Corrigé – Calcul d'intégrales

Mathématiques – Terminale spécialité

Calcul intégral · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Intégrale d'un polynôme ★

Calcule chaque intégrale à l'aide d'une primitive. Écris le crochet, puis $F(b) - F(a)$.

a) Une primitive de $x \mapsto 3x^2$ est $F(x) = x^3$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 3x^2 \,\mathrm{d}x &= \big[x^3\big]_0^2 \\ &= 2^3 - 0^3 \\ &= 8\end{aligned}$$

b) Une primitive de $x \mapsto 2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x &= \big[x^2 + x\big]_1^3 \\ &= \big(3^2 + 3\big) - \big(1^2 + 1\big) \\ &= 12 - 2 \\ &= 10\end{aligned}$$

c) Une primitive de $x \mapsto x^2 - 4x$ est $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left(x^2 - 4x\right)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2\times(-1)^2\right) \\ &= -\frac{16}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= -3\end{aligned}$$

$(-1)^3 = -1$: la parenthèse autour de $F(-1)$ évite l'erreur de signe.

d) Une primitive de $x \mapsto 4x^3 - 6x^2 + 1$ est $F(x) = x^4 - 2x^3 + x$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(4x^3 - 6x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x &= \big[x^4 - 2x^3 + x\big]_0^1 \\ &= (1 - 2 + 1) - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

e) Une primitive de $x \mapsto x^3 + 3$ est $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 3x$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \left(x^3 + 3\right)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4} + 3x\right]_{-2}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + 3\times(-2)\right) \\ &= 0 - (4 - 6) \\ &= 2\end{aligned}$$

f) Une primitive de $x \mapsto 5$ est $F(x) = 5x$.

$$\begin{aligned}\int_1^{2,5} 5\,\mathrm{d}x &= [5x]_1^{2,5} \\ &= 5 \times 2{,}5 - 5 \times 1 \\ &= 7{,}5\end{aligned}$$

g) Une primitive de $x \mapsto x$ est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_2^0 x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^0 \\ &= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

Les bornes sont dans l'ordre inverse : le résultat est négatif.

h) Une primitive de $x \mapsto x^5 + 3x^2$ est $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + x^3$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(x^5 + 3x^2\right)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^6}{6} + x^3\right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1}{6} + 1\right) - \left(\frac{1}{6} - 1\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Exercice 2 – Exponentielle, inverse, racine, trigonométrie ★

Calcule chaque intégrale (valeur exacte).

a) Une primitive de $x \mapsto e^x$ est $F(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x &= [e^x]_0^1 \\ &= e^1 - e^0 \\ &= e - 1\end{aligned}$$

b) Sur $[1\,;\,e]$, $x > 0$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $F(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_1^e \\ &= \ln(e) - \ln(1) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

c) *Primitive de e^{2x} : $\dfrac{1}{2}e^{2x}$ (on divise par 2).*
Une primitive de $x \mapsto e^{2x}$ est $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln(2)} \\ &= \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} - \frac{1}{2}e^0 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(car $e^{2\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 = 4$)

d) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $F(x) = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 \\ &= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} \\ &= 4 - 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

e) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $F(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

f) Une primitive de $x \mapsto \sin(x)$ est $F(x) = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

g) Une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $F(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

h) *Primitive de e^{-x} : $-e^{-x}$.*
Une primitive de $x \mapsto 3e^{-x}$ est $F(x) = -3e^{-x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 3e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-3e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -3e^{-1} - \left(-3e^0\right) \\ &= 3 - \frac{3}{e}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Intégrale et aire d'une figure ★

Calcule chaque intégrale **sans primitive**, à l'aide d'une aire (rectangle, triangle, trapèze, disque). Fais un petit schéma.

a) $x \mapsto 2{,}5$ est positive : l'intégrale est l'aire d'un rectangle de largeur $3-(-1)=4$ et de hauteur $2{,}5$.
$4 \times 2{,}5 = 10$.

b) Sur $[-1\,;\,3]$, $x+1 \geqslant 0$.
Le domaine est un triangle : base 4 (de -1 à 3), hauteur $3+1=4$.
Aire $= \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$.

c) Sur $[1\,;\,4]$, $2x > 0$.
Trapèze de bases $f(1)=2$ et $f(4)=8$, de hauteur 3.
Aire $= \dfrac{(2+8) \times 3}{2} = 15$.

d) La droite passe par $(0\,;\,3)$ et $(6\,;\,0)$: triangle de base 6 et de hauteur 3.
Aire $= \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$.

e) Sur $[0\,;\,2]$, $x-2 \leqslant 0$: le domaine est **sous** l'axe.
Triangle de base 2, de hauteur 2, d'aire 2.
L'intégrale est l'opposé de l'aire : -2.

f) x change de signe en 0 : on découpe avec Chasles.
Sur $[-1\,;\,0]$: triangle sous l'axe d'aire $\dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$, compté $-\dfrac{1}{2}$.
Sur $[0\,;\,3]$: triangle d'aire $\dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{9}{2}$.
Total : $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{2} = 4$.

g) La ligne coupe l'axe des abscisses en $x=2$.
On découpe avec Chasles ; une aire sous l'axe est comptée négativement.
Sur $[0\,;\,1]$: rectangle $1 \times 2 = 2$.
Sur $[1\,;\,2]$: triangle au-dessus de l'axe, $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.
Sur $[2\,;\,3]$: triangle sous l'axe, d'aire $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$, compté -1.
Sur $[3\,;\,4]$: triangle sous l'axe, d'aire $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$, compté -1.
$\displaystyle\int_0^4 f = 2 + 1 - 1 - 1 = 1$.

h) $y = \sqrt{4-x^2}$, avec $y \geqslant 0$, donne $x^2 + y^2 = 4$: c'est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2.
Aire du demi-disque : $\dfrac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi$.

Exercice 4 – Reconnaître une forme composée ★★

Reconnais la forme $u'e^u$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'u^n$ (au besoin avec un facteur), puis calcule l'intégrale.

a) Forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$.
Une primitive de $x \mapsto 2xe^{x^2}$ est $F(x) = e^{x^2}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[e^{x^2}\right]_0^1 \\ &= e^1 - e^0 \\ &= e - 1\end{aligned}$$

b) Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

c) $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$: $(2x-1)^3 = \dfrac{1}{2} \times u'u^3$, de primitive $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u^4}{4} = \dfrac{u^4}{8}$.
Une primitive de $x \mapsto (2x-1)^3$ est $F(x) = \dfrac{(2x-1)^4}{8}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x-1)^3\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(2x-1)^4}{8}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^4}{8} - \frac{(-1)^4}{8} \\ &= 0\end{aligned}$$

d) Sur $[0\,;\,2]$, $2x + 1 > 0$.
Avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$: $\dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ est $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln(5)\end{aligned}$$

e) $u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$: $\dfrac{\ln(x)}{x} = u'u$, de primitive $\dfrac{u^2}{2}$.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(e)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(1)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 5 – Linéarité et relation de Chasles ★★

f et g sont continues sur $[0\,;\,5]$, avec $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ et $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Calcule :

a) Relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$
$= 3 + (-1) = 2$

b) Linéarité : $\displaystyle\int_0^2 (2f(x) - 3g(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$
$= 2 \times 3 - 3 \times 4 = -6$

c) Bornes inversées : $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -(-1) = 1$.

d) Linéarité : $\displaystyle\int_0^2 (f(x) + x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.
$\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$, donc le résultat vaut $3 + 2 = 5$.

e) Linéarité : $\displaystyle\int_2^5 (4f(x) + 1)\,\mathrm{d}x = 4\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^5 1\,\mathrm{d}x$
$= 4 \times (-1) + (5 - 2) = -1$

Exercice 6 – Valeur moyenne ★★

Calcule la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle donné (valeur exacte).

a) $\mu = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$
$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3$
$= \dfrac{1}{3} \times (9 - 0)$
$= 3$

b) $\mu = \dfrac{1}{4-1}\displaystyle\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$
$= \dfrac{1}{3}\left[x^2 + x\right]_1^4$
$= \dfrac{1}{3} \times ((16 + 4) - (1 + 1))$
$= \dfrac{18}{3}$
$= 6$

c) $\mu = \dfrac{1}{\ln(3) - 0}\displaystyle\int_0^{\ln(3)} e^x\,\mathrm{d}x$
$= \dfrac{1}{\ln(3)}\left[e^x\right]_0^{\ln(3)}$
$= \dfrac{1}{\ln(3)} \times \left(e^{\ln(3)} - e^0\right)$
$= \dfrac{1}{\ln(3)} \times (3 - 1)$
$= \dfrac{2}{\ln(3)}$

d) Sur $[1\,;\,e^2]$, $x > 0$.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{e^2-1}\left[\ln(x)\right]_1^{e^2}\\ &= \frac{1}{e^2-1}\times\left(\ln\left(e^2\right)-\ln(1)\right)\\ &= \frac{2}{e^2-1}\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2}{\pi}\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\times(0+1)\\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

Exercice 7 – Encadrer une intégrale ★★★

1. Sur $[0\,;\,1]$, $x^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$, donc $x^2e^x \geqslant 0$.
   La fonction est continue, positive, et $0 \leqslant 1$: par positivité de l'intégrale, $I \geqslant 0$.

2. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, la fonction exponentielle est croissante : $e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$, soit $1 \leqslant e^x \leqslant e$.
   On multiplie par $x^2 \geqslant 0$ (le sens ne change pas) : $x^2 \leqslant x^2e^x \leqslant ex^2$.

3. Les trois fonctions sont continues et $0 \leqslant 1$: on intègre l'encadrement (comparaison).
   $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant I \leqslant e\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, avec $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
   Donc $\dfrac{1}{3} \leqslant I \leqslant \dfrac{e}{3}$, avec $\dfrac{e}{3} \approx 0{,}91$.

4. Sur $[0\,;\,1]$, $x^2 \leqslant x$ (car $x^2 - x = x(x-1) \leqslant 0$), et $e^x > 0$: $x^2e^x \leqslant xe^x$.
   On intègre sur $[0\,;\,1]$ (bornes dans l'ordre croissant) : $I \leqslant J$.

Exercice 8 – La température d'une journée ★★★

1. Une primitive de T est $G(t) = -\dfrac{t^3}{6} + 3t^2 + 10t$.
   $$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{12-0}\int_0^{12}T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\left(G(12)-G(0)\right)\\ &= \frac{1}{12}(-288+432+120-0) = \frac{264}{12} = 22\end{aligned}$$
   La température moyenne est 22 °C.

2. $T(0) = 10$ et $T(12) = -72 + 72 + 10 = 10$, donc $\dfrac{T(0)+T(12)}{2} = 10$.
   La valeur moyenne n'est pas la moyenne des valeurs aux bornes : elle tient compte de toutes les températures de la journée, qui montent jusqu'à 28 °C à midi.

3. $\mu' = \dfrac{1}{4}\left(G(4) - G(0)\right) = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{64}{6} + 48 + 40\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{232}{3} = \dfrac{58}{3}$.
   $\dfrac{58}{3} \approx 19{,}3$ °C.

Exercice 9 – Deux intégrales liées ★★★

1. Par linéarité, $I + J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$.

2. Avec $u(x) = e^x + 1 > 0$, $u'(x) = e^x$: $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{u'}{u}$, de primitive $\ln(e^x + 1)$.
   $I = \left[\ln(e^x + 1)\right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$.

3. $J = 1 - I = 1 - \ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $F(-1) = \dfrac{(-1)^3}{3} = -\dfrac{1}{3}$ *: sans parenthèses, le signe s'est perdu.*
$\dfrac{8}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{9}{3} = 3$.

b) *Il manque le facteur* $\dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{2}$.
$\mu = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$.

c) $3e^{3x}$ *est la dérivée de* e^{3x}*, pas une primitive.*
Une primitive est $\dfrac{1}{3}e^{3x}$: l'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}e^3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{e^3 - 1}{3}$.

d) *Chasles :* $\displaystyle\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f$ *; on retranche, on n'ajoute pas.*
$\displaystyle\int_0^1 f = 5 - 3 = 2$.

e) x^3 *est négatif sur* $[-1\,;\,0]$ *: l'intégrale n'y est pas une aire.*
Aire $= \displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ u.a.

f) *Les bornes ont été remises dans l'ordre sans changer le signe.*
$\displaystyle\int_2^0 (x+1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = -4$.

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. $\displaystyle\int_0^1 (6x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

Réponse C : 3
$\left[2x^3 + x^2\right]_0^1 = 2 + 1 - 0 = 3$.

2. $\displaystyle\int_0^2 e^{0,5x}\,\mathrm{d}x$ vaut :

Réponse A : $2e-2$

Une primitive de $e^{0,5x}$ est $\dfrac{1}{0,5}e^{0,5x} = 2e^{0,5x}$: $2e^1 - 2e^0 = 2e - 2$.

3. La valeur moyenne de $x \mapsto 3x^2$ sur $[0\,;\,2]$ est :

Réponse D : 4

$\dfrac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2 = \dfrac{8}{2} = 4$; 6 est la moyenne de $f(0)$ et $f(2)$, 3 est l'image du milieu.

4. $\displaystyle\int_1^4 f = 6$ et $\displaystyle\int_1^4 g = -2$. Alors $\displaystyle\int_1^4 (f - 3g)$ vaut :

Réponse B : 12

Linéarité : $6 - 3 \times (-2) = 6 + 6 = 12$.

5. $\displaystyle\int_3^1 2\,\mathrm{d}x$ vaut :

Réponse D : -4

Bornes dans l'ordre inverse : $-\displaystyle\int_1^3 2\,\mathrm{d}x = -2 \times 2 = -4$.

6. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ vaut :

Réponse A : 3

$[\ln(x)]_1^{e^3} = \ln(e^3) - \ln(1) = 3$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).