Terminale maths complémentaires / Calcul intégral — corrigé

benprof particulier.fr

1. *Intégrale d'une fonction positive : aire sous la courbe*

Ex. 1 ★☆☆ **Intégrales en ligne par la géométrie**

(a) La fonction constante 2,5 est positive : le domaine est un rectangle de largeur $3-(-1)=4$ et de hauteur 2,5. $\int_{-1}^{3} 2{,}5\,\mathrm{d}x = 2{,}5\times 4 = 10$ u.a.

(b) Sur $[0\,;6]$, $\frac{x}{3}\geqslant 0$: le domaine est un triangle de base 6 et de hauteur $f(6)=2$. $\int_0^6 \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{6\times 2}{2} = 6$ u.a.

(c) Sur $[2\,;5]$, $3x-1\geqslant 5>0$: le domaine est un trapèze de bases $f(2)=5$ et $f(5)=14$, et de hauteur $5-2=3$. $\int_2^5 (3x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{5+14}{2}\times 3 = \frac{57}{2}$ u.a.

(d) Sur $[-2\,;1]$, $4-x\geqslant 3>0$: le domaine est un trapèze de bases $f(-2)=6$ et $f(1)=3$, et de hauteur $1-(-2)=3$. $\int_{-2}^{1}(4-x)\,\mathrm{d}x = \frac{6+3}{2}\times 3 = \frac{27}{2}$ u.a.

(e) On a $y\geqslant 0$ et $x^2+y^2=4=2^2$. Sur $[0\,;2]$, la courbe est donc un quart du cercle de centre O et de rayon 2. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\times 2^2}{4} = \pi$ u.a.

Ex. 2 ★☆☆ **Bornes, unités et domaine**

(a) Les deux bornes sont égales : $\int_4^4 (x^2+7)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) Les bornes sont inversées : $\int_5^1 2\,\mathrm{d}x = -\int_1^5 2\,\mathrm{d}x = -(2\times 4) = -8$.

(c) Sur $[0\,;3]$, $x+2\geqslant 2>0$: on obtient un trapèze de bases 2 et 5, et de hauteur 3, donc $\int_0^3 (x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{2+5}{2}\times 3 = \frac{21}{2}$. Les bornes sont inversées, donc $\int_3^0 (x+2)\,\mathrm{d}x = -\frac{21}{2}$.

(d) Sur $[0\,;5]$, $f\geqslant 1>0$: on obtient un trapèze de bases $f(0)=1$ et $f(5)=11$, et de hauteur 5. Son aire vaut $\frac{1+11}{2}\times 5 = 30$ u.a. Comme 1 u.a. $= 1\times 0{,}5 = 0{,}5$ cm², l'aire vaut $30\times 0{,}5 = 15$ cm².

(e) La fonction exponentielle est continue et positive sur $[0\,;1]$. Le domaine est délimité par la courbe de $x\mapsto \mathrm{e}^x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Ex. 3 ★★☆ **La fonction $|x-2|$ en deux morceaux**

(a) Sur $[-1\,;2]$, $x-2\leqslant 0$, donc $f(x)=2-x$. Sur $[2\,;4]$, $x-2\geqslant 0$, donc $f(x)=x-2$.

(b) Une valeur absolue est toujours positive, et f est continue. $\mathcal{D}$ est le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=4$.

(c) Sur $[-1\,;2]$, on a un triangle de base 3 et de hauteur $f(-1)=3$, d'aire $\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$. Sur $[2\,;4]$, on a un triangle de base 2 et de hauteur $f(4)=2$, d'aire $\frac{2\times 2}{2}=2$. Donc $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}+2 = \frac{13}{2}$ u.a.

(d) Sur $[-1\,;2]$, $f(x)=2-x$, dont une primitive est $x\mapsto 2x-\frac{x^2}{2}$. $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = (4-2) - \left(-2-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$. On retrouve l'aire du premier triangle.

(e) Sur $[2\,;c]$, $f(x)=x-2\geqslant 0$: le domaine est un triangle de base $c-2$ et de hauteur $f(c)=c-2$, d'aire $\frac{(c-2)^2}{2}$. On résout $\frac{(c-2)^2}{2}=\frac{1}{2}$, soit $(c-2)^2=1$. Comme $c-2\geqslant 0$, on a $c-2=1$, donc $c=3$.

Ex. 4 ★★☆ **Repère l'erreur de Malik**

(a) Sur $[1\,;5]$, $3x+2\geqslant 5>0$ et g est continue. L'intégrale est donc l'aire, en u.a., du domaine délimité par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

(b) La hauteur du trapèze n'est pas $g(5)$ mais la largeur de l'intervalle : $5-1=4$. Donc $\int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5+17}{2}\times 4 = 44$ u.a.

(c) Malik additionne les deux échelles au lieu de les multiplier : 1 u.a. $= 2\times 1 = 2$ cm². De plus, il n'a pas écrit d'unité. L'aire du domaine vaut $44\times 2 = 88$ cm².

(d) Une primitive de g est $G(x)=\frac{3x^2}{2}+2x$. $\int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^5 = \left(\frac{75}{2}+10\right) - \left(\frac{3}{2}+2\right) = 44$. On retrouve 44 u.a.

Ex. 5 ★★☆ **Vrai ou faux sur l'aire sous la courbe**

(a) Faux. Sur $[0\,;2]$, $x-3\leqslant -1<0$: la fonction n'est pas positive, donc l'intégrale n'est pas une aire. Elle vaut $\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^2 = 2-6=-4$, alors que l'aire du domaine est 4 u.a.

Ex. 5 **(suite)**

(b) Faux. Sur $[0\,;4]$, $x+3 \geqslant 3 > 0$, mais $f(0) = 3 \neq 0$: le domaine n'est pas un triangle. C'est un trapèze de bases $f(0) = 3$ et $f(4) = 7$, et de hauteur 4. Son aire vaut $\frac{3+7}{2} \times 4 = 20$ u.a.

(c) Vrai. On obtient un rectangle de largeur 3 et de hauteur 4 : $\displaystyle\int_0^3 4\,\mathrm{d}x = 12$ u.a., soit $12 \times 2 = 24$ cm².

(d) Faux. Sur $[0\,;6]$, $h \geqslant 0$: le domaine est un triangle de base 6 et de hauteur $h(0) = 6$. Son aire vaut $\frac{6\times 6}{2} = 18$ u.a.

(e) Vrai. Sur $[0\,;2]$, $x^2+1 \geqslant 1$: le domaine sous la courbe contient le rectangle de largeur 2 et de hauteur 1, d'aire 2 u.a.

(Le calcul donne d'ailleurs $\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$.)

Ex. 6 ★★★ **Le panneau décoratif de Lucie**

(a) Sur $[0\,;4]$, $f(x) = \frac{x}{2}+1 \geqslant 1 > 0$. Sur $]4\,;7]$, $f(x) = 3 > 0$. Chaque morceau est continu. En 4, la première expression donne $\frac{4}{2}+1 = 3$: c'est la même valeur que le second morceau, donc f est continue sur $[0\,;7]$. f est continue et positive sur $[0\,;7]$, donc $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en u.a., du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 7$, c'est-à-dire de D.

(b) Sur $[0\,;4]$, f est affine et positive. Le domaine est un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$ et de hauteur $4 - 0 = 4$: $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1+3}{2} \times 4 = 8$ u.a. Sur $[4\,;7]$, f est constante égale à 3. Le domaine est un rectangle : $\displaystyle\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times (7-4) = 9$ u.a.

(c) D est la réunion des deux domaines (relation de Chasles) : $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 8+9 = 17$ u.a. On a 1 u.a. $= 1 \times 4 = 4$ cm². L'aire du panneau est donc $17 \times 4 = 68$ cm².

(d) Chaque partie doit avoir une aire de $\frac{17}{2} = 8{,}5$ u.a. Or $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8 < 8{,}5$, donc $a > 4$. Comme $a < 7$, on a bien $a \in [4\,;7]$. Pour $a \in [4\,;7]$, on a $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 8 + 3(a-4)$ (trapèze puis rectangle). On résout $8 + 3(a-4) = 8{,}5$, soit $a - 4 = \frac{1}{6}$: $a = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$. La droite d'équation $x = \frac{25}{6}$ partage le panneau en deux parties de même aire.

Ex. 6 **(suite)**

(e) Non. Les bornes sont inversées : $\displaystyle\int_7^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = -17$. Une aire n'est jamais négative : c'est $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 17$ u.a. qui donne l'aire de D, avec la plus petite borne en bas.

Ex. 7 ★★★ **Le sticker en forme de lune de Théo**

(a) Pour $x \in [0\,;4]$, $16 - x^2 \geqslant 0$, donc h est bien définie. Un point $M(x\,;y)$ de la courbe vérifie $y \geqslant 0$ et $y^2 = 16 - x^2$, soit $x^2 + y^2 = 16 = 4^2$. Comme $x \in [0\,;4]$ et $y \geqslant 0$, la courbe de h est le quart de cercle de centre O et de rayon 4 situé dans le quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(b) h est continue et positive sur $[0\,;4]$. Le domaine sous sa courbe est un quart de disque de rayon 4 : $\displaystyle\int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi \approx 12{,}57$ u.a. Ensuite, $g(x) = 4 - x \geqslant 0$ sur $[0\,;4]$ et g est affine. Le domaine est un triangle de base 4 et de hauteur $g(0) = 4$: $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\times 4}{2} = 8$ u.a.

(c) Sur $[0\,;4]$, $g(x) = 4 - x \geqslant 0$ et $h(x) \geqslant 0$. On a $h(x)^2 - g(x)^2 = 16 - x^2 - (16 - 8x + x^2) = 8x - 2x^2 = 2x(4-x)$. Or $x \geqslant 0$ et $4 - x \geqslant 0$, donc $h(x)^2 \geqslant g(x)^2$. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés : $0 \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

(d) Comme $0 \leqslant g \leqslant h$, le domaine sous la courbe de g est contenu dans le domaine sous la courbe de h. S est le quart de disque privé du triangle : aire de $S = 4\pi - 8 \approx 4{,}57$ u.a. On a 1 u.a. $= 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ cm². L'aire du sticker est donc $2{,}25 \times (4\pi - 8) = 9\pi - 18 \approx 10{,}27$ cm².

2. *Calculer une intégrale avec une primitive*

Ex. 8 ★☆☆ **Automatismes : polynômes, puissances et inverse**

(a) $\left[x^3 + 2x\right]_0^3 = (27+6) - (0+0) = 33$.

(b) $\left[x^4 - x^2\right]_{-1}^2 = (16-4) - (1-1) = 12$.

(c) $\left[x^2 - 5x\right]_1^4 = (16-20) - (1-5) = -4 - (-4) = 0$.

(d) $\left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$.

(e) $\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^0 = 0 - \left(-\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{14}{3}$.

(f) x^{-2} a pour primitive $-\frac{1}{x}$, donc $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$.

Ex. 9 ★☆☆ **Automatismes : exponentielles, formes u'/u et $u'e^u$**

(a) $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-e^{-2}}{2} \approx 0{,}43$.

(b) $\left[3e^{x}\right]_0^2 = 3e^2 - 3e^0 = 3e^2 - 3 \approx 19{,}17$. Attention : $e^0 = 1$, pas 0.

(c) $\left[\frac{1}{4}e^{4x-2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-2}}{4} = \frac{e^2-e^{-2}}{4} \approx 1{,}81$.

(d) Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2+3 > 0$: $\left[\ln(x^2+3)\right]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}29$. Attention : $\ln 3 \neq 0$.

(e) $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}$, avec $u = 2x+1 > 0$: $\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2} \approx 0{,}55$.

(f) $x\,e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x\,e^{x^2}$ (forme $u'e^u$) : $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} \approx 0{,}86$.

Ex. 10 ★★☆ **Les calculs de Léna**

(a) Faux. Léna a calculé $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$. On corrige : $\left[x^2+x\right]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 10$.

(b) Faux. Léna a dérivé $6x^2$ au lieu de chercher une primitive. Une primitive de $6x^2$ est $2x^3$, donc $\left[2x^3\right]_0^1 = 2 - 0 = 2$.

(c) Faux. Elle a écrit $2e^0 = 0$, alors que $e^0 = 1$. On corrige : $\left[2e^x\right]_0^{\ln 3} = 2\times 3 - 2\times 1 = 4$.

(d) Faux. Léna a calculé $f(2) - f(1)$ au lieu d'évaluer une primitive. On corrige : $\left[x^3\right]_1^2 = 8 - 1 = 7$.

(e) Juste. $\ln$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $[2\,;4]$, et $\ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$.

Ex. 11 ★★☆ **Vrai ou faux : une fonction définie par une intégrale**

(a) Faux. Les deux bornes sont égales, donc $G(1) = \int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors que $f(1) = 4 - 2 = 2$.

(b) Vrai. f est continue sur $]0\,;+\infty[$, donc G est la primitive de f qui s'annule en 1. Ainsi $G'(x) = f(x) = 4x - \frac{2}{x}$.

(c) Faux. $2x^2 - 2\ln x$ est bien une primitive de f, mais elle vaut 2 en 1. Or $G(1) = 0$, donc $G(x) = \left[2t^2 - 2\ln t\right]_1^x = 2x^2 - 2\ln x - 2$.

(d) Vrai. $G'(x) = \frac{4x^2-2}{x}$. Pour $x \geqslant 1$, on a $4x^2 \geqslant 4 > 2$ et $x > 0$, donc $G'(x) > 0$: G est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

(e) Vrai. $G(e) = \left[2t^2 - 2\ln t\right]_1^e = (2e^2 - 2) - (2 - 0) = 2e^2 - 4$.

Ex. 12 ★★☆ **Pomper l'eau d'un parking à Albi**

(a) $F'(t) = -40e^{-0{,}5t} + (-40t - 120) \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = (-40 + 20t + 60)e^{-0{,}5t} = 20(t+1)e^{-0{,}5t} = d(t)$. Donc F est une primitive de d sur $[0\,;6]$.

(b) $\int_0^4 d(t)\,\mathrm{d}t = \left[(-40t-120)e^{-0{,}5t}\right]_0^4 = -280e^{-2} - (-120 \times e^0) = 120 - 280e^{-2} \approx 82{,}11$. En 4 heures, la pompe évacue environ 82,11 m³ d'eau.

(c) $\int_0^6 d(t)\,\mathrm{d}t = F(6) - F(0) = -360e^{-3} - (-120) = 120 - 360e^{-3} \approx 102{,}08$. Comme $102{,}08 > 100$, Yanis a raison : 6 heures suffisent pour vider le parking.

Ex. 13 ★★★ **Choisir la borne d'une intégrale**

(a) On pose $u(x) = x^2+1$. Alors $u'(x) = 2x$ et $u(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$. On a $f(x) = 2 \times \frac{2x}{x^2+1}$, donc $k = 2$. Une primitive de f est $F(x) = 2\ln(x^2+1)$. Vérification : $F'(x) = 2 \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4x}{x^2+1} = f(x)$.

(b) $I(a) = \left[2\ln(x^2+1)\right]_0^a = 2\ln(a^2+1) - (2\ln 1) = 2\ln(a^2+1)$, car $\ln 1 = 0$.

(c) $I(a) = 4 \iff 2\ln(a^2+1) = 4 \iff \ln(a^2+1) = 2 \iff a^2+1 = e^2 \iff a^2 = e^2 - 1$. Comme $a > 0$, on obtient $a = \sqrt{e^2-1} \approx 2{,}53$.

(d) Tom a tort : il calcule $f(1) - f(0)$ avec la fonction f. Or il faut calculer $F(1) - F(0)$ avec une primitive. Le bon calcul est $I(1) = \left[2\ln(x^2+1)\right]_0^1 = 2\ln 2 - (2\ln 1) = 2\ln 2 \approx 1{,}39$.

Ex. 14 ★★★ **Le départ d'Inès au vélodrome de Roubaix**

(a) Pour $t \geqslant 0$, on a $-2t \leqslant 0$, donc $e^{-2t} \leqslant 1$. Ainsi $12e^{-2t} \leqslant 12$, et $v(t) \geqslant 0$. Une primitive de e^{-2t} est $-\frac{1}{2}e^{-2t}$.
Donc $V(t) = 12t - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t} = 12t + 6e^{-2t}$.
Vérification : $V'(t) = 12 + 6 \times (-2)e^{-2t} = 12 - 12e^{-2t} = v(t)$.

(b) $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \left[12t + 6e^{-2t}\right]_0^5 = (60 + 6e^{-10}) - (0 + 6e^0)$. Attention : $e^0 = 1$, donc $V(0) = 6$ et non 0. On obtient $54 + 6e^{-10} \approx 54{,}00$. Inès parcourt environ 54,00 m pendant les 5 premières secondes.

(c) L'intégrale de 1 à 3 vaut $V(3) - V(1)$: c'est la borne du haut moins la borne du bas. Hugo a inversé les deux termes. Comme $v \geqslant 0$, la distance ne peut pas être négative. Le bon calcul est $\left[12t + 6e^{-2t}\right]_1^3 = (36 + 6e^{-6}) - (12 + 6e^{-2}) = 24 + 6e^{-6} - 6e^{-2} \approx 23{,}20$. Inès parcourt environ 23,20 m entre $t = 1$ et $t = 3$.

Ex. 14 (suite)

(d) $\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\left[12t + 6e^{-2t}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left((120 + 6e^{-20}) - (0 + 6)\right) = 11{,}4 + 0{,}6e^{-20} \approx 11{,}40$. Sur les 10 premières secondes, Inès roule en moyenne à environ 11,40 m/s.

3. *Linéarité, relation de Chasles, fonction de signe quelconque*

Ex. 15 ★☆☆ **Automatismes : Chasles et linéarité**

(a) Chasles : $\int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^3 f = 2 + (-5) = -3$.

(b) Bornes inversées : $\int_3^1 f = -\int_1^3 f = -(-5) = 5$.

(c) $\int_3^0 f = -\int_0^3 f = -(-3) = 3$.

(d) Linéarité : $2\int_0^3 f + 3\int_0^3 g = 2 \times (-3) + 3 \times 4 = 6$.

(e) Linéarité : $\int_0^3 f - 2\int_0^3 g + \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = -3 - 8 + 3 = -8$.

(f) Chasles : $\int_1^3 f + \int_3^0 f = \int_1^0 f = -\int_0^1 f = -2$.

Ex. 16 ★☆☆ **Automatismes : intégrales de signe quelconque**

(a) $\left[x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{2} = (8 - 8) - (-1 - 2) = 3$.

(b) $\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^0 = 0 - (2 + 2) = -4$.

(c) $\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = (8 - 8) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

(d) $\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$.

(e) $[-2\ln x]_1^e = -2\ln e + 2\ln 1 = -2$.

(f) $[e^x - 3x]_0^1 = (e - 3) - 1 = e - 4$.

Ex. 17 ★★☆ **Repérer l'erreur de Malo**

(a) Une primitive de g est $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$. $\int_0^4 g = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 24 = -\frac{8}{3}$. Le calcul de Malo est juste.

(b) $g(x) = x(x-3)$: sur $[0\,;3]$, $x \geqslant 0$ et $x - 3 \leqslant 0$, donc $g(x) \leqslant 0$; sur $[3\,;4]$, les deux facteurs sont positifs, donc $g(x) \geqslant 0$.

(c) g change de signe en 3 : l'intégrale sur $[0\,;4]$ est une aire algébrique, la partie au-dessus de l'axe compense une partie de celle du dessous. On ne peut pas prendre directement sa valeur absolue : il faut couper en 3.

(d) $\int_0^3 g = G(3) - G(0) = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}$ et $\int_3^4 g = G(4) - G(3) = -\frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{11}{6}$.

(e) Aire $= -\int_0^3 g + \int_3^4 g = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$. L'aire du domaine vaut $\frac{19}{3} \approx 6{,}33$ u.a., et non $\frac{8}{3}$.

Ex. 18 ★★☆ **Vrai ou faux : signe et règles de calcul**

(a) Faux. $h(x) \leqslant -1 < 0$ sur $[0\,;3]$ et $\int_0^3 h = \left[-\frac{x^3}{3} - x\right]_0^3 = -9 - 3 = -12$: une intégrale négative n'est pas une aire. L'aire vaut $-\int_0^3 h = 12$ u.a.

(b) Vrai. $x^2 + 2 > 0$ sur $[-1\,;2]$ et $-1 < 2$, donc $\int_{-1}^{2}(x^2+2)\,\mathrm{d}x > 0$. Inverser les bornes change le signe : $\int_2^{-1}(x^2+2)\,\mathrm{d}x < 0$ (elle vaut -9).

(c) Faux. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, alors que $\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \frac{1}{4}$. L'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

(d) Faux. Contre-exemple : $f(x) = x$. $\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, mais f n'est pas nulle : les parties au-dessus et au-dessous de l'axe se compensent.

(e) Vrai. Pour $x \in [1\,;2]$, $\ln x \geqslant \ln 1 = 0$ et $1 < 2$: par positivité de l'intégrale, $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Ex. 19 ★★☆ **Fonction définie par morceaux**

(a) $2 \times 3 - 4 = 2$ et $5 - 3 = 2$: f est continue en 3. $\int_0^3(2x-4)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - 4x\right]_0^3 = 9 - 12 = -3$ et $\int_3^5(5-x)\,\mathrm{d}x = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_3^5 = 12{,}5 - 10{,}5 = 2$.

(b) Chasles : $\int_0^5 f = -3 + 2 = -1$. Ce n'est pas l'aire de $\mathcal{D}$: une aire est positive, et f change de signe sur $[0\,;5]$.

(c) $2x - 4 \leqslant 0$ sur $[0\,;2]$, $f \geqslant 0$ sur $[2\,;5]$. $\int_0^2(2x-4)\,\mathrm{d}x = 4 - 8 = -4$; $\int_2^3(2x-4)\,\mathrm{d}x = -3 - (-4) = 1$. Aire $= 4 + 1 + 2 = 7$ u.a.

(d) 1 u.a. $= 2 \times 1 = 2$ cm², donc l'aire de $\mathcal{D}$ vaut $7 \times 2 = 14$ cm².

Ex. 20 ★★★ **Une vanne qui remplit et vide une citerne**

(a) $3(t-2)(t-4) = 3(t^2 - 6t + 8) = 3t^2 - 18t + 24 = d(t)$. C'est un trinôme de coefficient $3 > 0$ et de racines 2 et 4.

t	0		2		4		5
d(t)		+	0	−	0	+	

Donc $d(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$ et sur $[4\,;5]$: la citerne se remplit. Et $d(t) \leqslant 0$ sur $[2\,;4]$: elle se vide.

(b) Sur $[2\,;4]$, on a $d \leqslant 0$ et $2 < 4$, donc $\int_2^4 d(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$: entre 2 h et 4 h, la citerne perd de l'eau. Inverser les bornes change le signe : $\int_4^2 d(t)\,\mathrm{d}t = -\int_2^4 d(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ex. 20 **(suite)**

(c) Une primitive de d est $D(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. $\int_0^5 d(t)\,\mathrm{d}t = \left[t^3 - 9t^2 + 24t\right]_0^5 = D(5) - D(0) = (125 - 225 + 120) - 0 = 20$. Entre 0 h et 5 h, le volume augmente de 20 m³. La citerne contient donc $50 + 20 = 70$ m³ à $t = 5$.

(d) On coupe aux zéros de d avec la relation de Chasles. On a $D(0) = 0$, $D(2) = 20$, $D(4) = 16$ et $D(5) = 20$. Donc $\int_0^2 d = 20$, $\int_2^4 d = 16 - 20 = -4$ et $\int_4^5 d = 20 - 16 = 4$. Volume total : $20 + 4 + 4 = 28$ m³. Dans $\int_0^5 d$, les 4 m³ sortis se retranchent au lieu de s'ajouter : on trouve 20 et non 28. En résumé, 28 m³ d'eau sont passés par la vanne.

Ex. 21 ★★★ **Aire, linéarité et le produit de Léna**

(a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$. Sur $[1\,;4]$, on a $x > 0$: $f(x)$ a donc le signe de $x - 2$. Ainsi $f \leqslant 0$ sur $[1\,;2]$, $f \geqslant 0$ sur $[2\,;4]$, et $f(2) = 0$.

(b) $F'(x) = 1 - \frac{2}{x} = f(x)$: F est bien une primitive de f. $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [x - 2\ln x]_1^2 = (2 - 2\ln 2) - 1 = 1 - 2\ln 2 \approx -0{,}39$: ce résultat est négatif, ce qui est normal car $f \leqslant 0$ sur $[1\,;2]$. $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = (4 - 2\ln 4) - (2 - 2\ln 2) = 2 - 4\ln 2 + 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$.

(c) Par Chasles : $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = (1 - 2\ln 2) + (2 - 2\ln 2) = 3 - 4\ln 2 \approx 0{,}23$. Ce n'est pas l'aire, car f change de signe en 2. Aire $= -\int_1^2 f + \int_2^4 f = (2\ln 2 - 1) + (2 - 2\ln 2) = 1$ u.a. Une unité d'aire vaut $2 \times 3 = 6$ cm². L'aire du domaine vaut donc 1 u.a., soit 6 cm².

(d) Par linéarité : $\int_1^4 (3f(x) - 2x)\,\mathrm{d}x = 3\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^4 2x\,\mathrm{d}x$. Or $\int_1^4 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_1^4 = 16 - 1 = 15$. Résultat : $3(3 - 4\ln 2) - 15 = -6 - 12\ln 2 \approx -14{,}32$.

(e) $xf(x) = x - 2$, donc $\int_1^4 xf(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^4 = 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}$. De l'autre côté, $\int_1^4 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15}{2}$, et le produit vaut $\frac{15}{2}(3 - 4\ln 2) = \frac{45}{2} - 30\ln 2 \approx 1{,}71$. Comme $1{,}5 \neq 1{,}71$, Léna a tort : l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

4. *Positivité, encadrement et valeur moyenne*

Ex. 22 ★☆☆ **Valeurs moyennes en ligne**

(a) Une primitive sur $[1\,;9]$ est $F(x) = 2\sqrt{x}$. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 6 - 2 = 4$, donc $\mu = \frac{4}{9-1} = \frac{1}{2}$.

(b) Une primitive est $F(x) = 2x^2 + x$. $\int_1^4 (4x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 + x\right]_1^4 = 36 - 3 = 33$, donc $\mu = \frac{33}{4-1} = 11$. On divise par 3, pas par 4.

(c) Une primitive est $F(x) = x^3 - x^2$. $\int_2^5 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - x^2\right]_2^5 = 100 - 4 = 96$, donc $\mu = \frac{96}{5-2} = 32$.

(d) Une primitive est $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. $\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}$, donc $\mu = \frac{1}{2} \times \frac{e^4-1}{2} = \frac{e^4-1}{4}$.

(e) Une primitive sur $[1\,;e]$ est $F(x) = 2\ln x$. $\int_1^e \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = [2\ln x]_1^e = 2 - 0 = 2$, donc $\mu = \frac{2}{e-1}$.

Ex. 23 ★☆☆ **Encadrer ou donner un signe sans calculer**

(a) $x \mapsto e^{x^2}$ est croissante sur $[0\,;1]$, donc $e^0 = 1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^1 = e$. On multiplie par $b - a = 1$: $1 \leqslant I \leqslant e$.

(b) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est décroissante sur $[2\,;6]$, donc $\frac{1}{37} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$. On multiplie par $b - a = 4$: $\frac{4}{37} \leqslant I \leqslant \frac{4}{5}$.

(c) Sur $[1\,;5]$, on a $6 - x \geqslant 1 > 0$ et $e^x > 0$, donc $(6 - x)e^x \geqslant 0$. Comme $1 \leqslant 5$, la positivité donne $\int_1^5 (6 - x)e^x\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, c'est-à-dire $-J \geqslant 0$. Donc $J \leqslant 0$.

(d) $K = -\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. Or $\sqrt{x} \geqslant 0$ sur $[1\,;4]$ et $1 \leqslant 4$, donc $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Donc $K \leqslant 0$.

(e) Sur $[0\,;1]$, on a $x^3 = x \times x^2 \leqslant x^2$ car $0 \leqslant x \leqslant 1$. Par croissance de l'intégrale, $A \leqslant B$.

Ex. 24 ★★☆ **Vrai ou faux sur la positivité et la moyenne**

(a) Faux. Contre-exemple avec $f(x) = x$: $\int_{-1}^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geqslant 0$, mais $f(-1) = -1 < 0$. La réciproque de la positivité est fausse.

Ex. 24 (suite)

(b) Faux. $\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$, donc $\mu = \frac{4}{2-0} = 2 \neq 4$. La moyenne des valeurs extrêmes n'est pas la valeur moyenne.

(c) Vrai. On a $b-a = 3-1 = 2$, donc $2 \times 2 \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5 \times 2$, soit $4 \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$.

(d) Vrai. $\int_0^4 (6x+1)\,\mathrm{d}x = \left[3x^2+x\right]_0^4 = 52$, donc $\mu = \frac{52}{4} = 13$. Et $g(2) = 13$. Ce raccourci marche ici parce que g est affine.

(e) Faux. Sur $[0\,;5]$, $-1 \leqslant f \leqslant 3$, donc $-5 \leqslant \int_0^5 f \leqslant 15$. En divisant par 5, on obtient $-1 \leqslant \mu \leqslant 3$.
Donc $\mu \neq 4$.

Ex. 25 ★★☆ **Vitesse moyenne d'une cycliste : deux erreurs**

(a) Une primitive de v est $V(t) = -t^3 + 6t^2 + 20t$. $\int_1^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^3+6t^2+20t\right]_1^3 = 87 - 25 = 62$. La cycliste parcourt 62 km entre $t = 1$ h et $t = 3$ h.

(b) Noah divise par 3 (la borne b) : il obtiendrait $\frac{62}{3} \approx 20{,}67$ km/h. Il faut diviser par la longueur $b-a = 3-1 = 2$. Donc $\mu = \frac{62}{2} = 31$. La vitesse moyenne est de 31 km/h.

(c) Non. $v(1) = 29$ et $v(3) = 29$, donc $\frac{v(1)+v(3)}{2} = 29 \neq 31$. Ce raccourci ne vaut que pour une fonction affine, et v n'est pas affine.

(d) $v'(t) = -6t + 12$: elle est positive sur $[1\,;2]$ et négative sur $[2\,;3]$.
Donc v croît de 29 à $v(2) = 32$, puis décroît jusqu'à 29. Le minimum est 29, le maximum 32, et on a bien $29 \leqslant 31 \leqslant 32$.

Ex. 26 ★★☆ **Le café de Camille**

(a) $F'(t) = 20 - 700 \times (-0{,}1)e^{-0{,}1t} = 20 + 70e^{-0{,}1t} = T(t)$. Donc F est bien une primitive de T.

(b) $\int_0^{30} T(t)\,\mathrm{d}t = \left[20t - 700e^{-0{,}1t}\right]_0^{30} = (600 - 700e^{-3}) - (-700) = 1300 - 700e^{-3} \approx 1265{,}15$.

(c) $\mu = \frac{1}{30-0}\left(1300 - 700e^{-3}\right) = \frac{1300-700e^{-3}}{30} \approx 42{,}2$. La température moyenne du café sur les 30 premières minutes est d'environ 42,2 °C.

(d) $T \leqslant U$ sur $[0\,;30]$, donc, par croissance de l'intégrale, $\int_0^{30} T \leqslant \int_0^{30} U$. On divise par $30 > 0$: la température moyenne dans le mug isotherme est supérieure ou égale à 42,2 °C environ.

Ex. 27 ★★★ **Énergie consommée par un atelier à Rennes**

(a) On dérive le quotient : $P'(t) = \frac{6(t^2+4) - 6t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{6(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$. Le dénominateur est strictement positif, donc $P'(t)$ a le signe de $4 - t^2$: positif sur $[0\,;2]$, négatif sur $[2\,;6]$. Ainsi P croît sur $[0\,;2]$ puis décroît sur $[2\,;6]$.

t	0	2	6
P(t)	2	3,5	2,9

P croît de $P(0) = 2$ à $P(2) = 2 + \frac{12}{8} = 3{,}5$, puis décroît jusqu'à $P(6) = 2 + \frac{36}{40} = 2{,}9$.

(b) D'après le tableau, le minimum de P sur $[0\,;6]$ vaut 2 et son maximum 3,5, donc $2 \leqslant P(t) \leqslant 3{,}5$. Par croissance de l'intégrale, avec $b-a = 6-0 = 6$:
$2 \times 6 \leqslant E \leqslant 3{,}5 \times 6$, soit $12 \leqslant E \leqslant 21$.

(c) On a $\frac{6t}{t^2+4} = 3 \times \frac{2t}{t^2+4}$, de la forme $3\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = t^2 + 4 > 0$. Une primitive de P est donc $F(t) = 2t + 3\ln(t^2+4)$. $E = \left[2t + 3\ln(t^2+4)\right]_0^6 = (12 + 3\ln 40) - 3\ln 4 = 12 + 3\ln 10 \approx 18{,}91$. L'atelier consomme environ 18,91 kWh, ce qui est bien compris entre 12 et 21.

(d) $\mu = \frac{1}{6-0} \times E = \frac{12+3\ln 10}{6} = 2 + \frac{\ln 10}{2} \approx 3{,}15$. La puissance moyenne de l'atelier est d'environ 3,15 kW. C'est cohérent : μ est bien comprise entre le minimum 2 et le maximum 3,5 de P.

(e) Par linéarité : $\int_0^6 \big(P(t) - 3\big)\,\mathrm{d}t = E - 3 \times 6 = 3\ln 10 - 6 \approx 0{,}91$, donc cette intégrale est positive. Pourtant, $P(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$. Hugo a donc tort : une intégrale positive n'entraîne pas que la fonction soit positive sur tout l'intervalle (la réciproque de la positivité est fausse).

Ex. 28 ★★★ **Serre d'Avignon : comparer, calculer, interpréter**

(a) $T(t) - E(t) = -0{,}1t^2 + 2{,}4t + 6 - 0{,}5t - 6 = -0{,}1t^2 + 1{,}9t = 0{,}1t(19-t)$. Pour $t \in [6\,;18]$, on a $t > 0$ et $19 - t > 0$, donc $T(t) - E(t) \geqslant 0$, c'est-à-dire $T(t) \geqslant E(t)$.

(b) Comme $T \geqslant E$ sur $[6\,;18]$, la croissance de l'intégrale donne $I \geqslant \int_6^{18} E(t)\,\mathrm{d}t$. Or $\int_6^{18} (0{,}5t + 6)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{4} + 6t\right]_6^{18} = (81 + 108) - (9 + 36) = 144$.
Donc $I \geqslant 144$.

Ex. 28 **(suite)**

(c) Une primitive de T est $G(t) = -\frac{t^3}{30} + 1{,}2t^2 + 6t$. $I = \left[-\frac{t^3}{30} + 1{,}2t^2 + 6t\right]_6^{18} = (-194{,}4 + 388{,}8 + 108) - (-7{,}2 + 43{,}2 + 36) = 302{,}4 - 72 = 230{,}4$. On a bien $230{,}4 \geqslant 144$.

(d) $\mu = \frac{1}{18-6} \times I = \frac{230{,}4}{12} = 19{,}2$ (on divise par 12, pas par 18). La température moyenne de la serre entre 6 h et 18 h est de 19,2 °C.

(e) Par linéarité, $\int_6^{18} \big(T(t) - E(t)\big)\,\mathrm{d}t = I - \int_6^{18} E(t)\,\mathrm{d}t = 230{,}4 - 144 = 86{,}4$, donc $\frac{86{,}4}{12} = 7{,}2$. Entre 6 h et 18 h, la serre est en moyenne 7,2 °C plus chaude que l'extérieur.

5. *Aire entre deux courbes*

Ex. 29 ★☆☆ **Aire entre deux courbes, bornes données**

(a) $f(x) - g(x) = x^2 - x + 2$: $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif, donc $f(x) - g(x) > 0$ sur $[0\,;2]$. Aire $= \int_0^2 (x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 + 4 = \frac{14}{3}$ u.a.

(b) Sur $[0\,;1]$, $e^x > 0$ et $x \geqslant 0$, donc $f(x) - g(x) = e^x + x > 0$. Aire $= \int_0^1 (e^x + x)\,\mathrm{d}x = \left[e^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}$ u.a.

(c) Sur $[1\,;4]$, $x > 0$, donc $f(x) - g(x) = \frac{2}{x} > 0$. Aire $= \int_1^4 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = [2\ln x]_1^4 = 2\ln 4 - 2\ln 1 = 4\ln 2$ u.a.

(d) $f(x) - g(x) = 3 - x^2 \geqslant 0$ car $x^2 \leqslant 1$ sur $[-1\,;1]$. Aire $= \int_{-1}^1 (3 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$ u.a. La formule « haut moins bas » marche aussi sous l'axe.

Ex. 30 ★☆☆ **Points d'intersection, puis aire**

(a) $x^2 = 5x \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$. Sur $[0\,;5]$, $g(x) - f(x) = x(5-x) \geqslant 0$. Aire $= \int_0^5 (5x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$ u.a.

(b) $x^2 - 2x - 3 = 0$: $\Delta = 16$, donc $x = -1$ ou $x = 3$. Le trinôme $g(x) - f(x) = -x^2 + 2x + 3$ est positif entre ses racines. Aire $= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3}$ u.a.

Ex. 30 **(suite)**

(c) $x^3 = x \iff x(x-1)(x+1) = 0$; pour $x \geqslant 0$, on trouve $x = 0$ ou $x = 1$. Sur $[0\,;1]$, $g(x) - f(x) = x(1 - x^2) \geqslant 0$. Aire $= \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ u.a.

(d) $4 - x^2 = x^2 - 4 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$. Sur $[-2\,;2]$, $f(x) - g(x) = 8 - 2x^2 \geqslant 0$. Aire $= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3}$ u.a.

Ex. 31 ★★☆ **L'erreur de Malo : des courbes qui se croisent**

(a) $\int_0^2 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$. Ce nombre est négatif, donc ce n'est pas une aire.

(b) $x - x^2 = x(1-x)$: il est positif sur $[0\,;1]$ et négatif sur $[1\,;2]$. Les courbes se croisent en $x = 1$: $\mathcal{C}_g$ est au-dessus sur $[0\,;1]$, puis $\mathcal{C}_f$ est au-dessus sur $[1\,;2]$.

(c) Non. Aire $= \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ u.a. L'aire vaut 1 u.a. et non $\frac{2}{3}$: dans le calcul de Malo, les deux morceaux se compensaient.

(d) 1 u.a. $= 2 \times 3 = 6$ cm². L'aire du domaine vaut donc 6 cm².

Ex. 32 ★★☆ **Entre une courbe et sa tangente**

(a) $f(1) = 1$ et $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$. On obtient $T : y = 3(x-1) + 1$, soit $y = 3x - 2$.

(b) Pour tout réel x, $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$. Et $(x-1)^2(x+2) = (x^2 - 2x + 1)(x+2) = x^3 - 3x + 2$: les deux expressions sont égales. Sur $[0\,;1]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $x + 2 > 0$, donc $f(x) - (3x - 2) \geqslant 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T.

(c) Aire $= \int_0^1 (x^3 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$ u.a.

(d) 1 u.a. $= 4 \times 4 = 16$ cm², donc l'aire vaut $\frac{3}{4} \times 16 = 12$ cm².

Ex. 33 ★★☆ **Salaires à Rennes : courbe de Lorenz et indice de Gini**

(a) $L(0) = 0$ et $L(1) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$. De plus, $x - L(x) = 0{,}6x - 0{,}6x^2 = 0{,}6x(1-x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc $L(x) \leqslant x$.

Ex. 33 **(suite)**

(b) Aire $= \int_0^1 (0{,}6x - 0{,}6x^2)\,\mathrm{d}x = \left[0{,}3x^2 - 0{,}2x^3\right]_0^1 = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$ u.a.

(c) $G = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2$. Cet indice est proche de 0 : les salaires sont assez également répartis dans cette entreprise.

(d) Sur $[0\,;1]$, $x^3 \leqslant 1$, donc $x^4 \leqslant x$ et $x - x^4 \geqslant 0$.
Donc $G_2 = 2\displaystyle\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2 \times \frac{3}{10} = 0{,}6$. Comme $0{,}2 < 0{,}6$, l'entreprise de Rennes a la répartition la plus égalitaire.

Ex. 34 ★★★ **Le logo du club d'aviron de Mâcon**

(a) $f(x) - g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$. En développant, on obtient $(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$, donc $f(x) - g(x) = x(x-2)(x-4)$. On a $f(x) = g(x)$ pour $x = 0$, $x = 2$ ou $x = 4$. Comme $g(x) = x$, les points d'intersection sont $(0\,;0)$, $(2\,;2)$ et $(4\,;4)$.

(b) Sur $[0\,;4]$, on a $x \geqslant 0$ et $x - 4 \leqslant 0$. Le signe de $f(x) - g(x)$ est donc l'opposé du signe de $x - 2$. On a $f(x) - g(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D. On a $f(x) - g(x) \leqslant 0$ sur $[2\,;4]$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D. Les courbes se croisent donc à l'intérieur de l'intervalle.

(c) $g(x) - f(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x$, qui a pour primitive $x \mapsto -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2$.
Donc $\displaystyle\int_0^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_0^2 = (-4 + 16 - 16) - 0 = -4$. Une aire ne peut pas être négative. Sur $[0\,;2]$, c'est $\mathcal{C}_f$ qui est en haut, donc il fallait intégrer $f - g$. Cette partie du logo mesure 4 u.a.

(d) Les courbes se croisent en $x = 2$, donc on découpe avec la relation de Chasles : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$. La question précédente donne $\displaystyle\int_0^2 (f - g) = 4$. On a aussi $\displaystyle\int_2^4 (g - f) = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 = (-64 + 128 - 64) - (-4) = 4$.
Donc $\mathcal{A} = 4 + 4 = 8$ u.a. Comme 1 u.a. $= 2 \times 2 = 4$ cm², l'aire du logo est de $8 \times 4 = 32$ cm².

Ex. 35 ★★★ **Deux coopératives du Gers : laquelle est la plus égalitaire ?**

(a) $L_A(0) = \frac{e^0 - 1}{e - 1} = \frac{0}{e-1} = 0$ et $L_A(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1$. On a $L'_A(x) = \frac{e^x}{e-1}$. Or $e^x > 0$ et $e - 1 > 0$, donc $L'_A(x) > 0$: L_A est croissante sur $[0\,;1]$.

Ex. 35 **(suite)**

(b) $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e-1}$. On a $h'(x) \geqslant 0 \iff e^x \leqslant e - 1 \iff x \leqslant \ln(e-1)$, avec $\ln(e-1) \approx 0{,}54$.
Donc h est croissante sur $[0\,;\ln(e-1)]$, puis décroissante sur $[\ln(e-1)\,;1]$. Comme $h(0) = 0$ et $h(1) = 1 - 1 = 0$, h croît à partir de 0 puis redescend jusqu'à 0.
Donc $h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $L_A(x) \leqslant x$ sur $[0\,;1]$: la courbe de Lorenz est sous la droite d'équation $y = x$.

(c) D'après la question précédente, $x - L_A(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$. Une primitive de $x - \frac{e^x - 1}{e-1}$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{e^x - x}{e-1}$.
L'aire vaut $\displaystyle\int_0^1 \big(x - L_A(x)\big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x - x}{e-1}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(-\frac{1}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{2} = \frac{3-e}{2(e-1)}$ u.a.
Donc $G_A = 2 \times \frac{3-e}{2(e-1)} = \frac{3-e}{e-1} \approx 0{,}164$.

(d) $x - L_B(x) = 0{,}5x - 0{,}5x^2 = 0{,}5x(1-x)$. Sur $[0\,;1]$, on a $x \geqslant 0$ et $1 - x \geqslant 0$, donc $x - L_B(x) \geqslant 0$. L'aire vaut $\displaystyle\int_0^1 (0{,}5x - 0{,}5x^2)\,\mathrm{d}x = \left[0{,}25x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ u.a.
Donc $G_B = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. On a $G_A \approx 0{,}164 < G_B \approx 0{,}167$: la coopérative d'Auch a la répartition la plus égalitaire, même si l'écart est faible.

6. *Méthode des rectangles et algorithme*

Ex. 36 ★☆☆ **Le pas et les abscisses**

(a) $h = \frac{3-0}{6} = 0{,}5$.

(b) $h = \frac{1-(-1)}{8} = \frac{2}{8} = 0{,}25$.

(c) $n = \frac{b-a}{h} = \frac{5-2}{0{,}25} = 12$ rectangles.

(d) $h = 0{,}5$. À gauche : $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$ (4 abscisses, sans 2).

(e) À droite : 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2
(4 abscisses, sans 0, jusqu'à $b = 2$).

(f) $h = 0{,}1$. R_g contient $n = 10$ termes, de $k = 0$ à $k = 9$. La dernière abscisse est $x_9 = 1 + 9 \times 0{,}1 = 1{,}9$ (et non 2).

Ex. 37 ★☆☆ **Sommes de rectangles et encadrement**

(a) $h = \frac{2-0}{2} = 1$. $R_g = 1 \times \big(f(0) + f(1)\big) = 1 + 2 = 3$; $R_d = 1 \times \big(f(1) + f(2)\big) = 2 + 5 = 7$.

(b) $f'(x) = 2x \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$: f est croissante, donc $R_g \leqslant \int \leqslant R_d$, soit $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$.

Ex. 37 **(suite)**

(c) $h = 0{,}5$. $R_d = 0{,}5 \times \big(g(1{,}5) + g(2) + g(2{,}5) + g(3)\big) = 0{,}5 \times (7{,}75 + 6 + 3{,}75 + 1) = 0{,}5 \times 18{,}5 = 9{,}25$.

(d) R_g contient $g(1)$ au lieu de $g(3)$; les termes $g(1{,}5)$, $g(2)$, $g(2{,}5)$ sont communs.
Donc $R_g = R_d + 0{,}5 \times \big(g(1) - g(3)\big) = 9{,}25 + 0{,}5 \times (9 - 1) = 13{,}25$.

(e) $g'(x) = -2x < 0$ sur $[1\,;3]$: g est décroissante, donc $R_d \leqslant \int \leqslant R_g$, soit $9{,}25 \leqslant \displaystyle\int_1^3 (10 - x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant 13{,}25$.

(f) Amplitude $= \frac{(1-0)\,|e^1 - e^0|}{10} = \frac{e-1}{10} \approx 0{,}17$.

Ex. 38 ★★☆ **L'erreur de Léo**

(a) $f'(x) = -\frac{12}{(x+1)^2} < 0$ sur $[0\,;2]$: f est décroissante.

(b) Léo a additionné $n + 1 = 5$ valeurs : il a ajouté $f(2)$, qui n'appartient pas aux rectangles à gauche. On a $R_g = 0{,}5 \times (12 + 8 + 6 + 4{,}8) = 0{,}5 \times 30{,}8 = 15{,}4$.

(c) $R_d = 0{,}5 \times \big(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)\big) = 0{,}5 \times (8 + 6 + 4{,}8 + 4) = 0{,}5 \times 22{,}8 = 11{,}4$.

(d) Non : f étant décroissante, les rectangles à gauche dépassent au-dessus de la courbe, donc R_g majore l'intégrale. On a donc $11{,}4 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 15{,}4$.

(e) Une primitive de f est $F(x) = 12\ln(x+1)$ (forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x + 1 > 0$). $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [12\ln(x+1)]_0^2 = 12\ln 3 - 12\ln 1 = 12\ln 3 \approx 13{,}18$. On a bien $11{,}4 \leqslant 13{,}18 \leqslant 15{,}4$.

Ex. 39 ★★☆ **Le programme de Zoé à corriger**

(a) Il manque l'initialisation `s = 0`, à placer avant la boucle `for` (après le calcul de `h`) : sinon `s` n'a pas de valeur au premier passage.

(b) `range(n)` donne $k = 0, 1, \ldots, n-1$, donc les abscisses $a, a+h, \ldots, b-h$. Ce sont celles des rectangles à gauche : on obtient R_g (une fois la somme multipliée par h). Il y a bien n termes, mais ils sont décalés d'un pas. Pour R_d, il faut les abscisses $a+h, \ldots, b$: on écrit `for k in range(1, n + 1):`, ou bien on garde `range(n)` avec `f(a + (k + 1)*h)`. Attention : `range(n + 1)` donnerait $n+1$ termes, ce qui est faux.

(c) `s` est seulement la somme des hauteurs ; chaque rectangle a pour aire $h \times f(x_k)$, donc il faut écrire `return h*s`.

Ex. 39 **(suite)**

(d) On réécrit la fonction corrigée (questions précédentes), puis on définit `f` et on appelle la fonction avec $a = 1$, $b = 3$ et $n = 4$:

```
def rectangles_droite(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + f(a + k*h)
    return h*s

def f(x):
    return x**2

print(rectangles_droite(f, 1, 3, 4))
```

On passe la fonction `f` en argument par son nom, sans parenthèses, comme n'importe quelle autre valeur.

(e) $h = \frac{3-1}{4} = 0{,}5$. $R_d = 0{,}5 \times (1{,}5^2 + 2^2 + 2{,}5^2 + 3^2) = 0{,}5 \times (2{,}25 + 4 + 6{,}25 + 9) = 0{,}5 \times 21{,}5 = 10{,}75$.
Comme $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1\,;3]$, f est croissante : R_d est une valeur approchée par excès, donc $\displaystyle\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant 10{,}75$.

Ex. 40 ★★☆ **Distance d'une moto au démarrage**

(a) $v'(t) = -16 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = 8e^{-0{,}5t} > 0$: v est croissante sur $[0\,;4]$.

(b) $h = \frac{4-0}{4} = 1$.

k	t_k	v(t_k)
0	0	4
1	1	10,30
2	2	14,11
3	3	16,43
4	4	17,83

(c) $R_g = 1 \times (4 + 10{,}30 + 14{,}11 + 16{,}43) = 44{,}84$ et $R_d = 1 \times (10{,}30 + 14{,}11 + 16{,}43 + 17{,}83) = 58{,}67$. v est croissante, donc $R_g \leqslant \int \leqslant R_d$: la moto parcourt entre 44,84 m et 58,67 m environ.

(d) Amplitude $= \frac{(4-0)\,|v(4) - v(0)|}{4} = v(4) - v(0) = 16 - 16e^{-2} \approx 13{,}83$ m. On retrouve $R_d - R_g = 58{,}67 - 44{,}84 = 13{,}83$. L'amplitude est inversement proportionnelle à n : pour la diviser par 10, il faut $n = 40$ rectangles.

(e) $V'(t) = 20 + 32 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = 20 - 16e^{-0{,}5t} = v(t)$.
$\displaystyle\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \big[20t + 32e^{-0{,}5t}\big]_0^4 = (80 + 32e^{-2}) - 32 = 48 + 32e^{-2} \approx 52{,}33$. La moto parcourt environ 52,33 m, ce qui est bien dans l'encadrement.

Ex. 41 ★★★ **Exposition à un médicament : quelle précision ?**

(a) $C'(t) = 8 \times (-0{,}2)e^{-0{,}2t} = -1{,}6e^{-0{,}2t}$. Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $C'(t) < 0$: C est décroissante sur $[0\,;8]$. Pour une fonction décroissante, les rectangles à droite restent sous la courbe. C'est donc R_d qui minore I : $R_d \leqslant I \leqslant R_g$.

(b) $h = \frac{8-0}{4} = 2$. À gauche, on prend $t = 0, 2, 4, 6$: $R_g = 2 \times 8\left(1 + e^{-0{,}4} + e^{-0{,}8} + e^{-1{,}2}\right) \approx 38{,}73$. À droite, on prend $t = 2, 4, 6, 8$: $R_d = 16\left(e^{-0{,}4} + e^{-0{,}8} + e^{-1{,}2} + e^{-1{,}6}\right) \approx 25{,}96$. Comme C est décroissante : $25{,}96 \leqslant I \leqslant 38{,}73$.

(c) $h = \frac{8}{n}$. R_g utilise $C(0), C(h), \ldots, C(8-h)$ et R_d utilise $C(h), \ldots, C(8)$: les termes $C(h), \ldots, C(8-h)$ sont communs. Il reste $R_g - R_d = h\big(C(0) - C(8)\big) = \frac{8}{n}\left(8 - 8e^{-1{,}6}\right) = \frac{64\left(1-e^{-1{,}6}\right)}{n} \approx \frac{51{,}08}{n}$.

(d) On résout $\frac{64(1-e^{-1{,}6})}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 640\left(1 - e^{-1{,}6}\right) \approx 510{,}79$. Comme n est un entier, il faut au moins 511 rectangles pour que l'amplitude soit au plus 0,1.

(e) Une primitive de C est $F(t) = 8 \times \frac{e^{-0{,}2t}}{-0{,}2} = -40e^{-0{,}2t}$. Alors $I = \left[-40e^{-0{,}2t}\right]_0^8 = -40e^{-1{,}6} + 40 = 40 - 40e^{-1{,}6} \approx 31{,}92$. On a bien $25{,}96 \leqslant 31{,}92 \leqslant 38{,}73$. L'exposition vaut environ 31,92 mg·h/L.

Ex. 42 ★★★ **Le programme de Mathis passé au crible**

(a) $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$, donc f est croissante sur cet intervalle. Pour une fonction croissante, les rectangles à gauche restent sous la courbe et ceux à droite passent au-dessus.

Donc $R_g \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_d$.

(b) Ici $h = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$. Avec `range(5)`, k prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$: cela fait 5 termes, de $f(0)$ jusqu'à $f(2)$. La fonction renvoie $0{,}5 \times (1 + 1{,}125 + 2 + 4{,}375 + 9) = 0{,}5 \times 17{,}5 = 8{,}75$. Cela revient à additionner $n + 1 = 5$ rectangles, qui couvrent une largeur totale de 2,5 et non de 2. Ce n'est donc ni R_g (qui ne prend pas $f(2)$) ni R_d (qui ne prend pas $f(0)$).

(c) Pour R_g, on remplace la ligne de la boucle par `for k in range(n):`. On obtient alors $k = 0, \ldots, n-1$, donc les hauteurs $f(a), \ldots, f(b-h)$. Pour R_d, on garde `range(n)` et on écrit `s = s + h*f(x + h)`. Les hauteurs deviennent alors $f(a+h), \ldots, f(b)$.

Ex. 42 **(suite)**

(d) Faux. Par factorisation, $hf(x_0) + hf(x_1) + \cdots + hf(x_{n-1}) = h\big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$. Multiplier par h à chaque tour ou une seule fois à la fin donne la même somme. L'erreur de Mathis se trouve dans le nombre de termes, pas dans la multiplication par h.

(e) À gauche : $R_g = 0{,}5 \times \big(f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)\big) = 0{,}5 \times (1 + 1{,}125 + 2 + 4{,}375) = 4{,}25$. À droite : $R_d = 0{,}5 \times (1{,}125 + 2 + 4{,}375 + 9) = 8{,}25$. Une primitive de f est $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$, d'où $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^2 = (4 + 2) - 0 = 6$. On a bien $4{,}25 \leqslant 6 \leqslant 8{,}25$, comme prévu pour une fonction croissante.