Calcul d'intégrales – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Calcul intégral · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

Durée : environ 1 h. *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

Les pièges de cette fiche

- $F(b) - F(a)$: on écrit $F(a)$ entre parenthèses, surtout quand a est négatif.
- Bornes dans l'ordre inverse : $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.
- Une primitive de e^{kx} est $\dfrac{1}{k}e^{kx}$, et non ke^{kx} (ça, c'est la dérivée).
- Valeur moyenne : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$; ni la moyenne de $f(a)$ et $f(b)$, ni l'oubli de $\dfrac{1}{b-a}$.
- Une intégrale n'est une aire que si $f \geqslant 0$: sous l'axe, l'intégrale est négative.
- Si $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$; mais une intégrale positive ne prouve pas que f est positive.

Exercice 1 – Intégrale d'un polynôme ★

Calcule chaque intégrale à l'aide d'une primitive. Écris le crochet, puis $F(b) - F(a)$.

a) $\displaystyle\int_0^2 3x^2 \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^3 (2x+1) \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(x^2 - 4x\right) \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^3 - 6x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-2}^0 \left(x^3 + 3\right) \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^{2{,}5} 5 \,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_2^0 x \,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^5 + 3x^2\right) \mathrm{d}x$

Exercice 2 – Exponentielle, inverse, racine, trigonométrie ★

Calcule chaque intégrale (valeur exacte).

a) $\displaystyle\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^{2x} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 3e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 – Intégrale et aire d'une figure ★

Calcule chaque intégrale **sans primitive**, à l'aide d'une aire (rectangle, triangle, trapèze, disque). Fais un petit schéma.

a) $\displaystyle\int_{-1}^3 2{,}5\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)\,\mathrm{d}x$

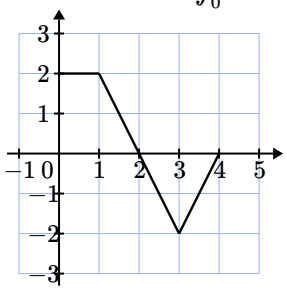
c) $\displaystyle\int_1^4 2x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^6 (-0{,}5x+3)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^2 (x-2)\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^3 x\,\mathrm{d}x$

g) La courbe de f, continue sur $[0\,;\,4]$, est la ligne brisée qui joint les points $(0\,;\,2)$, $(1\,;\,2)$, $(3\,;\,-2)$ et $(4\,;\,0)$ (figure). Calcule $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.



h) $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4 – Reconnaître une forme composée ★★

Reconnais la forme $u'e^u$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'u^n$ (au besoin avec un facteur), puis calcule l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^3 \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5 – Linéarité et relation de Chasles ★★

f et g sont continues sur $[0\,;\,5]$, avec $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ et $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Calcule :

a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^2 (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^2 (f(x) + x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_2^5 (4f(x) + 1)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 – Valeur moyenne ★★

Calcule la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle donné (valeur exacte).

a) $f(x) = x^2$ sur $[0\,;\,3]$

b) $f(x) = 2x + 1$ sur $[1\,;\,4]$

c) $f(x) = e^x$ sur $[0\,;\,\ln(3)]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\,e^2]$

e) $f(x) = \sin(x)$ sur $[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}]$

Exercice 7 – Encadrer une intégrale ★★★

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 x e^x\,\mathrm{d}x$. On ne cherche pas à les calculer.

1. Justifie que $I \geqslant 0$.
2. Montre que, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x^2 \leqslant x^2 e^x \leqslant e x^2$.
3. Déduis-en un encadrement de I. Donne une valeur approchée à $0{,}01$ près de la borne supérieure.
4. Compare I et J sans les calculer.

Exercice 8 – La température d'une journée ★★★

Entre 6 h et 18 h, la température d'une ville, en °C, est $T(t) = -0{,}5t^2 + 6t + 10$, où $t \in [0\,;\,12]$ est le nombre d'heures écoulées depuis 6 h.

1. Calcule la température moyenne entre 6 h et 18 h.
2. Un élève répond « $\dfrac{T(0) + T(12)}{2}$ ». Calcule ce nombre et explique pourquoi il ne convient pas.
3. Calcule la température moyenne entre 6 h et 10 h, arrondie au dixième.

Exercice 9 – Deux intégrales liées ★★★

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Calcule $I + J$.
2. Calcule I.
3. Déduis-en J, sans chercher de primitive de $\dfrac{1}{e^x+1}$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

b) Valeur moyenne de $x \mapsto x^3$ sur $[0\,;\,2]$: « $\displaystyle\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$ ».

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[3e^{3x}\right]_0^1 = 3e^3 - 3$

d) $\displaystyle\int_0^2 f = 5$ et $\displaystyle\int_1^2 f = 3$: « $\displaystyle\int_0^1 f = 5 + 3 = 8$ ».

e) « $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0$, donc l'aire entre la courbe de $x \mapsto x^3$ et l'axe des abscisses sur $[-1\,;\,1]$ est nulle ».

f) $\displaystyle\int_2^0 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = 4$

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. $\displaystyle\int_0^1 (6x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$ vaut :
   A 14 **B** 8 **C** 3 **D** 2
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{0{,}5x}\,\mathrm{d}x$ vaut :
   A $2e - 2$ **B** $0{,}5e - 0{,}5$ **C** $e - 1$ **D** e
3. La valeur moyenne de $x \mapsto 3x^2$ sur $[0\,;\,2]$ est :
   A 8 **B** 6 **C** 3 **D** 4
4. $\displaystyle\int_1^4 f = 6$ et $\displaystyle\int_1^4 g = -2$. Alors $\displaystyle\int_1^4 (f - 3g)$ vaut :
   A 0 **B** 12 **C** 4 **D** 8
5. $\displaystyle\int_3^1 2\,\mathrm{d}x$ vaut :
   A 4 **B** 2 **C** -2 **D** -4
6. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ vaut :
   A 3 **B** $e^3 - 1$ **C** $1 - e^{-3}$ **D** $3e^3$

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).