. D'un côté, $\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. De l'autre, $\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{3}{2}$, et $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Or $\frac{7}{3} \neq \frac{9}{4}$. La linéarité marche pour les sommes, pas pour les produits.

(b) Faux. Les bornes ne sont pas symétriques, donc la parité ne sert à rien ici. $\int_{-2}^3 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^3 = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} \neq 0$. On aurait bien 0 sur $[-2\,;2]$: $\frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0$.

(c) Faux. La relation de Chasles est vraie quelle que soit la position de c. On le vérifie avec $f(x) = x^2$: $\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{125-1}{3} = \frac{124}{3}$ et $\int_5^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{27-125}{3} = -\frac{98}{3}$. Leur somme vaut $\frac{26}{3}$, et on a bien $\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$.

(d) Vrai. Pour $x \in [0\,;1]$, on a $\sqrt{x} \leqslant 1$, donc $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}$, soit $\sqrt{x} - x \geqslant 0$. La fonction est continue et positive, et $0 \leqslant 1$: par positivité, l'intégrale est positive.
(Vérification : $\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \geqslant 0$.)

(e) Faux. La réciproque de l'intégration des inégalités est fausse. Prends $f(x) = x$ et $g(x) = 1$: $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$ et $\int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 2$, donc $2 \leqslant 2$ est vrai. Pourtant $f(2) = 2 > 1 = g(2)$, donc on n'a pas $f \leqslant g$ sur $[0\,;2]$.

Ex. 20 ★★★ **Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence**

(a) Avec $u(x) = 1 + x^2$, on a $u'(x) = 2x$, donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u > 0$. Une primitive est $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc $I_1 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}347$.

(b) Par linéarité, $I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Avec $n = 1$: $I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$, donc $I_3 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0{,}153$.

(c) Pour $x \in [0\,;1]$, $x^{n+1} = x \times x^n \leqslant x^n$ et $1 + x^2 > 0$, donc $\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2}$. Comme $0 \leqslant 1$, on intègre l'inégalité : $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

(d) Puisque la suite est décroissante, $I_{n+2} \leqslant I_n$, donc $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \leqslant 2I_n$, soit $I_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)}$. Pour $n \geqslant 2$, on a aussi $I_n \leqslant I_{n-2}$ et, d'après la relation au rang $n-2$, $2I_n \leqslant I_{n-2} + I_n = \frac{1}{n-1}$, soit $I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.

(e) Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$. En multipliant par $n > 0$, on obtient $\frac{n}{2(n+1)} \leqslant nI_n \leqslant \frac{n}{2(n-1)}$. Les deux bornes tendent vers $\frac{1}{2}$ (quotient des termes de plus haut degré), donc par les gendarmes, $\lim nI_n = \frac{1}{2}$.

Ex. 21 ★★★ **Une fonction définie par morceaux : intégrale, aire et erreurs**

(a) Par Chasles, $\int_0^4 f = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \frac{3-x}{2}\,\mathrm{d}x$. D'une part, $\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. D'autre part, $\frac{1}{2}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left((12 - 8) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}$.
Donc $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$.

(b) Léa a tort : f change de signe, car pour $3 < x \leqslant 4$, $f(x) = \frac{3-x}{2} < 0$. L'intégrale compte cette partie négativement. L'aire vaut donc $\int_0^3 f - \int_3^4 f$. On a $\int_1^3 \frac{3-x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left((9 - \frac{9}{2}) - \frac{5}{2}\right) = 1$ et $\int_3^4 \frac{3-x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. L'aire vaut donc $\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{12}$ u.a., et non $\frac{13}{12}$.

(c) 1 u.a. $= 2 \times 3 = 6$ cm². L'aire vaut donc $\frac{19}{12} \times 6 = \frac{19}{2} = 9{,}5$ cm².

Ex. 21 **(suite)**

(d) L'encadrement de f est juste, mais les bornes 3 et 2 sont dans l'ordre décroissant : Malik ne peut pas intégrer directement. On intègre sur $[2\,;3]$, puisque $2 \leqslant 3 : 0 \leqslant \displaystyle\int_2^3 f \leqslant \frac{1}{2} \times (3-2) = \frac{1}{2}$. Comme $\displaystyle\int_3^2 f = -\int_2^3 f$, on obtient $-\frac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_3^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$: le sens change. Calcul : $\displaystyle\int_2^3 \frac{3-x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 4\right) = \frac{1}{4}$, donc $\displaystyle\int_3^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$, qui est bien compris entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

4. *Valeur moyenne et aire entre deux courbes*

Ex. 22 ★☆☆ **Valeurs moyennes en ligne**

(a) $\displaystyle\int_1^3 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \Big[x^3 - x^2\Big]_1^3 = (27-9) - (1-1) = 18$, donc $\mu = \frac{1}{3-1} \times 18 = 9$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big]_0^{\ln 3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$, donc $\mu = \frac{4}{\ln 3} \approx 3{,}64$.

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$, donc $\mu = \frac{\ln 4}{3} = \frac{2\ln 2}{3} \approx 0{,}46$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$, donc $\mu = \frac{1}{\pi/2} \times 1 = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$.

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{4}{x}\Big]_1^4 = (-1) - (-4) = 3$, donc $\mu = \frac{1}{4-1} \times 3 = 1$.

(f) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = 4$, donc $\mu = \frac{4}{2} = 2$. Or $\frac{f(0)+f(2)}{2} = \frac{0+8}{2} = 4$ et $f(1) = 1$. Aucun de ces deux nombres n'est égal à μ.

Ex. 23 ★☆☆ **Aires entre deux courbes en ligne**

(a) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big]_0^3 = (9 - 9 + 9) - 0 = 9$ u.a.

(b) $f(x) - g(x) = \mathrm{e}^x + x > 0$ sur $[0\,;2]$. $\mathcal{A} = \Big[\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = (\mathrm{e}^2 + 2) - (1+0) = \mathrm{e}^2 + 1 \approx 8{,}39$ u.a.

(c) $f(x) - g(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0$ sur $[1\,;3]$. $\mathcal{A} = \Big[\frac{x^2}{2} - \ln x\Big]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - \ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 4 - \ln 3 \approx 2{,}90$ u.a.

(d) $f(x) - g(x) = -x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2) \geqslant 0$ sur $[-2\,;1]$. $\mathcal{A} = \Big[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-2}^1 = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$ u.a.

Ex. 23 **(suite)**

(e) $f(x) - g(x) = x(x-1)(x+1) \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$: c'est $\mathcal{C}_g$ qui est au-dessus. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$ u.a.

Ex. 24 ★★☆ **Température moyenne d'une journée**

(a) $T(0) = 6$; $T(12) = 6 + 18 - 9 = 15$; $T(24) = 6 + 36 - 36 = 6$ (en °C).

(b) $T'(t) = 1{,}5 - \frac{t}{8}$, et $T'(t) \geqslant 0 \iff t \leqslant 12$. Donc T est croissante sur $[0\,;12]$ et décroissante sur $[12\,;24]$. Son minimum vaut 6 °C (en $t = 0$ et en $t = 24$) et son maximum vaut 15 °C (en $t = 12$).

(c) Une primitive de T est $F(t) = 6t + \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{48}$. $\displaystyle\int_0^{24} T(t)\,\mathrm{d}t = F(24) - F(0) = (144 + 432 - 288) - 0 = 288$, donc $\mu = \frac{288}{24} = 12$ °C. Léa trouve 6 °C et Ilyes 15 °C : aucun des deux n'a raison. Contrôle : on a bien $6 \leqslant 12 \leqslant 15$.

(d) $F(16) - F(8) = \left(288 - \frac{256}{3}\right) - \left(96 - \frac{32}{3}\right) = \frac{352}{3}$, donc $\mu = \frac{1}{16-8} \times \frac{352}{3} = \frac{44}{3} \approx 14{,}67$ °C. Entre 8 h et 16 h, la température moyenne vaut environ 14,67 °C.

Ex. 25 ★★☆ **Une courbe et sa tangente qui se croisent**

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$, donc $f'(1) = -3$ et $f(1) = 2$. Une équation de T est $y = -3(x-1) + 2$, soit $y = -3x + 5$.

(b) $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, et $f(x) - (-3x+5) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$. Cette différence est négative sur $[0\,;1]$ et positive sur $[1\,;2]$. Donc T est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;1]$, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $[1\,;2]$.

(c) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{(x-1)^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$: le calcul de Sami est juste. Son erreur, c'est la conclusion. La différence change de signe en 1, donc les deux morceaux se compensent : cette intégrale n'est pas une aire.

(d) Avec la relation de Chasles : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 -(x-1)^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{(x-1)^4}{4}\Big]_0^1 + \Big[\frac{(x-1)^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u.a. Comme 1 u.a. $= 2 \times 4 = 8$ cm², l'aire vaut $\frac{1}{2} \times 8 = 4$ cm².

Ex. 26 ★★★ **Logarithme et son carré**

(a) $f(x)-g(x)=\ln x-(\ln x)^2=\ln x\,(1-\ln x)$. Ce produit s'annule pour $\ln x=0$ ou $\ln x=1$, c'est-à-dire pour $x=1$ ou $x=\mathrm{e}$. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, on a $\ln x\geqslant 0$ et $1-\ln x\geqslant 0$, donc $f-g\geqslant 0$. Sur $]0\,;1]$ et sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, les deux facteurs sont de signes contraires, donc $f-g\leqslant 0$. Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$ et en dessous ailleurs. Les courbes se coupent aux points $(1\,;0)$ et $(\mathrm{e}\,;1)$.

(b) On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$, d'où $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=x$. Alors $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=\Big[x\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}1\,\mathrm{d}x=(\mathrm{e}-0)-(\mathrm{e}-1)=1$.

(c) $G'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}-\big(2\ln x+2x\times\frac{1}{x}\big)+2=(\ln x)^2+2\ln x-2\ln x-2+2=(\ln x)^2=g(x)$. Donc G est une primitive de g. Ainsi $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=G(\mathrm{e})-G(1)=(\mathrm{e}-2\mathrm{e}+2\mathrm{e})-(0-0+2)=\mathrm{e}-2$.

(d) Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $f\geqslant g$, donc $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=1-(\mathrm{e}-2)=3-\mathrm{e}\approx 0{,}28$ u.a. Une u.a. vaut $2\times 3=6$ cm², donc $\mathcal{A}=6(3-\mathrm{e})=18-6\mathrm{e}\approx 1{,}69$ cm².

(e) On prend $H(x)=x\ln x-x-G(x)=3x\ln x-3x-x(\ln x)^2$ comme primitive de $f-g$. On a $H(1)=-3$, $H(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$ et $H(\mathrm{e}^2)=6\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}^2=-\mathrm{e}^2$.
L'intégrale de Lina vaut $H(\mathrm{e}^2)-H(1)=3-\mathrm{e}^2\approx -4{,}39$: elle est négative, donc ce n'est pas une aire. En effet, $f-g$ change de signe en e et les deux morceaux se compensent. Avec la relation de Chasles : $\mathcal{A}'=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(f-g)+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}(g-f)=(3-\mathrm{e})-\big(H(\mathrm{e}^2)-H(\mathrm{e})\big)=(3-\mathrm{e})+(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+3\approx 4{,}95$ u.a.

Ex. 27 ★★★ **Concentration moyenne d'un médicament**

(a) $C'(t)=10\mathrm{e}^{-0{,}5t}+10t\times(-0{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}5t}=5\mathrm{e}^{-0{,}5t}(2-t)$. Comme $\mathrm{e}^{-0{,}5t}>0$, $C'(t)$ a le signe de $2-t$.
Donc C est croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;6]$. La concentration est maximale à $t=2$ h et vaut $C(2)=20\mathrm{e}^{-1}\approx 7{,}36$ mg/L.

(b) On pose $u(t)=t$ et $v'(t)=\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, d'où $u'(t)=1$ et $v(t)=-2\mathrm{e}^{-0{,}5t}$. Alors $\displaystyle\int_0^6 t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}t=\Big[-2t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\Big]_0^6+\int_0^6 2\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}t=\Big[-(2t+4)\mathrm{e}^{-0{,}5t}\Big]_0^6=(-16\mathrm{e}^{-3})-(-4)=4-16\mathrm{e}^{-3}\approx 3{,}20$.

Ex. 27 **(suite)**

(c) $\mu=\frac{1}{6-0}\displaystyle\int_0^6 C(t)\,\mathrm{d}t=\frac{10\,(4-16\mathrm{e}^{-3})}{6}=\frac{20-80\mathrm{e}^{-3}}{3}\approx 5{,}34$ mg/L. Contrôle : C est positive, son minimum vaut $C(0)=0$ et son maximum 7,36. On a bien $0\leqslant 5{,}34\leqslant 7{,}36$. Pendant les six premières heures, la concentration moyenne est d'environ 5,34 mg/L.

(d) Avec la primitive $-(2t+4)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ de la question 2 : $\displaystyle\int_0^2 t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}t=(-8\mathrm{e}^{-1})-(-4)=4-8\mathrm{e}^{-1}$, donc $\mu_1=\frac{10\,(4-8\mathrm{e}^{-1})}{2}=20-40\mathrm{e}^{-1}\approx 5{,}285$ mg/L. Par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_2^6 t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{d}t=(4-16\mathrm{e}^{-3})-(4-8\mathrm{e}^{-1})=8\mathrm{e}^{-1}-16\mathrm{e}^{-3}$, donc $\mu_2=\frac{10\,(8\mathrm{e}^{-1}-16\mathrm{e}^{-3})}{4}=20\mathrm{e}^{-1}-40\mathrm{e}^{-3}\approx 5{,}366$ mg/L. Alors $\frac{\mu_1+\mu_2}{2}=10-10\mathrm{e}^{-1}-20\mathrm{e}^{-3}\approx 5{,}325$ mg/L, alors que $\mu=\frac{20-80\mathrm{e}^{-3}}{3}\approx 5{,}339$ mg/L. Inès a tort. Les deux durées sont différentes (2 h et 4 h), donc il faut pondérer : $\mu=\frac{2\mu_1+4\mu_2}{6}$.

Ex. 28 ★★★ **Deux exponentielles qui se croisent**

(a) $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2)=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+2=\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2=f(x)-g(x)$. Le facteur e^x-1 s'annule en 0 et le facteur e^x-2 en $\ln 2$. Chaque facteur est positif à droite de sa racine.
Donc $f-g\leqslant 0$ sur $[0\,;\ln 2]$ et $f-g\geqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[\ln 2\,;+\infty[$. Les courbes se coupent en $(0\,;1)$ et en $(\ln 2\,;4)$.

(b) Le domaine fermé correspond à $[0\,;\ln 2]$, où $\mathcal{C}_g$ est au-dessus. Une primitive de $g-f$ est $K(x)=3\mathrm{e}^x-2x-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$.
Donc $\mathcal{A}_1=\Big[K(x)\Big]_0^{\ln 2}=(6-2\ln 2-2)-\big(3-\frac{1}{2}\big)=\frac{3}{2}-2\ln 2\approx 0{,}11$ u.a.

(c) $f-g$ change de signe en $\ln 2$, donc on découpe avec la relation de Chasles : $\mathcal{A}_2=\displaystyle\int_0^{\ln 2}(g-f)+\int_{\ln 2}^1(f-g)$.
Avec $H=-K$ comme primitive de $f-g$: $\displaystyle\int_{\ln 2}^1(f-g)=H(1)-H(\ln 2)=\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-3\mathrm{e}+2\right)-(-4+2\ln 2)=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-3\mathrm{e}+6-2\ln 2$.
Donc $\mathcal{A}_2=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-3\mathrm{e}+\frac{15}{2}-4\ln 2\approx 0{,}27$ u.a.

(d) $d(x)=3\mathrm{e}^x-2-\mathrm{e}^{2x}$, d'où $d'(x)=3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^x(3-2\mathrm{e}^x)$. Ce produit s'annule pour $\mathrm{e}^x=\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $x=\ln\frac{3}{2}$, qui est bien dans $[0\,;\ln 2]$.
Donc d est croissante sur $\big[0\,;\ln\frac{3}{2}\big]$ et décroissante sur $\big[\ln\frac{3}{2}\,;\ln 2\big]$. Son maximum vaut $d\left(\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}-2-\frac{9}{4}=\frac{1}{4}$. L'écart vertical maximal entre les deux courbes est 0,25.

Ex. 28 **(suite)**

(e) $\mu = \frac{1}{\ln 2 - 0}\int_0^{\ln 2} d(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{3}{2} - 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{3}{2\ln 2} - 2 \approx 0{,}16$. Comme $d(0) = d(\ln 2) = 0$, on a $0 \leqslant d \leqslant \frac{1}{4}$ sur $[0\,;\ln 2]$, donc $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{4}$. Le résultat est cohérent : l'écart moyen entre les deux courbes vaut environ 0,16.

5. *Intégration par parties*

Ex. 29 ★☆☆ **Automatismes : intégrer par parties**

(a) $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $v(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.
$\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{4} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{e}}{4} - \left(\frac{\mathrm{e}}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

(b) $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (0 - (-1)) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571$.

(c) $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
$\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (0 - \mathrm{e}) + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^{0} = -\mathrm{e} + (-1 + \mathrm{e}) = -1$.

(d) $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = x^2$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$.
$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - 0\right) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9} \approx 4{,}575$.

(e) $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$.
$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\ln x}{x}\Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0{,}153$.

(f) $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = \sin x$, $v(x) = -\cos x$.
$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = (\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi + (0 - 0) = \pi \approx 3{,}142$.

Ex. 30 ★☆☆ **Automatismes : une primitive de ln**

(a) $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$; $v'(x) = 1$, $v(x) = x$.
$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = (2\ln 2 - 0) - (2 - 1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$.

(b) $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$: G est bien une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

(c) $\int_1^3 \ln x\,\mathrm{d}x = G(3) - G(1) = (3\ln 3 - 3) - (0 - 1) = 3\ln 3 - 2 \approx 1{,}296$.

(d) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln x\,\mathrm{d}x = G(\mathrm{e}^2) - G(\mathrm{e}) = (2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2) - (\mathrm{e} - \mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.

(e) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}^2}}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x = G\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - G\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(-\frac{2}{\mathrm{e}^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) = \frac{3}{\mathrm{e}^2} - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx -0{,}330$. Le résultat est négatif, car $\ln x \leqslant -1 < 0$ sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^2}\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant.

Ex. 31 ★★☆ **Le bon choix et le bon signe**

(a) Avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \frac{x^2}{2} + 3x$: $J = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{7\mathrm{e}}{2} - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Le polynôme passe du degré 1 au degré 2 : la nouvelle intégrale est plus difficile que J. Il faut dériver le polynôme, pas l'exponentielle.

(b) Première erreur : le signe devant l'intégrale restante doit être « − » et non « + ». Seconde erreur : le crochet n'est évalué qu'en 1 ; il faut retrancher la valeur en 0, soit $\left[(x+3)\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 4\mathrm{e} - 3$.

(c) $J = \left[(x+3)\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (4\mathrm{e} - 3) - (\mathrm{e} - 1) = 3\mathrm{e} - 2$.
Donc $J = 3\mathrm{e} - 2 \approx 6{,}155$.

Ex. 32 ★★☆ **Une suite d'intégrales avec ln**

(a) $I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$.

(b) $u(x) = (\ln x)^{n+1}$, $u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$; $v'(x) = 1$, $v(x) = x$ (dérivées continues sur $[1\,;\mathrm{e}]$). $I_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e} - 0) - (n+1)I_n$.
Donc $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

(c) $I_1 = \mathrm{e} - I_0 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$; $I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$; $I_3 = \mathrm{e} - 3I_2 = \mathrm{e} - 3(\mathrm{e} - 2) = 6 - 2\mathrm{e} \approx 0{,}563$.

(d) Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n(\ln x - 1)\,\mathrm{d}x$. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $(\ln x)^n \geqslant 0$ et $\ln x - 1 \leqslant 0$: la fonction intégrée est négative et $1 \leqslant \mathrm{e}$, d'où $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

Ex. 33 ★★★ **Une aire avec deux intégrations par parties**

(a) Sur $[0\,;2]$, on a $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$. De plus, f est continue. L'aire du domaine sous sa courbe entre 0 et 2 est donc $A = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ u.a.

(b) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;2]$. $J = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^2 - \int_0^2 (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-2} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^2 = -2\mathrm{e}^{-2} + (-\mathrm{e}^{-2} - (-1)) = 1 - \frac{3}{\mathrm{e}^2}$.
Donc $J = 1 - \frac{3}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}594$.

(c) On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Ces dérivées sont continues. $A = \Big[-x^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^2 + \int_0^2 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{\mathrm{e}^2} + 2J$.
Donc $A = -\frac{4}{\mathrm{e}^2} + 2 - \frac{6}{\mathrm{e}^2} = 2 - \frac{10}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}647$ u.a.

(d) Une u.a. correspond à un rectangle de $2 \times 5 = 10$ cm². L'aire vaut donc $10A = 20 - \frac{100}{\mathrm{e}^2} \approx 6{,}47$ cm².

Ex. 34 ★★★ **Une suite d'intégrales et sa relation de récurrence**

(a) Une primitive de e^{-x} est $-\mathrm{e}^{-x}$. $I_0 = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - (-1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}632$.

(b) On a $u(x) = x^{n+1}$ et $u'(x) = (n+1)x^n$, puis $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Ces dérivées sont continues sur $[0\,;1]$. $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\,(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{e}^{-1} - 0) + (n+1)I_n$. On a bien $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(c) Avec $n=0$: $I_1 = I_0 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$. Avec $n=1$: $I_2 = 2I_1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}} \approx 0{,}161$.

(d) Pour $x \in [0\,;1]$, on a $x^n \geqslant 0$ et $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$. On intègre ces inégalités entre 0 et 1 (bornes dans l'ordre croissant) : $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim I_n = 0$.

(e) D'après la question 2, $(n+1)I_n = I_{n+1} + \frac{1}{\mathrm{e}}$. Or $\lim I_{n+1} = 0$ d'après la question 4. Donc $\lim (n+1)I_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Ex. 35 ★★★ **Entre deux courbes : l'erreur de Malik**

(a) Le choix de u et v' est correct. En revanche, Malik a mis un « $+$ » à la place du « $-$ » devant l'intégrale restante. Avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$, continues sur $[1\,;\mathrm{e}]$, on obtient : $K = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0\right) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Donc $K = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \approx 2{,}097$.

(b) $f(x) - g(x) = x(\ln x - 1)$. Sur $[1\,;\mathrm{e}]$, on a $x > 0$ et $\ln x \leqslant 1$. Donc $f(x) - g(x) \leqslant 0$: la courbe de g est au-dessus de celle de f.

(c) $A = \int_1^{\mathrm{e}} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} - K = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2} - \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. Donc $A = \frac{\mathrm{e}^2-3}{4} \approx 1{,}097$ u.a. Une u.a. vaut $2 \times 2 = 4$ cm², donc l'aire vaut $\mathrm{e}^2 - 3 \approx 4{,}39$ cm².

(d) Avec le même choix qu'en question 1, on obtient : $H(t) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^t - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^t = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}$. Vérification : $H'(t) = t\ln t + \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} - \frac{t}{2} = t\ln t$. On retrouve bien la fonction intégrée, ce qui confirme le calcul.

6. *Méthode des rectangles et algorithme*

Ex. 36 ★☆☆ **Découper l'intervalle, sommer les rectangles**

(a) $h = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

(b) $h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$, donc les bornes sont 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1. Il y a six bornes (k de 0 à 5).

(c) $h = \frac{3-(-1)}{8} = 0{,}5$, donc $x_5 = -1 + 5 \times 0{,}5 = 1{,}5$.

(d) $h = \frac{4-1}{3} = 1$. Les bornes à gauche sont 1, 2, 3 : $s_3 = 1 \times (1 + 4 + 9) = 14$.

(e) $h = 1$. Les bornes à droite sont 2, 3, 4 : $S_3 = 1 \times (4 + 9 + 16) = 29$.

(f) Non. Elle a écrit la somme à gauche s_4, qui contient $f(0) = f(a)$. La somme à droite prend k de 1 à 4 : $S_4 = 0{,}5 \times \big(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)\big)$.

Ex. 37 ★☆☆ **Défaut, excès et précision**

(a) $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$, donc f est décroissante. La somme à gauche prend la plus grande valeur sur chaque intervalle : s_n est une valeur par excès.

(b) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est croissante. La somme à gauche prend la plus petite valeur sur chaque intervalle : s_n est une valeur par défaut.

(c) $h = \frac{3}{6} = 0{,}5$, $f(0) = 4$ et $f(3) = 1$. Écart $= 0{,}5 \times |1 - 4| = 1{,}5$.

(d) $h = \frac{3}{10} = 0{,}3$, $f(0) = 1$ et $f(3) = 10$. Écart $= 0{,}3 \times |10 - 1| = 2{,}7$.

(e) Écart $= \frac{9}{n} \times |\sqrt{9} - \sqrt{0}| = \frac{27}{n}$. On veut $\frac{27}{n} \leqslant 0{,}01$, soit $n \geqslant 2700$. Il faut au minimum 2700 rectangles.

(f) Écart $= \frac{\mathrm{e}-1}{n} \times |\ln \mathrm{e} - \ln 1| = \frac{\mathrm{e}-1}{n}$. On veut $n \geqslant 1000(\mathrm{e}-1) \approx 1718{,}3$. Comme n est entier, il faut au minimum 1719 rectangles.

Ex. 38 ★★☆ **La distance parcourue par Léna**

(a) $h = \frac{8-0}{4} = 2$. Comme v est croissante, la hauteur prise au bord gauche est la plus petite valeur sur chaque intervalle : s_4 est par défaut et S_4 par excès.

(b) Non. Sa somme a cinq termes et contient $v(8)$, qui est la valeur en b : la somme à gauche s'arrête à $t = 6$. On trouve $s_4 = 2 \times (0 + 3{,}2 + 5{,}6 + 7{,}2) = 2 \times 16 = 32$ et $S_4 = 2 \times (3{,}2 + 5{,}6 + 7{,}2 + 8) = 2 \times 24 = 48$.

Ex. 38 **(suite)**

(c) $32 \leqslant d \leqslant 48$, soit une amplitude de $48 - 32 = 16$. On retrouve bien $h\,|v(8) - v(0)| = 2 \times |8 - 0| = 16$. Léna a donc parcouru entre 32 m et 48 m.

(d) La vitesse moyenne vaut $\frac{1}{8-0}\displaystyle\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{d}{8}$, donc $\frac{32}{8} \leqslant v_m \leqslant \frac{48}{8}$. Sa vitesse moyenne est comprise entre 4 et 6 $\mathrm{m.s^{-1}}$.

Ex. 39 ★★☆ **Le programme d'Inès**

(a) Il affiche 4. Comme x n'est jamais mis à jour, il reste égal à 0. La boucle ajoute donc quatre fois $f(0) = 1$, sans le facteur h.

(b) Première erreur : x n'avance jamais. Seconde erreur : h est oublié dans la somme. Pour une somme à droite, on avance x avant d'ajouter le terme, ce qui donne $x_1, \ldots, x_n$. La fonction corrigée :

```
def droite(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x = a
    s = 0
    for k in range(n):
        x = x + h
        s = s + h * f(x)
    return s
```

(c) $h = 0{,}5$ et $S_4 = 0{,}5 \times \big(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)\big) = 0{,}5 \times (1{,}125 + 2 + 4{,}375 + 9) = 0{,}5 \times 16{,}5 = 8{,}25$. Pour $n = 3$, $h = \frac{2}{3}$ et $S_3 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{35}{27} + \frac{91}{27} + 9\right) = \frac{2}{3} \times \frac{41}{3} = \frac{82}{9} \approx 9{,}111$. Le programme affiche `9.11`.

(d) Une primitive de f est $F(x) = x + \frac{x^4}{4}$, donc $\displaystyle\int_0^2 (1 + x^3)\,\mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = (2 + 4) - (0) = 6$. Comme $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$, f est croissante : la somme à droite S_4 est par excès. On vérifie que $8{,}25 \geqslant 6$.

Ex. 40 ★★★ **Plus précis avec les milieux**

(a) $h = \frac{4-1}{3} = 1$, donc $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ sur $[1\,;4]$, donc f est strictement croissante sur $[1\,;4]$.

(b) $s_3 = 1 \times \left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \approx 4{,}146$ (la somme ne contient pas $f(4)$) et $S_3 = 1 \times \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}\right) \approx 5{,}146$ (elle ne contient pas $f(1)$). Comme f est croissante, chaque rectangle à gauche est sous la courbe.

Donc s_3 est une valeur par défaut de I.

(c) Une primitive de f est $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. $I = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3} \times 8\right) - \left(\frac{2}{3} \times 1\right) = \frac{14}{3} \approx 4{,}667$.

Ex. 40 **(suite)**

(d) Les milieux sont 1,5 ; 2,5 et 3,5. $M_3 = 1 \times \left(\sqrt{1{,}5} + \sqrt{2{,}5} + \sqrt{3{,}5}\right) \approx 4{,}677$. Écarts : $|s_3 - I| \approx 0{,}520$, $|S_3 - I| \approx 0{,}480$ et $|M_3 - I| \approx 0{,}010$. Avec le même nombre de rectangles, la méthode des milieux est environ cinquante fois plus précise.

(e) Ligne 6 : `s = s + h*f(a + (k + 0.5)*h)`. Le milieu du k-ième intervalle est $x_k + \frac{h}{2} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h$, et le programme affiche `4.677`.

Ex. 41 ★★★ **Les deux erreurs de Yanis**

(a) $h = \frac{4-0}{4} = 1$; $x_k = 0, 1, 2, 3, 4$; images : 3 ; 2 ; 1,5 ; 1,2 ; 1. $S_4 = 1 \times (2 + 1{,}5 + 1{,}2 + 1) = 5{,}7$. Le programme a calculé $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 7{,}7$: c'est la somme à gauche s_4, pas S_4.

(b) Première erreur : `range(n)` fait varier k de 0 à $n - 1$, ce qui donne la somme à gauche. Il faut `for k in range(1, n + 1):`. Seconde erreur : le facteur h est oublié. Il faut `s = s + h*f(a + k*h)`. Cette erreur ne se voit pas ici parce que $h = 1$. Une fois corrigé, le programme affiche `5.7`.

(c) $f'(x) = -\frac{6}{(x+2)^2} < 0$, donc f est décroissante sur $[0\,;4]$. La somme à droite est alors par défaut et la somme à gauche par excès : $S_4 \leqslant I \leqslant s_4$, soit $5{,}7 \leqslant I \leqslant 7{,}7$.

(d) Une primitive de f est $F(x) = 6\ln(x + 2)$. $I = \Big[6\ln(x + 2)\Big]_0^4 = (6\ln 6) - (6\ln 2) = 6\ln 3 \approx 6{,}592$. On a bien $5{,}7 \leqslant 6{,}592 \leqslant 7{,}7$.

(e) Vrai. Dans la différence $s_n - S_n = h\big(f(x_0) - f(x_n)\big)$, tous les termes s'éliminent sauf deux : $s_n - S_n = \frac{4}{n} \times (3 - 1) = \frac{8}{n}$. Pour $n = 4$, l'écart vaut 2 ; pour $n = 8$, il vaut 1. En doublant n, on divise donc l'écart par deux.

Ex. 42 ★★★ **Le panneau solaire de Nora**

(a) $P'(t) = 0{,}5(12 - t) \geqslant 0$ sur $[8\,;12]$, donc P est croissante. Chaque rectangle à gauche reste sous la courbe, donc s_n est une valeur par défaut de E et S_n une valeur par excès.

(b) $h = \frac{12-8}{4} = 1$. $s_4 = 1 \times (1 + 2{,}75 + 4 + 4{,}75) = 12{,}5$ (sans $P(12)$) et $S_4 = 1 \times (2{,}75 + 4 + 4{,}75 + 5) = 16{,}5$ (sans $P(8)$). Comme P est croissante, $12{,}5 \leqslant E \leqslant 16{,}5$ kWh.

Ex. 42 **(suite)**

(c) Sur $[8\,;12]$, $P(t) \geqslant 1 > 0$: une somme de rectangles ne peut pas être négative. Le programme calcule $P(k \times h)$, donc $P(0)+P(1)+P(2)+P(3) = -31-25{,}25-20-15{,}25 = -91{,}5$. Il oublie que $x_k = a + kh$ avec $a = 8$. Il faut écrire `s = s + h * P(8 + k*h)`. Le programme corrigé affiche alors `12.5`, c'est-à-dire s_4.

(d) Une primitive de P est $F(t) = 5t + \frac{(12-t)^3}{12}$. $E = \left[5t + \frac{(12-t)^3}{12}\right]_8^{12} = (60+0) - \left(40+\frac{64}{12}\right) = \frac{44}{3} \approx 14{,}67$ kWh. C'est cohérent, puisque $12{,}5 \leqslant 14{,}67 \leqslant 16{,}5$.

(e) Dans la différence $S_n - s_n$, tous les termes s'éliminent sauf deux : $S_n - s_n = h\big(P(12) - P(8)\big) = \frac{4}{n} \times 4 = \frac{16}{n}$. On résout $\frac{16}{n} \leqslant 0{,}1$, ce qui donne $n \geqslant 160$. Il faut donc au moins 160 rectangles.

7. *Suites d'intégrales et problèmes type bac*

Ex. 43 ★☆☆ **Automatismes : calculer un premier terme**

(a) Une primitive de e^{-2x} est $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2} \approx 0{,}432$.

(b) Sur $[0\,;1]$, $2+x>0$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(2+x)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \approx 0{,}405$.

(c) C'est la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+x^2 > 0$.
Donc $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 \approx 1{,}609$.

(d) C'est la forme $u'u$ avec $u = \ln x$.
Donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left(\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{2}$.

(e) On développe : $x^2(1-x) = x^2 - x^3$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 (x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$.

(f) On écrit $x(1+x^2)^3 = \frac{1}{2} \times 2x(1+x^2)^3$: c'est la forme $\frac{1}{2}u'u^3$. Une primitive est $\frac{(1+x^2)^4}{8}$.
Donc l'intégrale vaut $\left[\frac{(1+x^2)^4}{8}\right]_0^1 = \left(\frac{16}{8}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}$.

Ex. 44 ★★☆ **Automatismes : encadrer ou donner un signe sans calculer**

(a) On note I cette intégrale. Comme $x^4 \geqslant 0$, on a $\frac{x^4}{2} \leqslant \frac{x^4}{1+x^2} \leqslant x^4$ sur $[0\,;1]$. Comme $0 \leqslant 1$, on intègre les inégalités : $\left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$.
Donc $\frac{1}{10} \leqslant I \leqslant \frac{1}{5}$.

(b) On note J cette intégrale. Sur $[1\,;3]$, $2 \leqslant 1+x^2 \leqslant 10$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $1 \leqslant 3$, on intègre :
$\frac{1}{10} \times (3-1) \leqslant J \leqslant \frac{1}{2} \times (3-1)$.
Donc $\frac{1}{5} \leqslant J \leqslant 1$.

(c) Les bornes sont dans l'ordre décroissant. On intègre donc d'abord sur $[0\,;2]$ (car $0 \leqslant 2$) : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.
Or $\displaystyle\int_2^0 = -\int_0^2$, donc l'inégalité change de sens :
$-2 \leqslant \displaystyle\int_2^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

(d) Sur $[0\,;1]$, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. La fonction intégrée est donc négative ou nulle. Comme $0 \leqslant 1$, par positivité appliquée à son opposée, l'intégrale est négative : $\displaystyle\int_0^1 (x^3-x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

(e) On note K cette intégrale. La fonction ln est croissante, donc sur $[1\,;\mathrm{e}]$, $\ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln \mathrm{e}$, soit $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$. Comme $\frac{1}{x^2} > 0$, on a $0 \leqslant \frac{\ln x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Comme $1 \leqslant \mathrm{e}$, on intègre : $0 \leqslant K \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - (-1)$.
Donc $0 \leqslant K \leqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}632$.

Ex. 45 ★★☆ **Extrait de bac : la suite des intégrales de $x^n\,\mathrm{e}^x$**

(a) $I_0 = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718$. Pour I_1, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $I_1 = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}-0) - (\mathrm{e}-1) = 1$.

(b) Sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$. Comme $0 \leqslant 1$, par positivité, $I_n \geqslant 0$. Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Sur $[0\,;1]$, $x - 1 \leqslant 0$, donc la fonction intégrée est négative et $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

(c) Sur $[0\,;1]$, $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ et $x^n \geqslant 0$, donc $x^n \leqslant x^n\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x^n$. Comme $0 \leqslant 1$, on intègre : $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Ex. 45 (suite)

(d) On pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Alors $I_{n+1} = \Big[x^{n+1}\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, d'où $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$. Avec $n=1$: $I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

Ex. 46 ★★☆ Problème type bac : le pendentif de Ben

(a) f est continue sur $[0\,;2]$, donc F est la primitive de f qui s'annule en 0 : $F'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $F'(x)$ a le signe de $1-x$.
Donc F est croissante sur $[0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;2]$.

(b) $G'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\,\mathrm{e}^x = (1-x)\,\mathrm{e}^x = f(x)$, donc G est une primitive de f. Alors $F(x) = \Big[(2-t)\,\mathrm{e}^t\Big]_0^x = \big((2-x)\,\mathrm{e}^x\big) - (2)$.
Donc $F(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x - 2$.

(c) Sur $[0\,;1]$, $f \geqslant 0$, donc $\mathcal{A} = F(1) = (\mathrm{e}) - 2 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}72$ u.a. Une u.a. vaut $3 \times 3 = 9$ cm², donc $\mathcal{A} = 9(\mathrm{e}-2) \approx 6{,}46$ cm². L'aire du pendentif est d'environ 6,46 cm².

(d) $\mu = \frac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$ unité. Une unité vaut 3 cm. La hauteur moyenne du pendentif est donc $3(\mathrm{e}-2) \approx 2{,}15$ cm.

(e) Le programme affiche `0.8292` : c'est la somme de 4 rectangles de largeur $\frac{1}{4}$, avec la hauteur prise à gauche. On a $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^x \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc f est décroissante. Chaque rectangle à gauche dépasse donc la courbe. C'est une valeur approchée par excès de $F(1) = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}718$.

Ex. 47 ★★★ Problème type bac : une suite d'intégrales sans primitive

(a) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.
Par linéarité, $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Avec $n=0$: $I_1 = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307$. Avec $n=1$: $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0{,}193$.

(b) Sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $1+x > 0$, donc $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$. Comme $0 \leqslant 1$, par positivité, $I_n \geqslant 0$. Par linéarité, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Sur $[0\,;1]$, $x - 1 \leqslant 0$, donc la fonction intégrée est négative. Comme les bornes sont dans l'ordre croissant, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est décroissante.

Ex. 47 (suite)

(c) Pour $x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$. Comme $x^n \geqslant 0$, on a $\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$. Comme $0 \leqslant 1$, on intègre l'inégalité : $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$.

(d) (I_n) est décroissante, donc $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n$. De même, $I_n \leqslant I_{n-1}$, donc $2I_n \leqslant I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n}$. On a donc $\frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n \leqslant \frac{1}{n}$, puis $\frac{n}{2(n+1)} \leqslant n\,I_n \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $\frac{n}{2(n+1)}$ tend vers $\frac{1}{2}$, les gendarmes donnent $\lim n\,I_n = \frac{1}{2}$. Lina a tort.

Ex. 48 ★★★ Problème type bac : les puissances du logarithme

(a) $J_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^{\mathrm{e}} = \Big(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. On pose $u(x) = (\ln x)^{n+1}$, donc $u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$, et $v'(x) = x$, avec $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Par parties : $J_{n+1} = \Big[\frac{x^2}{2}(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2} \times \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0\Big) - \frac{n+1}{2}J_n$.
Donc $J_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}J_n$.

(b) Avec $n=0$: $J_1 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}J_0 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \approx 2{,}097$.
Avec $n=1$: $J_2 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - J_1 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} \approx 1{,}597$.

(c) Pour $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$. En multipliant par $x(\ln x)^n \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant x(\ln x)^{n+1} \leqslant x(\ln x)^n$. Comme $1 \leqslant \mathrm{e}$, on intègre l'inégalité : $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$. La suite (J_n) est donc positive et décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle converge.

(d) D'après la question 1, $\frac{n+1}{2}J_n = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - J_{n+1}$. Or $J_{n+1} \geqslant 0$, donc $\frac{n+1}{2}J_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2}$, c'est-à-dire $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+1}$. Comme $\frac{\mathrm{e}^2}{n+1}$ tend vers 0, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

(e) Ligne 5 : `j = exp(2) / 2 - (k + 1) / 2 * j`. Au passage k, `j` contient J_k et devient $J_{k+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{k+1}{2}J_k$. On a $J_3 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{2}J_2 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3(\mathrm{e}^2-1)}{8} = \frac{\mathrm{e}^2+3}{8}$. Le programme affiche 1.2986.

Ex. 49 ★★★ Problème type bac : le badge d'Inès

(a) $f(x) - g(x) = x(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Sur $[0\,;1]$, $x \geqslant 0$, $1-x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$. Sur $[0\,;1]$, la courbe de f est au-dessus de celle de g. Elles se coupent en $x = 0$ et en $x = 1$.

(b) On pose $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, avec $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Alors $A = \Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} + (-\mathrm{e}^{-1} + 1) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}264$.

Ex. 49 **(suite)**

(c) $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Alors $B = \Big[-x^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + 2\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + 2A$.
Donc $B = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}} \approx 0{,}161$.

(d) Comme $f - g \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, l'aire vaut $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = A - B = \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) - \left(2 - \frac{5}{\mathrm{e}}\right) = \frac{3}{\mathrm{e}} - 1$ u.a.
Ici, 1 u.a. $= 4 \times 4 = 16$ cm². L'aire du badge vaut donc $16\left(\frac{3}{\mathrm{e}} - 1\right) = \frac{48}{\mathrm{e}} - 16 \approx 1{,}66$ cm².

(e) Le programme calcule la somme des rectangles à gauche : 4 rectangles de largeur 0,25 sur $[0\,;1]$. Ici, $0{,}0966 < \frac{3}{\mathrm{e}} - 1 \approx 0{,}1036$: la valeur est bien par défaut. Mais la raison donnée est fausse. Les rectangles à gauche ne donnent à coup sûr une valeur par défaut que si h est croissante. Or $h(0) = h(1) = 0$ et $h > 0$ sur $]0\,;1[$, donc h n'est pas monotone sur $[0\,;1]$. Seule la comparaison avec la valeur exacte permet de conclure. Zoé a tort dans sa justification, même si sa conclusion est juste ici.