Corrigé – Aires, intégration par parties

Mathématiques – Terminale spécialité

Intégrales · exercices ★ à ★★★, pièges et QCM

Pour chaque erreur : relis la ligne du corrigé, trouve l'étape où tu t'es trompé, puis refais le calcul sans regarder.

Exercice 1 – Aire sous une courbe ★

Calcule l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales aux bornes. Étudie d'abord le signe de f. Dans le dernier calcul, l'unité graphique est 2 cm sur chaque axe : donne aussi l'aire en cm².

a) Sur $[0\,;\,3]$, $f(x) \geqslant 0$ (et même $f(x) \geqslant 1$).

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^3 \left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3 \\ &= (9+3)-0 \\ &= 12\end{aligned}$$

u.a.

b) Sur $[-1\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$ car l'exponentielle est strictement positive.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^1 e^x\,\mathrm{d}x = \left[e^x\right]_{-1}^1 \\ &= e^1 - e^{-1} \\ &= e - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

u.a.

c) Sur $[1\,;\,5]$, $f(x) \geqslant 0$ car $x > 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x)\right]_1^5 \\ &= \ln(5) - \ln(1) \\ &= \ln(5)\end{aligned}$$

u.a.

d) Sur $[-2\,;\,2]$, $f(x) \geqslant 0$ car $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$, produit de deux facteurs positifs.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-2}^2 \left(4-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 \\ &= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} + \frac{16}{3} \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

u.a.

e) Sur $[0\,;\,9]$, $f(x) \geqslant 0$; $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $\sqrt{x}$: en dérivant le produit, $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9 \\ &= \frac{2}{3} \times 9 \times 3 - 0 \\ &= 18\end{aligned}$$

u.a.

f) x^3 est négatif sur $[-1\,;\,0]$ et positif sur $[0\,;\,2]$: *on découpe en* 0.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 \\ &= -\left(0 - \frac{1}{4}\right) + (4 - 0) = \frac{17}{4}\text{ u.a.}\end{aligned}$$

g) Sur $[0\,;\,2]$, $f(x) \leqslant 0$ car $x^2 \leqslant 4$.

La courbe est sous l'axe : l'aire est l'opposé de l'intégrale.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_0^2 \left(x^2 - 4\right)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 \\ &= -\left(\left(\frac{8}{3} - 8\right) - 0\right) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

u.a.

h) Sur $[0\,;\,\ln(4)]$, $f(x) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\ln(4)} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln(4)} \\ &= -e^{-\ln(4)} + e^0 \\ &= -\frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

u.a.

Avec une unité de 2 cm sur chaque axe, 1 u.a.

$= 2 \times 2 = 4$ cm², donc $\mathcal{A} = \dfrac{3}{4} \times 4 = 3$ cm².

Exercice 2 – Choisir u et v' ★

Pour intégrer f par parties, choisis $u(x)$ et $v'(x)$ tels que $f = uv'$, puis donne $u'(x)$ et $v(x)$.

a) Le polynôme se simplifie en dérivant, et on sait primitiver l'autre facteur.
$u(x) = x$, $u'(x) = 1$;
$v'(x) = e^{3x}$, $v(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x}$.

b) Le polynôme se simplifie en dérivant, et on sait primitiver l'autre facteur.
$u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$;
$v'(x) = \cos(x)$, $v(x) = \sin(x)$.

c) Sur $]0\,;+\infty[$, on écrit $\ln(2x) = \ln(2x) \times 1$.
On ne sait pas primitiver $\ln$ *: on le prend pour* u. Et $\left(\ln(2x)\right)' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.
$u(x) = \ln(2x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$;
$v'(x) = 1$, $v(x) = x$.

d) *On ne sait pas primitiver* $\ln$ *: on le prend pour* u.
$u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$;
$v'(x) = x^2$, $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

e) Le polynôme se simplifie en dérivant, et on sait primitiver l'autre facteur.
$u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$;
$v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$.

f) Le polynôme se simplifie en dérivant, et on sait primitiver l'autre facteur.
Attention : une primitive de $\sin(2x)$ est $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
$u(x) = x$, $u'(x) = 1$;
$v'(x) = \sin(2x)$, $v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

g) *On ne sait pas primitiver* $\ln$ *: on le prend pour* u. Et $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ a pour primitive $\dfrac{x^{-2}}{-2}$.
$u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$;
$v'(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $v(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

h) Sur $]-1\,;+\infty[$, on écrit $f(x) = x \times \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
Le polynôme se simplifie en dérivant, et on sait primitiver l'autre facteur.
Une primitive de $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (forme $\dfrac{u'}{u^2}$) est $-\dfrac{1}{x+1}$.
$u(x) = x$, $u'(x) = 1$;
$v'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $v(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 3 – Intégrer par parties ★

Calcule chaque intégrale à l'aide d'une intégration par parties (valeur exacte).

a) $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\,\mathrm{d}x &= \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2e^2 - 0\right) - \left(e^2 - e^0\right) \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

b) $u(x)=x$, $u'(x)=1$; $v'(x)=\cos(x)$, $v(x)=\sin(x)$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (\pi\sin(\pi)-0\sin(0)) - (-\cos(\pi)+\cos(0))\\ &= 0-2\\ &= -2\end{aligned}$$

Le crochet s'évalue aux deux bornes, même quand il est nul.

c) $u(x)=2x+3$, $u'(x)=2$; $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+3)\,e^x\,\mathrm{d}x &= [(2x+3)\,e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x\\ &= (5e-3)-(2e-2)\\ &= 3e-1\end{aligned}$$

d) $u(x)=x$, $u'(x)=1$; $v'(x)=e^{-x}$, $v(x)=-e^{-x}$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left(-e^{-1}-0\right)+\left(1-e^{-1}\right)\\ &= 1-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

(on a utilisé $-\int_0^1 -e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-e^{-1}$)

e) $u(x)=x$, $u'(x)=1$; $v'(x)=\sin(x)$, $v(x)=-\cos(x)$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+0\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right)\\ &= 0+1\\ &= 1\end{aligned}$$

f) $u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$; $v'(x)=x$, $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

Ici $u=\ln(x)$: on ne sait pas primitiver $\ln$.

g) $u(x)=x-1$, $u'(x)=1$; $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x-1)\,e^x\,\mathrm{d}x &= [(x-1)\,e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x\\ &= \left(e^2-(-1)\right)-\left(e^2-1\right)\\ &= e^2+1-e^2+1\\ &= 2\end{aligned}$$

$u(0)v(0)=(0-1)e^0=-1$ *: la parenthèse évite l'erreur de signe.*

h) $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$; $v'(x) = e^{2x}$, $v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$ (u' et v' continues).

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+1)\,e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}(x+1)\,e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2-1}{4} \\ &= \frac{3e^2-1}{4}\end{aligned}$$

Exercice 4 – Aire entre deux courbes ★★

Étudie la position relative des courbes de f et g sur l'intervalle, puis calcule l'aire du domaine compris entre elles.

a) $(x+2) - x^2 = -x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$: ce produit est positif ou nul entre les racines -1 et 2, donc la droite est au-dessus de la parabole.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) \\ &= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

u.a.

b) La tangente en 0 à la courbe de l'exponentielle (convexe) est $y = x+1$, donc $e^x \geqslant x+1 > x$: la courbe de f est au-dessus.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 (e^x - x)\,\mathrm{d}x = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(e - \frac{1}{2}\right) - (1-0) \\ &= e - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

u.a.

c) Pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$: la droite $y = 1$ est au-dessus de la courbe de g.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \ln(x)\right]_1^e \\ &= (e - \ln(e)) - (1 - \ln(1)) \\ &= (e-1) - 1 \\ &= e - 2\end{aligned}$$

u.a.

d) $x - x^3 = x(1-x)(1+x)$: sur $[0\,;\,1]$, les trois facteurs sont positifs ou nuls, donc $f(x) \geqslant g(x)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \left(x - x^3\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

u.a.

e) Sur $[0\,;\,1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$ (élever au carré un nombre de $[0\,;\,1]$ le diminue) : la courbe de f est au-dessus.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

u.a.

Exercice 5 – Par parties : calculs plus longs ★★

Calcule chaque intégrale. Il faut parfois intégrer par parties deux fois.

a) 1re intégration : $u = x^2$, $u' = 2x$; $v' = e^{2x}$, $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int_0^1 x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - J.$$

2e intégration, pour J : $u = x$, $u' = 1$; $v' = e^{2x}$, $v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$J = \left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Donc l'intégrale vaut $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2+1}{4} = \dfrac{e^2-1}{4}$.

b) $u = \ln(x)$, $u' = \dfrac{1}{x}$; $v' = x^2$, $v = \dfrac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}\end{aligned}$$

c) $u = \ln(x)$, $u' = \dfrac{1}{x}$; $v' = \dfrac{1}{x^2}$, $v = -\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(2)}{2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Deux « moins » se suivent : $-\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x^2}\right) = +\int\frac{1}{x^2}$.

d) 1re intégration : $u = (\ln(x))^2$, $u' = \dfrac{2\ln(x)}{x}$; $v' = 1$, $v = x$.

$$\int_1^e (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x = \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln(x)\,\mathrm{d}x = e - 2\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

2e intégration : $u = \ln(x)$, $v' = 1$: $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x = e - (e-1) = 1$.

Donc l'intégrale vaut $e - 2\times 1 = e - 2$.

e) $u = \ln(x)$, $u' = \dfrac{1}{x}$; $v' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $v = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{e} - \left[4\sqrt{x}\right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e}\end{aligned}$$

(car $\dfrac{1}{x}\times 2\sqrt{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$)

Exercice 6 – Une primitive par parties ★★

Détermine, par une intégration par parties, une primitive de f sur l'intervalle donné. Vérifie en dérivant.

a) On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$: c'est la primitive de f qui s'annule en 1.

$u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$; $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.

$F(x) = \big[t\ln(t)\big]_1^x - \displaystyle\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - 0 - (x-1) = x\ln(x) - x + 1$.

Vérification : en dérivant $F(x) = x\ln(x) - x + 1$, on retrouve $f(x)$.

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-2t}\,\mathrm{d}t$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0.

$u(t) = t$, $u'(t) = 1$; $v'(t) = e^{-2t}$, $v(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-2t}$.

$$F(x) = \left[-\frac{t}{2}e^{-2t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^x$$
$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}e^{-2x}$$

Vérification : en dérivant $F(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2x+1}{4}e^{-2x}$, on retrouve $f(x)$.

c) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\cos(t)\ \mathrm{d}t$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0.

$u(t) = t$, $u'(t) = 1$; $v'(t) = \cos(t)$, $v(t) = \sin(t)$.

$F(x) = \big[t\sin(t)\big]_0^x - \displaystyle\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) - \big[-\cos(t)\big]_0^x = x\sin(x) + \cos(x) - 1$.

Vérification : en dérivant $F(x) = x\sin(x) + \cos(x) - 1$, on retrouve $f(x)$.

d) On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x (t+1)\ln(t)\ \mathrm{d}t$: c'est la primitive de f qui s'annule en 1.

$u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$; $v'(t) = t+1$, $v(t) = \dfrac{t^2}{2} + t$.

$$F(x) = \left[\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{d}t \ \left(\text{car } \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} + t\right) = \frac{t}{2} + 1\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \left(\frac{x^2}{4} + x - \frac{5}{4}\right)$$

Vérification : en dérivant $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\ln(x) - \dfrac{x^2}{4} - x + \dfrac{5}{4}$, on retrouve $f(x)$.

Exercice 7 – Une suite d'intégrales ★★★

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \big[e^x\big]_0^1 = e - 1$.
   Pour I_{n+1} : $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$; $v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$.
   $I_{n+1} = \big[x^{n+1}e^x\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n e^x\,\mathrm{d}x = (e - 0) - (n+1)I_n$.
   En 0, $0^{n+1} = 0$ *car* $n + 1 \geqslant 1$.

2. $n = 0 : I_1 = e - 1 \times I_0 = e - (e-1) = 1$.
   $n = 1 : I_2 = e - 2I_1 = e - 2$.

3. Pour $x \in [0\,;\,1]$: $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leqslant 0$, donc $x^{n+1} \leqslant x^n$.
   On multiplie par $e^x > 0$: $x^{n+1}e^x \leqslant x^n e^x$.
   On intègre sur $[0\,;\,1]$ (bornes dans l'ordre croissant) : $I_{n+1} \leqslant I_n$.
   La suite est décroissante.

4. Sur $[0\,;\,1]$: $1 \leqslant e^x \leqslant e$, donc $0 \leqslant x^n e^x \leqslant e x^n$.
   On intègre : $0 \leqslant I_n \leqslant e\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$: par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 8 – Encadrer pour trouver la limite ★★★

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln(2)$.
   Par linéarité : $u_n + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.
   Avec $n=0$: $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(2)$.

2. Sur $[0\,;\,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$; on divise par $1+x > 0$: $\dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x}$.
   On intègre sur $[0\,;\,1]$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   La suite est décroissante.

3. Pour $x \in [0\,;\,1]$: $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ (la fonction inverse est décroissante).
   On multiplie par $x^n \geqslant 0$: $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$.
   On intègre, avec $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 9 – Une aire qui reste finie (calculatrice autorisée) ★★★

1. Pour $x \geqslant 0$, $4x \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$: $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire est l'intégrale de f.
   $u(x) = 4x$, $u'(x) = 4$; $v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$.
   $\mathcal{A}(\lambda) = \big[-4xe^{-x}\big]_0^\lambda - \displaystyle\int_0^\lambda (-4e^{-x})\,\mathrm{d}x = -4\lambda e^{-\lambda} + \big[-4e^{-x}\big]_0^\lambda$
   $\quad = -4\lambda e^{-\lambda} - 4e^{-\lambda} + 4 = 4 - 4(\lambda+1)e^{-\lambda}$

2. $\mathcal{A}(3) = 4 - 4\times 4e^{-3} = 4 - 16e^{-3} \approx 3{,}20$ u.a.

3. $\lambda e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda}{e^\lambda} \to 0$ par croissances comparées, et $e^{-\lambda} \to 0$.
   Donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4 - 0 = 4$: le domaine est illimité, mais son aire se rapproche de 4 u.a.

Exercice 10 – Trouve l'erreur ★★

Chaque réponse d'élève contient une erreur. Trouve-la, puis écris la bonne réponse.

a) *Le signe devant l'intégrale restante est « − ».*

$\big[(x+2)e^x\big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = (3e-2) - (e-1) = 2e - 1.$

b) $\dfrac{1}{x}$ *est la dérivée de* $\ln$*, pas une primitive ; on ne sait pas primitiver* $\ln$ *à vue.*
On prend $u = \ln(x)$, $v' = x$, $v = \dfrac{x^2}{2}$: $\left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$.

c) *Une aire n'est jamais négative : les courbes se croisent en* $x = 1$.
$x - x^2 = x(1-x)$ est positif sur $[0\,;\,1]$ et négatif sur $[1\,;\,2]$.
$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ u.a.

d) *Sur* $[0\,;\,1]$, $x^2 - 1 \leqslant 0$ *: la courbe est sous l'axe, l'aire est l'opposé de l'intégrale.*
$\mathcal{A} = \dfrac{2}{3}$ u.a.

e) *Sur* $[0\,;\,1]$, *c'est l'inverse : par exemple* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$.
$x^{n+1} \leqslant x^n$, on multiplie par $\sqrt{1+x} > 0$ et on intègre : $I_{n+1} \leqslant I_n$, la suite est décroissante.

f) 1 *u.a. est l'aire du rectangle unité :* $2 \times 3 = 6$ *cm².*
L'aire mesure $3 \times 6 = 18$ cm².

QCM – Six questions comme en contrôle

Une seule bonne réponse par question.

1. L'aire sous la courbe de $x \mapsto 3x^2$ entre $x = 1$ et $x = 2$ vaut :

Réponse C : 7 u.a.
$3x^2 \geqslant 0$ et $\left[x^3\right]_1^2 = 8 - 1 = 7$.

2. Par parties, $\displaystyle\int_0^1 xe^{4x}\,\mathrm{d}x$ vaut :

Réponse A : $\dfrac{3e^4 + 1}{16}$
$\left[\dfrac{x}{4}e^{4x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4}e^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4 - 1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}$.

3. Pour $\displaystyle\int_1^e x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$, on choisit :

Réponse D : $u = \ln(x)$, $v' = x^3$
On dérive ln (qui devient $\dfrac{1}{x}$) et on primitive x^3.

4. L'aire entre la droite $y = 1$ et la parabole $y = x^2$ sur $[-1\,;\,1]$ vaut :

Réponse B : $\dfrac{4}{3}$ u.a.
$1 - x^2 \geqslant 0$ sur $[-1\,;\,1]$ et $\left[x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

5. La suite $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est :

Réponse D : décroissante
Sur $[0\,;\,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$; on divise par $1 + x^2 > 0$ et on intègre.

6. La limite de $K_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est :

Réponse A : 0

$0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$, donc $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$: gendarmes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).