# Aires, intégration par parties – exercices

Mathématiques – Terminale spécialité

Intégrales · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Nom : _____ Date : _____

***Durée : environ 1 h.*** *Calculatrice interdite, sauf mention contraire. Les exercices vont de ★ (automatismes) à ★★★ (niveau d'un contrôle exigeant). Fais les séries dans l'ordre ; si une série ★ est réussie sans erreur, passe à la suite. Corrige-toi avec le corrigé, puis refais chaque calcul faux sans regarder.*

**Les pièges de cette fiche**

- L'aire n'est $\displaystyle\int_a^b f$ que si $f \geqslant 0$ ; sinon on découpe aux points où $f$ s'annule, et on change le signe sous l'axe.
- Aire entre deux courbes : $\displaystyle\int_a^b (\text{haut} - \text{bas})$ ; on étudie le signe de $f - g$, car les courbes peuvent se croiser.
- Par parties : $\displaystyle\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$, avec un signe « $-$ » devant l'intégrale restante.
- On prend pour $u$ ce qui se simplifie en dérivant (polynôme, ln) : on ne sait pas primitiver ln « à vue ».
- Le crochet $\big[uv\big]_a^b$ s'évalue aux deux bornes : $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
- Sur $[0\,;\,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ : les puissances diminuent quand $n$ augmente.

## Exercice 1 – Aire sous une courbe ★

Calcule l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites verticales aux bornes. Étudie d'abord le signe de $f$. Dans le dernier calcul, l'unité graphique est 2 cm sur chaque axe : donne aussi l'aire en cm².

a) $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0\,;\,3]$

b) $f(x) = e^x$ sur $[-1\,;\,1]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\,5]$

d) $f(x) = 4 - x^2$ sur $[-2\,;\,2]$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,9]$

f) $f(x) = x^3$ sur $[-1\,;\,2]$

g) $f(x) = x^2 - 4$ sur $[0\,;\,2]$

h) $f(x) = e^{-x}$ sur $[0\,;\,\ln(4)]$

## Exercice 2 – Choisir $u$ et $v'$ ★

Pour intégrer $f$ par parties, choisis $u(x)$ et $v'(x)$ tels que $f = uv'$, puis donne $u'(x)$ et $v(x)$.

a) $f(x) = xe^{3x}$

b) $f(x) = (x + 2)\cos(x)$

c) $f(x) = \ln(2x)$

d) $f(x) = x^2 \ln(x)$

e) $f(x) = (2x + 1)\,e^{-x}$

f) $f(x) = x \sin(2x)$

g) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

### **Exercice 3** – Intégrer par parties ★

Calcule chaque intégrale à l'aide d'une intégration par parties (valeur exacte).

a) $\displaystyle\int_0^2 xe^x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x) \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)\,e^x \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x) \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x) \,\mathrm{d}x$

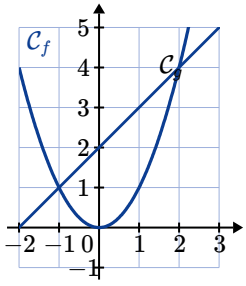
g) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)\,e^x \,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,e^{2x} \,\mathrm{d}x$

### **Exercice 4** – Aire entre deux courbes ★★

Étudie la position relative des courbes de $f$ et $g$ sur l'intervalle, puis calcule l'aire du domaine compris entre elles.

a) $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ sur $[-1\,;\,2]$




b) $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$ sur $[0\,;\,1]$

c) $f(x) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\,e]$

d) $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$ sur $[0\,;\,1]$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$ sur $[0\,;\,1]$

### **Exercice 5** – Par parties : calculs plus longs ★★

Calcule chaque intégrale. Il faut parfois intégrer par parties deux fois.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x} \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x) \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2 \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

### **Exercice 6** – Une primitive par parties ★★

Détermine, par une intégration par parties, une primitive de $f$ sur l'intervalle donné. Vérifie en dérivant.

a) $f(x) = \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = xe^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

d) $f(x) = (x+1)\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

### **Exercice 7** – Une suite d'intégrales ★★★

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$.

1. Calcule $I_0$. À l'aide d'une intégration par parties, montre que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
2. Déduis-en $I_1$ et $I_2$.
3. Étudie le sens de variation de la suite $(I_n)$.
4. Montre que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$, puis déduis-en la limite de $(I_n)$.

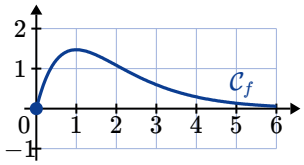
### **Exercice 8** – Encadrer pour trouver la limite ★★★

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calcule $u_0$. Montre que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, puis déduis-en $u_1$.
2. Montre que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. Montre que $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de $(u_n)$ ?

### **Exercice 9** – Une aire qui reste finie (calculatrice autorisée) ★★★

Soit $f(x) = 4xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$, de courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre. Pour $\lambda > 0$, $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire, en u.a., du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.




1. Justifie que $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda 4xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, puis calcule cette intégrale par parties.
2. Calcule $\mathcal{A}(3)$, valeur exacte puis arrondi au centième.
3. Détermine la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$. Interprète.

### **Exercice 10** – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x = \big[(x+2)e^x\big]_0^1 + \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = (3e-2) + (e-1) = 4e-3$

b) Pour $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ : « $u(x) = x$ et $v'(x) = \ln(x)$, donc $v(x) = \dfrac{1}{x}$ ».

c) Aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0\,;\,2]$ : « $\displaystyle\int_0^2 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$ u.a. ».

d) Aire entre la courbe de $x \mapsto x^2 - 1$ et l'axe des abscisses sur $[0\,;\,1]$ : « $\left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\dfrac{2}{3}$ u.a. ».

e) $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ : « $x^{n+1} \geqslant x^n$, donc $(I_n)$ est croissante ».

f) Une aire vaut 3 u.a., avec une unité de 2 cm en abscisse et de 3 cm en ordonnée : « elle mesure $3 \times 2 = 6$ cm² ».

## **QCM** – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question. Note ta réponse, puis vérifie dans le corrigé.

1. L'aire sous la courbe de $x \mapsto 3x^2$ entre $x = 1$ et $x = 2$ vaut :

   **A** 8 u.a. **B** 12 u.a. **C** 7 u.a. **D** 3 u.a.

2. Par parties, $\displaystyle\int_0^1 xe^{4x}\,\mathrm{d}x$ vaut :

   **A** $\dfrac{3e^4+1}{16}$ **B** $\dfrac{5e^4-1}{16}$ **C** $\dfrac{e^4}{4}$ **D** $\dfrac{e^4-1}{16}$

3. Pour $\displaystyle\int_1^e x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$, on choisit :

   **A** $u = x^3$, $v' = \ln(x)$ **B** $u = x^3\ln(x)$, $v' = 1$ **C** on ne peut pas intégrer par parties
   **D** $u = \ln(x)$, $v' = x^3$

4. L'aire entre la droite $y = 1$ et la parabole $y = x^2$ sur $[-1\,;\,1]$ vaut :

   **A** $\dfrac{2}{3}$ u.a. **B** $\dfrac{4}{3}$ u.a. **C** 2 u.a. **D** 0 u.a.

5. La suite $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est :

   **A** croissante **B** constante **C** ni croissante, ni décroissante **D** décroissante

6. La limite de $K_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est :

   **A** 0 **B** 1 **C** $\dfrac{1}{e}$ **D** $+\infty$

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*