42 exercices en 6 parties, du plus simple au plus difficile : ★☆☆ facile · ★★☆ moyen · ★★★ difficile. Le corrigé détaillé est sur **benprofparticulier.fr**.

1. Intégrale d'une fonction positive : aire sous la courbe

À retenir : Si f est continue et positive sur $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire sous $\mathcal{C}_f$, en u.a. ; dans un trapèze, la hauteur est $b-a$. $\displaystyle\int_a^a f = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$. Ex. : 2 cm sur 1 cm, donc 1 u.a. $= 2$ cm².

Ex. 1 ★☆☆ **Intégrales en ligne par la géométrie** — Pour chaque intégrale, vérifie que la fonction est positive sur l'intervalle. Reconnais ensuite la figure et calcule l'intégrale avec sa formule d'aire.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2{,}5\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{6} \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{2}^{5} (3x-1)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (4-x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ (le point $M(x\,;y)$ de la courbe vérifie $x^2+y^2=4$)

Ex. 2 ★☆☆ **Bornes, unités et domaine** — Réponds à chaque question en une ou deux lignes, sans chercher de primitive.

a) Calcule $\displaystyle\int_{4}^{4} (x^2+7)\,\mathrm{d}x$.

b) Calcule $\displaystyle\int_{5}^{1} 2\,\mathrm{d}x$.

c) Calcule $\displaystyle\int_{3}^{0} (x+2)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un trapèze.

d) Une unité vaut 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée. Donne en cm² l'aire du domaine sous la courbe de $f(x)=2x+1$ entre $x=0$ et $x=5$.

e) Décris précisément le domaine dont l'aire, en u.a., vaut $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Ex. 3 ★★☆ **La fonction $|x-2|$ en deux morceaux** — On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par $f(x)=|x-2|$.

a) Écris $f(x)$ sans valeur absolue sur $[-1\,;2]$, puis sur $[2\,;4]$.

Ex. 3 (suite)

b) Justifie que f est positive, puis décris précisément le domaine $\mathcal{D}$ dont l'aire vaut $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Découpe $\mathcal{D}$ en deux triangles et calcule $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Retrouve l'aire du premier triangle en calculant $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive.

e) Détermine le réel c de $[2\,;4]$ tel que $\displaystyle\int_{2}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Ex. 4 ★★☆ **Repère l'erreur de Malik** — Unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. Pour $g(x)=3x+2$ sur $[1\,;5]$, Malik écrit : « Le domaine est un trapèze de bases $g(1)=5$ et $g(5)=17$, et de hauteur 17. Donc $\displaystyle\int_{1}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5+17}{2}\times 17 = 187$. Comme 1 u.a. $= 2+1 = 3$ cm², l'aire vaut 561. »

a) Justifie que g est positive sur $[1\,;5]$ et que l'intégrale représente bien une aire.

b) Repère l'erreur dans le calcul de l'intégrale, puis corrige-la.

c) Repère les deux erreurs de la conversion, puis donne l'aire du domaine en cm².

d) Retrouve la valeur de l'intégrale à l'aide d'une primitive de g.

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux sur l'aire sous la courbe** — Vrai ou faux ? Justifie chaque affirmation.

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} (x-3)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., du domaine compris entre la droite $y=x-3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

b) L'aire du domaine compris entre la droite $y=x+3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$ vaut $\frac{4\times 7}{2}=14$ u.a.

c) Si 1 u.a. $= 2$ cm², alors $\displaystyle\int_{0}^{3} 4\,\mathrm{d}x$ représente une aire de 24 cm².

d) L'aire du domaine sous la courbe de $h(x)=6-x$, entre $x=0$ et $x=6$, vaut 36 u.a.

e) Sans calcul, on peut affirmer que $\displaystyle\int_{0}^{2} (x^2+1)\,\mathrm{d}x \geqslant 2$.

Ex. 6 ★★★ **Le panneau décoratif de Lucie** — Lucie trace le patron d'un panneau dans un repère orthogonal. Unité graphique : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées. Sur $[0\,;7]$, on pose $f(x)=\frac{x}{2}+1$ si $0\leqslant x\leqslant 4$ et $f(x)=3$ si $4<x\leqslant 7$. Le panneau est le domaine D compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=7$.

(a) Vérifie que f est continue et positive sur $[0\,;7]$. Explique pourquoi l'aire de D, en u.a., est égale à $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x$, en reconnaissant chaque fois une figure.

(c) Déduis-en l'aire de D en u.a., puis en cm².

(d) Lucie veut couper D en deux parties de même aire avec la droite d'équation $x=a$. Justifie que $a\in[4\,;7]$, puis détermine a.

(e) Son frère Nolan écrit : « $\displaystyle\int_7^0 f(x)\,\mathrm{d}x=17$ ». A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 7 ★★★ **Le sticker en forme de lune de Théo** — Théo dessine un sticker en forme de lune. Pour $x\in[0\,;4]$, on pose $h(x)=\sqrt{16-x^2}$ et $g(x)=4-x$. Le sticker est le domaine S compris entre les courbes de h et de g et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$. Unité graphique : 1,5 cm sur chaque axe. Donne les valeurs exactes, puis arrondies au centième.

(a) Montre que la courbe de h est un quart de cercle. Précise son centre et son rayon.

(b) Déduis-en la valeur de $\displaystyle\int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x$. Calcule ensuite $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x$ avec une formule d'aire.

(c) Montre que $0\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ pour tout $x\in[0\,;4]$. Tu pourras calculer $h(x)^2-g(x)^2$.

(d) Déduis-en l'aire de S en u.a., puis en cm².

2. *Calculer une intégrale avec une primitive*

À retenir : Je cherche une primitive F et je la vérifie en dérivant. Ensuite, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$, avec $F(a)$ entre parenthèses. Ex. : $\left[x^2-x\right]_{-1}^{1}=0-(2)=-2$. Attention : $e^0=1$ et $\ln 1=0$.

Ex. 8 ★★☆ **Automatismes : polynômes, puissances et inverse** — Calcule chaque intégrale. Écris le crochet complet, puis donne la valeur exacte.

(a) $\displaystyle\int_0^3 (3x^2+2)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (4x^3-2x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^4 (2x-5)\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^0 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Ex. 9 ★★☆ **Automatismes : exponentielles, formes u'/u et $u'e^u$** — Pour chaque intégrale, écris une primitive et vérifie-la en dérivant. Calcule ensuite la valeur exacte, puis l'arrondi au centième.

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^2 3e^{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{4x-2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Ex. 10 ★★★ **Les calculs de Léna** — Léna a calculé les intégrales ci-dessous. Pour chaque calcul, dis s'il est juste. S'il est faux, nomme l'erreur et corrige le calcul.

(a) Léna écrit : $\displaystyle\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x=\left[x^2+x\right]_1^3=(1+1)-(9+3)=-10$. Juste ou faux ?

(b) Léna écrit : $\displaystyle\int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x=[12x]_0^1=12$. Juste ou faux ?

(c) Léna écrit : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} 2e^x\,\mathrm{d}x=[2e^x]_0^{\ln 3}=6-0=6$. Juste ou faux ?

(d) Léna écrit : $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x=3\times 2^2-3\times 1^2=9$. Juste ou faux ?

(e) Léna écrit : $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 4-\ln 2=\ln 2$. Juste ou faux ?

Ex. 11 ★★★ **Vrai ou faux : une fonction définie par une intégrale** — Pour $x>0$, on pose $G(x)=\displaystyle\int_1^x \left(4t-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$. Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou faux et justifie.

(a) Affirmation : « $G(1)=f(1)$, où $f(t)=4t-\frac{2}{t}$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(b) Affirmation : « Pour tout $x>0$, $G'(x)=4x-\frac{2}{x}$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(c) Affirmation : « Pour tout $x>0$, $G(x)=2x^2-2\ln x$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(d) Affirmation : « G est croissante sur $[1\,;+\infty[$. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Affirmation : « $G(e)=2e^2-4$. » Vrai ou faux ? Justifie.

Ex. 12 ★★☆ **Pomper l'eau d'un parking à Albi** — À Albi, une pompe vide un parking inondé. t heures après le début du pompage, le débit est $d(t) = 20(t+1)e^{-0{,}5t}$, en m³ par heure, pour $t \in [0\,;6]$. Le volume pompé entre $t=a$ et $t=b$ est $\displaystyle\int_a^b d(t)\,\mathrm{d}t$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Montre que $F(t) = (-40t-120)e^{-0{,}5t}$ est une primitive de d sur $[0\,;6]$.

(b) Calcule le volume d'eau pompé pendant les 4 premières heures.

(c) Le parking contenait 100 m³ d'eau. Yanis affirme que 6 heures de pompage suffisent pour le vider. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 13 ★★★ **Choisir la borne d'une intégrale** — Sur $[0\,;+\infty[$, on considère $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$. Pour un réel $a>0$, on note $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième quand on les demande.

(a) Écris $f(x)$ sous la forme $k \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ en précisant k et u. Déduis-en une primitive F de f sur $[0\,;+\infty[$, puis vérifie-la en dérivant.

(b) Calcule $I(a)$ en fonction de a. Écris le crochet complet.

(c) Détermine la valeur exacte du réel $a>0$ tel que $I(a)=4$, puis son arrondi au centième.

(d) Tom écrit : « $I(1) = f(1) - f(0) = 2 - 0 = 2$ ». A-t-il raison ? Justifie, puis donne la valeur exacte de $I(1)$ et son arrondi au centième.

Ex. 14 ★★★ **Le départ d'Inès au vélodrome de Roubaix** — Au vélodrome de Roubaix, Inès part de l'arrêt. t secondes après le départ, sa vitesse est $v(t) = 12 - 12e^{-2t}$, en m/s, pour $t \in [0\,;10]$. La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 est $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$, en mètres. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Justifie que $v(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;10]$. Donne une primitive V de v et vérifie-la en dérivant.

(b) Calcule la distance parcourue par Inès pendant les 5 premières secondes.

(c) Pour la distance parcourue entre $t=1$ et $t=3$, Hugo calcule $V(1) - V(3)$ et trouve un nombre négatif. Explique son erreur, puis corrige son calcul.

(d) Calcule la vitesse moyenne μ d'Inès sur $[0\,;10]$, puis interprète le résultat.

3. *Linéarité, relation de Chasles, fonction de signe quelconque*

À retenir : Chasles : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Linéarité, mais $\int fg \neq \int f \times \int g$. Si $f \leqslant 0$, aire $= -\int f$ (ex. : $\int_0^2 (x-2)\,\mathrm{d}x = -2$, aire 2 u.a.). Si f change de signe, je coupe en ses zéros.

Ex. 15 ★★☆ **Automatismes : Chasles et linéarité** — f et g sont continues sur $[0\,;3]$. On sait que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$ et $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Calcule chaque intégrale.

(a) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \big(2f(x) + 3g(x)\big)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^3 \big(f(x) - 2g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

Ex. 16 ★★☆ **Automatismes : intégrales de signe quelconque** — Calcule chaque intégrale (valeur exacte).

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_2^0 (x+1)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^4 (2-x)\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_1^e \left(-\frac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - 3)\,\mathrm{d}x$

Ex. 17 ★★☆ **Repérer l'erreur de Malo** — Soit $g(x) = x^2 - 3x$ sur $[0\,;4]$. On cherche l'aire du domaine compris entre la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$. Malo écrit : « $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{3}$, donc l'aire vaut $\frac{8}{3}$ u.a. »

(a) Vérifie le calcul de $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x$ fait par Malo.

(b) Étudie le signe de $g(x)$ sur $[0\,;4]$.

(c) Explique pourquoi la conclusion de Malo est fausse.

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_3^4 g(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) Déduis-en l'aire exacte du domaine, puis son arrondi au centième.

Ex. 18 ★★☆ **Vrai ou faux : signe et règles de calcul** — Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse.

(a) Soit $h(x) = -x^2 - 1$. L'aire du domaine compris entre la courbe de h, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=3$ vaut $\displaystyle\int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Sans calcul : $\displaystyle\int_2^{-1} (x^2+2)\,\mathrm{d}x$ est négative.

(c) $\displaystyle\int_0^1 x \times x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

Ex. 18 **(suite)**

(d) Si f est continue et $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[-1\,;1]$.

(e) Sans calcul : $\int_{1}^{2} \ln x\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Ex. 19 ★★☆ **Fonction définie par morceaux** — Sur $[0\,;5]$, $f(x) = 2x - 4$ si $x \in [0\,;3]$ et $f(x) = 5 - x$ si $x \in [3\,;5]$. Unité graphique : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée. On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 5$.

(a) Vérifie que les deux formules donnent la même valeur en 3, puis calcule $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Déduis-en $\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$. Est-ce l'aire de $\mathcal{D}$? Justifie.

(c) Étudie le signe de f sur $[0\,;5]$, puis calcule l'aire de $\mathcal{D}$ en u.a.

(d) Convertis l'aire de $\mathcal{D}$ en cm².

Ex. 20 ★★★ **Une vanne qui remplit et vide une citerne** — À Rodez, Noé surveille une citerne agricole. Entre $t = 0$ et $t = 5$ (en heures), le débit de la vanne est $d(t) = 3t^2 - 18t + 24$, en m³/h. Quand $d(t) > 0$, l'eau entre dans la citerne ; quand $d(t) < 0$, elle sort. La variation du volume d'eau entre les instants a et b est $\int_{a}^{b} d(t)\,\mathrm{d}t$, en m³. À $t = 0$, la citerne contient 50 m³.

(a) Vérifie que $d(t) = 3(t-2)(t-4)$, puis dresse le tableau de signes de d sur $[0\,;5]$. Indique quand la citerne se remplit et quand elle se vide.

(b) Sans calcul, justifie le signe de $\int_{2}^{4} d(t)\,\mathrm{d}t$ et celui de $\int_{4}^{2} d(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Calcule $\int_{0}^{5} d(t)\,\mathrm{d}t$. Déduis-en le volume de la citerne à $t = 5$.

(d) Calcule le volume total d'eau passé par la vanne entre $t = 0$ et $t = 5$ (entrées + sorties). Explique pourquoi on ne retrouve pas le résultat précédent.

Ex. 21 ★★★ **Aire, linéarité et le produit de Léna** — Soit $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ sur $[1\,;4]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe et $\mathcal{D}$ le domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. Unité graphique : 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Écris $f(x)$ sous la forme d'un seul quotient, puis étudie le signe de f sur $[1\,;4]$.

(b) Montre que $F(x) = x - 2\ln x$ est une primitive de f sur $[1\,;4]$. Calcule ensuite $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 21 **(suite)**

(c) Déduis-en $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis calcule l'aire de $\mathcal{D}$ en u.a. et en cm².

(d) Par linéarité, calcule $\int_{1}^{4} \big(3f(x) - 2x\big)\,\mathrm{d}x$.

(e) Léna affirme : « $\int_{1}^{4} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} x\,\mathrm{d}x \times \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ ». A-t-elle raison ? Justifie par le calcul.

4. *Positivité, encadrement et valeur moyenne*

À retenir : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$: on divise par $b - a$. Ex. : $3x^2$ sur $[0;2]$ donne $\mu = \frac{8}{2} = 4 \neq \frac{0+12}{2}$. Si $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_{a}^{b} f \leqslant M(b-a)$. Si $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b$, alors $\int_{a}^{b} f \geqslant 0$. La réciproque est fausse.

Ex. 22 ★☆☆ **Valeurs moyennes en ligne** — Calcule la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle donné. Donne la valeur exacte.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1\,;9]$.

(b) $f(x) = 4x + 1$ sur $[1\,;4]$.

(c) $f(x) = 3x^2 - 2x$ sur $[2\,;5]$.

(d) $f(x) = e^{2x}$ sur $[0\,;2]$.

(e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ sur $[1\,;e]$.

Ex. 23 ★★☆ **Encadrer ou donner un signe sans calculer** — Ne calcule aucune intégrale. Utilise le sens de variation ou le signe de la fonction sur l'intervalle.

(a) Encadre $I = \int_{0}^{1} e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

(b) Encadre $I = \int_{2}^{6} \dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

(c) Donne le signe de $J = \int_{1}^{5} (x-6)e^{x}\,\mathrm{d}x$.

(d) Donne le signe de $K = \int_{4}^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Attention à l'ordre des bornes.

(e) Compare $A = \int_{0}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ et $B = \int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur la positivité et la moyenne** — f désigne une fonction continue sur l'intervalle considéré. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Justifie.

(a) Si $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-1\,;2]$.

(b) La valeur moyenne de $x \mapsto x^3$ sur $[0\,;2]$ vaut $\frac{0^3+2^3}{2} = 4$.

Ex. 24 **(suite)**

(c) Si $2 \leqslant f(x) \leqslant 5$ pour tout $x \in [1\,;3]$, alors $4 \leqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$.

(d) La valeur moyenne de $g(x) = 6x + 1$ sur $[0\,;4]$ est égale à $g(2)$.

(e) Si f a pour minimum -1 et pour maximum 3 sur $[0\,;5]$, sa valeur moyenne sur $[0\,;5]$ peut valoir 4.

Ex. 25 ★★☆ **Vitesse moyenne d'une cycliste : deux erreurs** — Près d'Annecy, la vitesse d'une cycliste entre $t = 1$ et $t = 3$ (en heures) vaut $v(t) = -3t^2 + 12t + 20$, en km/h.

(a) Calcule $\displaystyle\int_1^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ et dis ce que représente ce nombre.

(b) Noah écrit : $\mu = \frac{1}{3}\displaystyle\int_1^3 v(t)\,\mathrm{d}t$. Trouve son erreur, puis calcule la vitesse moyenne.

(c) Léna propose plutôt $\frac{v(1)+v(3)}{2}$. A-t-elle raison ? Justifie.

(d) Étudie les variations de v sur $[1\,;3]$. Vérifie que la vitesse moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de v.

Ex. 26 ★★☆ **Le café de Camille** — À Lyon, Camille se sert un café. Sa température vaut $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1t}$, en °C, où $t \in [0\,;30]$ est le temps en minutes. Donne la valeur exacte, puis un arrondi.

(a) Montre que $F(t) = 20t - 700e^{-0{,}1t}$ est une primitive de T sur $[0\,;30]$.

(b) Calcule la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{30} T(t)\,\mathrm{d}t$, puis arrondis-la au centième.

(c) Déduis-en la température moyenne du café pendant les 30 premières minutes, arrondie au dixième.

(d) Dans un mug isotherme, la température $U(t)$ vérifie $T(t) \leqslant U(t)$ sur $[0\,;30]$. Compare les deux températures moyennes sans calcul.

Ex. 27 ★★★ **Énergie consommée par un atelier à Rennes** — À Rennes, la puissance électrique consommée par un atelier est $P(t) = 2 + \frac{6t}{t^2+4}$, en kW, où $t \in [0\,;6]$ est le temps en heures après l'ouverture. L'énergie consommée, en kWh, est $E = \displaystyle\int_0^6 P(t)\,\mathrm{d}t$. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Montre que $P'(t) = \frac{6(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$, puis dresse le tableau de variations de P sur $[0\,;6]$.

(b) Sans calculer E, déduis-en un encadrement de E.

(c) Détermine une primitive de P sur $[0\,;6]$, puis calcule E.

(d) Calcule la puissance moyenne μ de l'atelier sur ces six heures. Vérifie la cohérence de ton résultat avec le tableau de variations.

Ex. 27 **(suite)**

(e) Calcule $\displaystyle\int_0^6 \big(P(t) - 3\big)\,\mathrm{d}t$. Hugo en déduit que $P(t) \geqslant 3$ sur $[0\,;6]$. A-t-il raison ? Justifie.

Ex. 28 ★★★ **Serre d'Avignon : comparer, calculer, interpréter** — À Avignon, la température dans une serre est modélisée par $T(t) = -0{,}1t^2 + 2{,}4t + 6$, en °C, où $t \in [6\,;18]$ est l'heure de la journée. Dehors, la température vaut $E(t) = 0{,}5t + 6$. On note $I = \displaystyle\int_6^{18} T(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montre que $T(t) - E(t) = 0{,}1t(19 - t)$, puis que $T(t) \geqslant E(t)$ pour tout $t \in [6\,;18]$.

(b) Sans calculer I, déduis-en un minorant de I.

(c) Calcule la valeur exacte de I.

(d) Calcule la température moyenne μ de la serre entre 6 h et 18 h.

(e) Calcule $\frac{1}{12}\displaystyle\int_6^{18} \big(T(t) - E(t)\big)\,\mathrm{d}t$ à l'aide des questions précédentes. Interprète ce nombre.

5. *Aire entre deux courbes*

À retenir : Aire entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$: bornes par $f(x) = g(x)$, signe de $f - g$, puis $\int_a^b (f-g)$ « haut moins bas » (ex. $\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$ u.a.). Courbes qui se croisent : je découpe (Chasles). Gini $= 2\times$ aire entre $y = x$ et Lorenz.

Ex. 29 ★☆☆ **Aire entre deux courbes, bornes données** — Pour chaque cas, justifie le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle. Calcule ensuite, en u.a., l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont les bornes de l'intervalle.

(a) $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = x + 1$ sur $[0\,;2]$.

(b) $f(x) = e^x$ et $g(x) = -x$ sur $[0\,;1]$.

(c) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = 1$ sur $[1\,;4]$.

(d) $f(x) = -1 - x^2$ et $g(x) = -4$ sur $[-1\,;1]$ (les deux courbes sont sous l'axe des abscisses).

Ex. 30 ★☆☆ **Points d'intersection, puis aire** — Pour chaque cas, cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en résolvant $f(x) = g(x)$. Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ entre ces abscisses, puis calcule en u.a. l'aire du domaine délimité par les deux courbes.

(a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 5x$.

(b) $f(x) = x^2 - 3$ et $g(x) = 2x$.

(c) $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$, pour $x \geqslant 0$.

(d) $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 4$.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur de Malo : des courbes qui se croisent** — On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Malo cherche l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Il calcule $\int_0^2 (x - x^2)\,\mathrm{d}x$.

(a) Calcule $\int_0^2 (x - x^2)\,\mathrm{d}x$. Explique pourquoi ce nombre ne peut pas être une aire.

(b) Étudie le signe de $x - x^2$ sur $[0\,;2]$. Que peux-tu en déduire pour les deux courbes ?

(c) Malo affirme : « L'aire est la valeur absolue de mon résultat. » A-t-il raison ? Justifie en calculant l'aire avec la relation de Chasles.

(d) L'unité graphique est de 2 cm en abscisse et de 3 cm en ordonnée. Donne l'aire du domaine en cm².

Ex. 32 ★★☆ **Entre une courbe et sa tangente** — On pose $f(x) = x^3$ sur $[0\,;1]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. L'unité graphique est de 4 cm sur chaque axe.

(a) Détermine une équation de la tangente T.

(b) Montre que, pour tout réel x, $f(x)$ moins l'ordonnée du point de T d'abscisse x vaut $(x-1)^2(x+2)$. Déduis-en la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur $[0\,;1]$.

(c) Calcule en u.a. l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(d) Convertis cette aire en cm².

Ex. 33 ★★☆ **Salaires à Rennes : courbe de Lorenz et indice de Gini** — Dans une entreprise de Rennes, les $x \times 100\,\%$ de salariés les moins payés perçoivent $L(x) \times 100\,\%$ de la masse salariale. On pose $L(x) = 0{,}4x + 0{,}6x^2$ sur $[0\,;1]$. L'indice de Gini est $G = 2\times$ l'aire comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe de L sur $[0\,;1]$.

(a) Vérifie que $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$, puis que $L(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

(b) Calcule en u.a. l'aire comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe de L sur $[0\,;1]$.

(c) Déduis-en l'indice de Gini G de cette entreprise.

(d) Dans une entreprise de Dijon, la courbe de Lorenz est donnée par $L_2(x) = x^4$. Quelle entreprise a la répartition la plus égalitaire ? Justifie.

Ex. 34 ★★★ **Le logo du club d'aviron de Mâcon** — Pour le logo d'un club d'aviron de Mâcon, on pose $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ et $g(x) = x$ sur $[0\,;4]$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f et D la droite d'équation $y = x$. Le logo est le domaine compris entre $\mathcal{C}_f$ et D sur $[0\,;4]$. L'unité graphique est de 2 cm sur chaque axe.

(a) Montre que $f(x) - g(x) = x(x-2)(x-4)$. Déduis-en les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de D.

(b) Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;4]$, puis précise la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.

Ex. 34 (suite)

(c) Yanis calcule $\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ pour obtenir l'aire de la partie du logo située sur $[0\,;2]$. Calcule cette intégrale, puis explique son erreur.

(d) Calcule l'aire du logo en u.a., puis en cm².

Ex. 35 ★★★ **Deux coopératives du Gers : laquelle est la plus égalitaire ?** — La répartition des revenus est modélisée sur $[0\,;1]$ par $L_A(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$ dans une coopérative d'Auch, et par $L_B(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x$ dans une coopérative de Condom. L'indice de Gini G vaut le double de l'aire du domaine compris entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe de Lorenz. Plus G est proche de 0, plus la répartition est égalitaire.

(a) Vérifie que $L_A(0) = 0$ et $L_A(1) = 1$, puis que L_A est croissante sur $[0\,;1]$.

(b) On pose $h(x) = x - L_A(x)$. Étudie les variations de h sur $[0\,;1]$, puis déduis-en que $L_A(x) \leqslant x$ sur $[0\,;1]$.

(c) Calcule la valeur exacte de l'indice de Gini G_A de la coopérative d'Auch, puis donne son arrondi au millième.

(d) Justifie que $L_B(x) \leqslant x$ sur $[0\,;1]$. Calcule G_B, puis dis quelle coopérative a la répartition la plus égalitaire.

6. *Méthode des rectangles et algorithme*

À retenir : $h = \frac{b-a}{n}$; $R_g = h\big(f(a) + \cdots + f(b-h)\big)$, $R_d = h\big(f(a+h) + \cdots + f(b)\big)$: n termes chacun. f croissante : $R_g \leqslant \int_a^b f \leqslant R_d$ (inverse si décroissante). Amplitude $\frac{(b-a)\lvert f(b)-f(a)\rvert}{n}$. Ex. : $[0\,;1]$, $n = 5$: $h = 0{,}2$.

Ex. 36 ★☆☆ **Le pas et les abscisses** — Automatismes. On partage l'intervalle en n rectangles de même largeur h.

(a) Sur $[0\,;3]$ avec $n = 6$, calcule le pas h.

(b) Sur $[-1\,;1]$ avec $n = 8$, calcule le pas h.

(c) Sur $[2\,;5]$, on veut un pas $h = 0{,}25$: combien de rectangles n faut-il ?

(d) Sur $[0\,;2]$ avec $n = 4$, écris les abscisses utilisées par les rectangles à gauche.

(e) Même découpage de $[0\,;2]$ avec $n = 4$: écris les abscisses utilisées par les rectangles à droite.

(f) Sur $[1\,;2]$ avec $n = 10$, combien de termes contient R_g ? Quelle est la dernière abscisse utilisée ?

Ex. 37 ★☆☆ **Sommes de rectangles et encadrement** — Automatismes. On note $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 10 - x^2$. Donne des valeurs exactes.

(a) Pour f sur $[0\,;2]$ avec $n = 2$, calcule R_g et R_d.

(b) Justifie que f est croissante sur $[0\,;2]$ et déduis-en un encadrement de $\int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 37 **(suite)**

(c) Pour g sur $[1\,;3]$ avec $n=4$, calcule R_d.

(d) Pour g, R_g et R_d n'ont que deux termes différents. Déduis R_g de R_d sans tout recalculer.

(e) Justifie que g est décroissante sur $[1\,;3]$ et déduis-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 (10-x^2)\,\mathrm{d}x$.

(f) Pour $x \mapsto e^x$ sur $[0\,;1]$ avec $n=10$, calcule l'amplitude de l'encadrement (valeur exacte puis arrondi au centième).

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur de Léo** — Soit $f(x)=\frac{12}{x+1}$ sur $[0\,;2]$, avec $n=4$. Léo a calculé : $f(0)=12$, $f(0{,}5)=8$, $f(1)=6$, $f(1{,}5)=4{,}8$ et $f(2)=4$.

(a) Justifie que f est décroissante sur $[0\,;2]$.

(b) Léo écrit : « $R_g = 0{,}5\times(12+8+6+4{,}8+4) = 17{,}4$ ». Repère son erreur et calcule la bonne valeur de R_g.

(c) Calcule R_d.

(d) Léo conclut : « R_g minore toujours l'intégrale ». A-t-il raison ici ? Justifie, puis encadre $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(e) Calcule la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis son arrondi au centième, et vérifie qu'elle respecte ton encadrement.

Ex. 39 ★★☆ **Le programme de Zoé à corriger** — Zoé veut une fonction Python qui renvoie R_d pour une fonction f sur $[a\,;b]$ avec n rectangles. Elle écrit :

```
def rectangles_droite(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h)
    return s
```

(a) À l'exécution, Python signale une erreur sur la variable `s`. Quelle ligne manque, et où faut-il la placer ?

(b) Quelles valeurs prend `k` avec `range(n)`, et quelles abscisses sont alors utilisées ? Quelle méthode obtient-on ? Corrige le programme pour obtenir R_d.

(c) La valeur renvoyée par `return s` n'est pas R_d. Corrige cette ligne et explique pourquoi.

(d) Écris la fonction Python `f` qui code $f(x)=x^2$, puis l'instruction qui affiche R_d sur $[1\,;3]$ avec 4 rectangles.

(e) Calcule à la main la valeur affichée. Est-ce une valeur approchée par défaut ou par excès de $\displaystyle\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$? Justifie.

Ex. 40 ★★☆ **Distance d'une moto au démarrage** — Une moto démarre. Sa vitesse, en m/s, est $v(t)=20-16e^{-0{,}5t}$ pour $t\in[0\,;4]$, en secondes. La distance parcourue, en mètres, vaut $\displaystyle\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifie que v est croissante sur $[0\,;4]$.

Ex. 40 **(suite)**

(b) Avec $n=4$, complète le tableau (arrondis au centième) :

k	t_k	v(t_k)
0	0	4
1	1	…
2	2	…
3	3	…
4	4	…

(c) Calcule R_g et R_d, puis encadre la distance parcourue.

(d) Calcule l'amplitude de cet encadrement avec la formule du cours et compare-la à R_d-R_g. Combien de rectangles faut-il pour la diviser par 10 ?

(e) On admet que $V(t)=20t+32e^{-0{,}5t}$ est une primitive de v. Vérifie-le, puis calcule la distance exacte et son arrondi au centième.

Ex. 41 ★★★ **Exposition à un médicament : quelle précision ?** — La concentration d'un médicament dans le sang, en mg/L, est $C(t)=8e^{-0{,}2t}$, avec $t\in[0\,;8]$ en heures. L'exposition est $I=\displaystyle\int_0^8 C(t)\,\mathrm{d}t$, en mg·h/L. Inès l'approche avec n rectangles. Donne les valeurs exactes, puis les arrondis au centième.

(a) Justifie que C est décroissante sur $[0\,;10]$. Laquelle des deux sommes R_g et R_d minore I ?

(b) Avec $n=4$, calcule R_g et R_d. Donne ensuite un encadrement de I.

(c) Pour n quelconque, explique pourquoi $R_g-R_d = h\big(C(0)-C(8)\big)$, puis exprime cette amplitude en fonction de n.

(d) Trouve le plus petit entier n tel que l'amplitude de l'encadrement soit inférieure ou égale à 0,1.

(e) Calcule la valeur exacte de I. Vérifie qu'elle se trouve bien dans l'encadrement obtenu avec $n=4$.

Ex. 42 ★★★ **Le programme de Mathis passé au crible** — Soit $f(x)=x^3+1$ sur $[0\,;2]$. Mathis veut une fonction Python qui renvoie la somme R_g des rectangles à gauche. Il écrit :

```
def f(x):
    return x**3 + 1

def rect(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n + 1):
        x = a + k*h
        s = s + h*f(x)
    return s
```

(a) Justifie que f est croissante sur $[0\,;2]$. Dans quel ordre se rangent alors R_g, R_d et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

Ex. 42 **(suite)**

(b) On lance `rect(f, 0, 2, 4)`. Donne les valeurs prises par `k` et le nombre renvoyé. Explique pourquoi ce n'est ni R_g ni R_d.

(c) Corrige une ligne pour que la fonction renvoie R_g. Donne ensuite la modification qui fait renvoyer R_d.

(d) Lucas affirme : « Multiplier par `h` dans la boucle donne un mauvais résultat ; il faut le faire après la boucle. » Vrai ou faux ? Justifie.

(e) Pour $n = 4$, calcule à la main R_g et R_d, puis la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifie l'encadrement.